Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Тема 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

§1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось.

Вектор – совокупность направленных отрезков, имеющих общее направление и одинаковую длину.

Направление вектора принято обозначать стрелкой.

Вектор обозначается $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$ (A – начало, B – конец вектора).

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$
Вектор, противоположный $\vec{a}$, обозначается $(-\vec{a})$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Если начало и конец вектора совпадают (длина вектора равна нулю), то вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* и обозначается $\vec{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$, и обозначается $\vec{a}_0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны одной прямой, то они называются *коллинеарными* $(\vec{a} \parallel \vec{b})$.

При этом векторы могут быть направлены в одну сторону (*сонаправлены* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или в разные стороны (*противоположно направлены* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковые длины, коллинеарны и сонаправлены.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны некоторой плоскости.

*Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или любые два вектора коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.

Домашнее задание. Записать и повторить правила сложения и вычитания векторов, правило умножения вектора на число.

Свойства линейных операций над векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c});$
3. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a};$
4. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a};$
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$
6. $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a};$
7. $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0.$

Уральский федеральный университет

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l (направленная прямая).

Проекцией точки M на ось l называется основание перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на ось l: $\text{пр}_l M = M_1$.

Если M лежит на l, то $\text{пр}_l M = M$.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный ненулевой вектор.

$\text{пр}_l A = A_1$, $\text{пр}_l B = B_1$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ и отрицательное число $\left(-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\right)$, если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$.

Свойства проекции вектора на ось

1. $пр_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi,$ где $\varphi = (\vec{a}, \vec{l});$

2. $пр_l (\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot пр_l \vec{a};$

3. $пр_l (\vec{a} + \vec{b}) = пр_l \vec{a} + пр_l \vec{b}.$

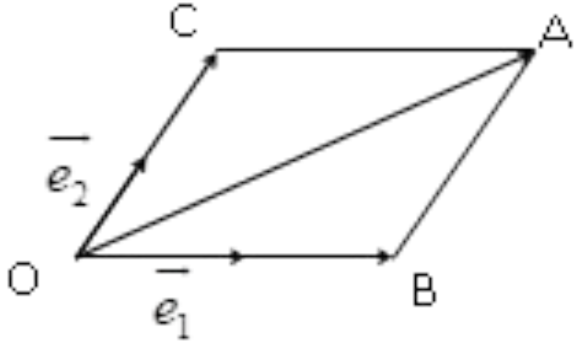
§2. Координаты вектора и точки в заданном базисе

Базис на плоскости – это два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ взятых в определенном порядке.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор на плоскости.

От произвольной точки O отложим векторы, равные $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB} \parallel \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OC} \parallel \vec{e}_2$$



Тогда $\exists\, a_1, a_2 : \overrightarrow{OB} = a_1\vec{e}_1,\ \overrightarrow{OC} = a_2\vec{e}_2$

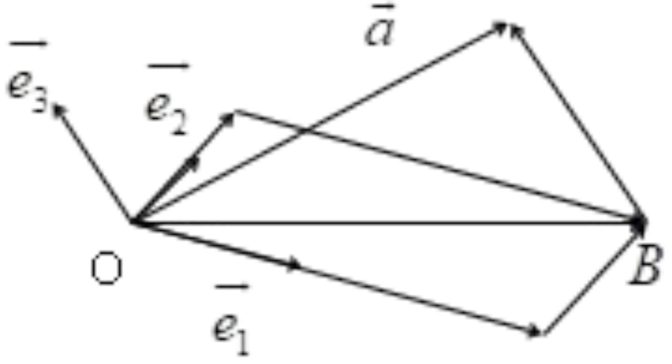
и $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$

Говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, а коэффициенты разложения a_1, a_2 называют *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, *Базис в пространстве* – это *три некомпланарных вектора* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,$ взятых в определенном порядке.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор.

От произвольной точки O отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\overline{OA} = \vec{a}.$

Через точку A проведем прямую AB, параллельную вектору $\vec{e}_3$, до пересечения $\vec{e}_1, \vec{e}_2.$ с плоскостью векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2.$



Тогда $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BA}, \ \overline{OB} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$

$\overline{BA} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \exists\, a_3 : \ \overline{BA} = a_3\vec{e}_3.$

Следовательно, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 есть координаты в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Обозначение $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ или $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Свойства координат векторов

1. $\lambda\vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\};$

2. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\};$

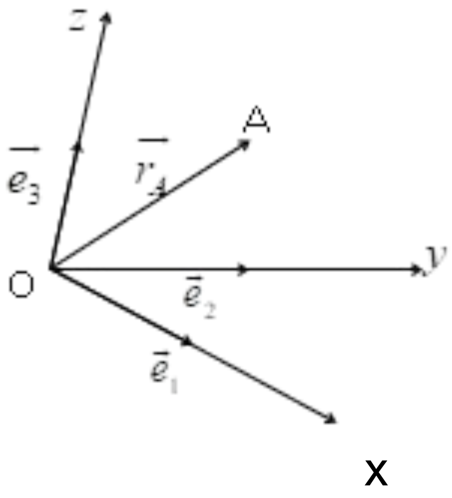
3. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}.$

Рассмотрим базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и поместим их в общее начало – фиксированную точку O (начало координат).
Через точку O и базисные векторы проведем оси координат Ox, Oy, Oz.

Рассмотрим точку A.

Вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A$ называется *радиус-вектором* точки A.

Координаты радиус-вектора $\vec{r}_A$ называют *координатами точки A в базисе* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ или в системе координат $Oxyz$.



Обозначение: $A(x, y, z)$, если $\overrightarrow{OA} = \{x,\ y,\ z\}$.

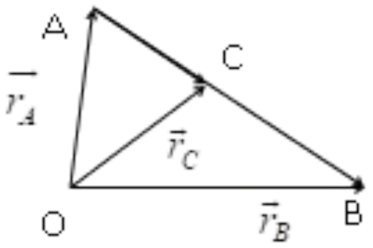
Если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$.

Пример (задача о делении отрезка в данном соотношении).

Дано: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Найти: координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении λ.

Решение.



По условию $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{CB}\right|$.

$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, поэтому $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. (*)

Рассмотрим радиус-векторы $\vec r_A, \vec r_B, \vec r_C$ точек A, B, C.

Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec r_C - \vec r_A$, $\overrightarrow{CB} = \vec r_B - \vec r_C$ и равенство (*) примет вид:

$$\vec r_C - \vec r_A = \lambda\vec r_B - \lambda\vec r_C \Rightarrow \vec r_C - = \frac{\vec r_A + \lambda\vec r_B}{1+\lambda}.$$

Аналогичным соотношением связаны и координаты точек, т.е.

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_1 + z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка C делит отрезок AB пополам, то $\lambda=1$ и

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_C = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***скаляр*** (число), равный произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Другое обозначение скалярного произведения: $(\vec{a},\vec{b})$.

Если $\vec{b}=\vec{a}$, то $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ — скалярный квадрат вектора.

Свойства скалярного произведения

1. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,пр_{\vec{b}}\vec{a}$.
4. $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})+\mu(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Пример 1. Вычислить $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{3\pi}{4}$.

Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

Ортонормированный базис (ОНБ) – базис, в котором векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и нормированы (длины векторов равны 1).

В трехмерном пространстве ОНБ: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

(На плоскости ОНБ: $\vec{i}, \vec{j}$).

Пусть $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$.

Найдем скалярное произведение векторов, используя свойство линейности:

Таким образом, в ОНБ: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$

Применения скалярного произведения

1. Проверка ортогональности ненулевых векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

2. Вычисление длины вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}.$

В ОНБ для $\vec{a}$: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$

3. Отыскание угла φ между ненулевыми векторами $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$

4. Вычисление направляющих косинусов вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

α, β, γ - углы, которые образует вектор $\vec{a}$ с базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно (или, что то же самое, с осями *Ox*, *Oy*, *Oz*).

Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$, при этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

5. Вычисление проекции вектора на вектор

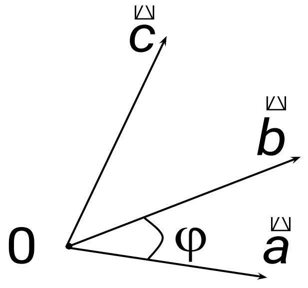
$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}).$$

6. Вычисление работы *A* постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении из точки *M* в точку *N*:

$$A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}.$$

Пример 2. Найти вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\{1,3,2\}$, если его проекция на вектор $\vec{b}=\{2,1,0\}$ равна $\left(-2\sqrt{5}\right)$.

§4. Векторное произведение векторов



Понятие правой и левой тройки векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***правой***, если с конца третьего вектора *кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки.*

В противном случае тройка векторов называется левой.

На рис. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка; $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$ – левая тройка.

Замечание

При перестановке местами двух соседних векторов ориентация этой тройки меняется, т.е. правая тройка становится левой, а левая – правой. При круговой перестановке векторов в тройке ориентация тройки не меняется, т.е. ориентации троек $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$, $(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$ – одинаковы.

Уральский федеральный университет

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***вектор*** $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям

1. вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \; \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Заметим, что длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 1. Показать, что $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Аналогично, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}.$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}\quad(\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}).$
2. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}.$
3. $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{c}=\lambda(\vec{a}\times\vec{c})+\mu(\vec{b}\times\vec{c}).$

Из свойства линейности (3) следует, что при векторном умножении можно раскрывать скобки, выносить числовой множитель, но нельзя менять порядок сомножителей.

Вычисление векторного произведения
в ортонормированном базисе

Пусть в ОНБ: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$

Найдем векторное произведение векторов, используя свойство линейности:

Таким образом, в ОНБ: $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Применение векторного произведения

1. Вычисление площади параллелограмма $S_{\square}$ и площади треугольника S_{Δ}, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,\qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

2. Отыскание вектора $\vec{c}:\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$

$$\vec{c}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

3. Вычисление момента $\vec{m}_0$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке M, относительно точки O: $\vec{m}_0=\overrightarrow{OM}\times\vec{F}$.

Уральский федеральный университет

4. Вычисление линейной скорости $\vec{v}$ точки М, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{w}$: $\vec{v} = \vec{w} \times \overrightarrow{OM}$.

Пример 2. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$, если $|\vec{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор $\vec{c}$ образует тупой угол с осью Oz.

Пример 2. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k}$, если $|\vec{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор $\vec{c}$ образует тупой угол с осью Oz.