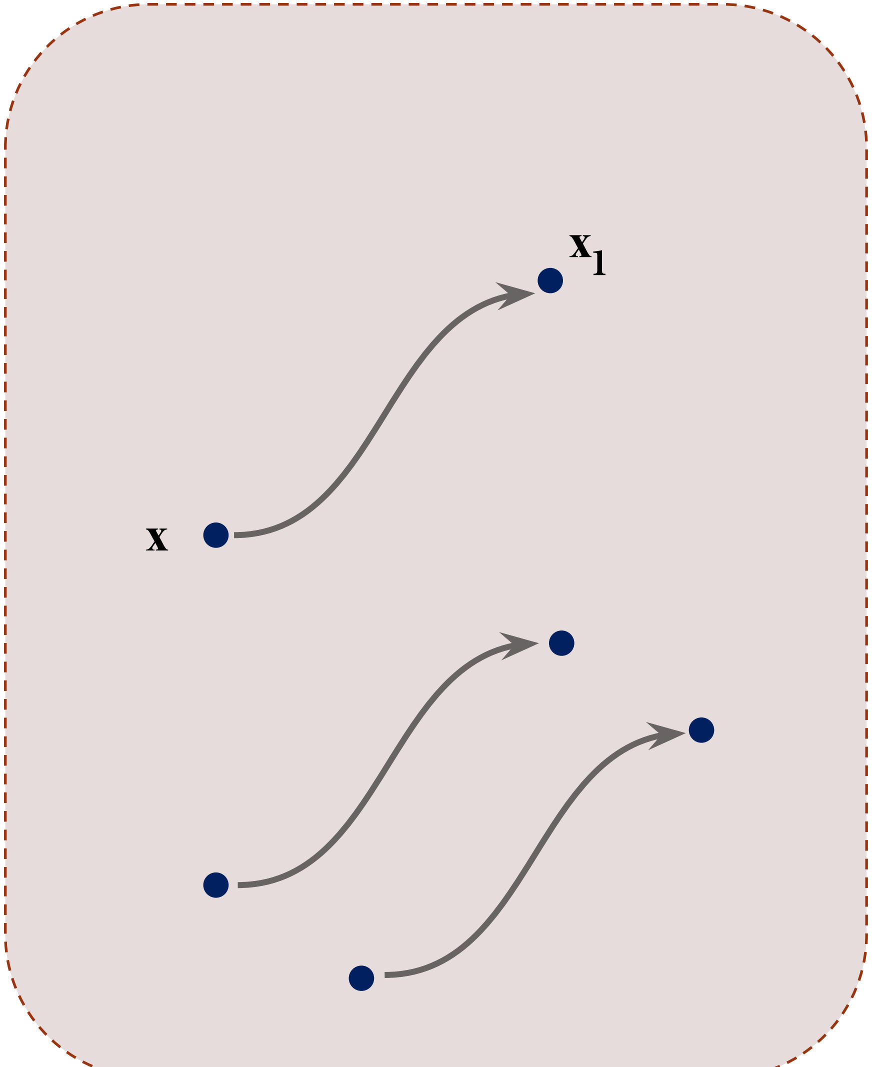
Понятие

движения

Отображение плоскости на себя



Поставим в соответствие **<u>каждой</u>** точке плоскости какую-либо точку этой же плоскости.

Говорят, что дано отображение плоскости на себя.

$X \rightarrow X_1$ по какому-либо правилу

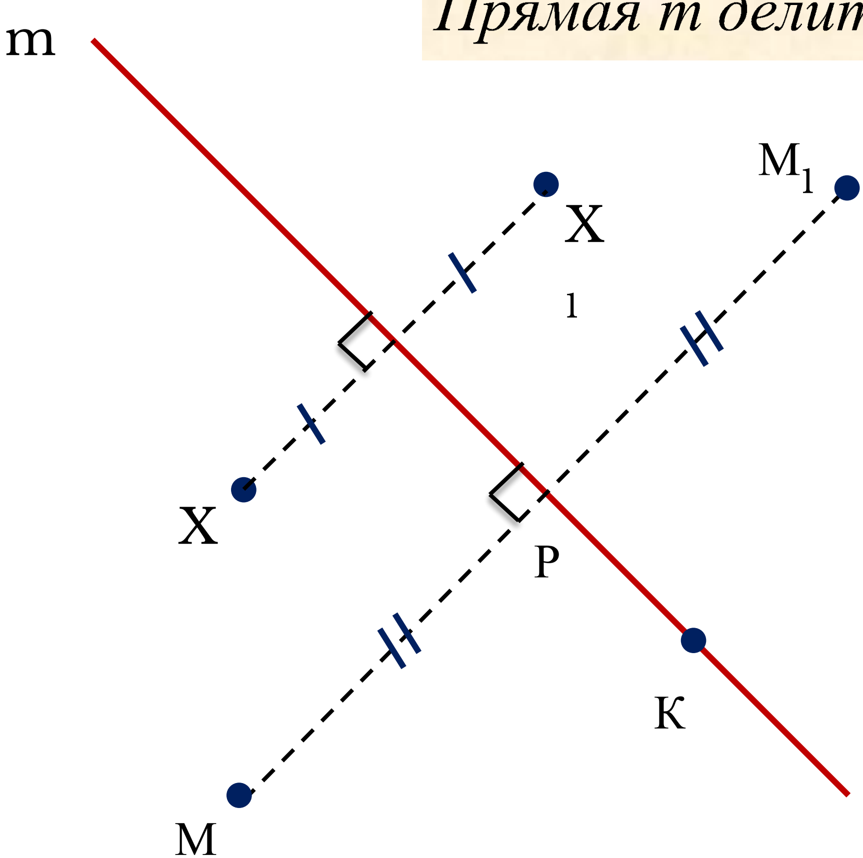
Каждое правило определяет какое-то отображение

Осевая симметрия

Пусть дана какая-то прямая **m**, которую назовем осью симметрии. Осевой симметрией называется отображение плоскости на себя, при котором каждой точке X ставится в соответствие точка X_1 по следующему правилу:

$XX_1 \perp m$

Прямая m делит отрезок XX_1 *пополам*



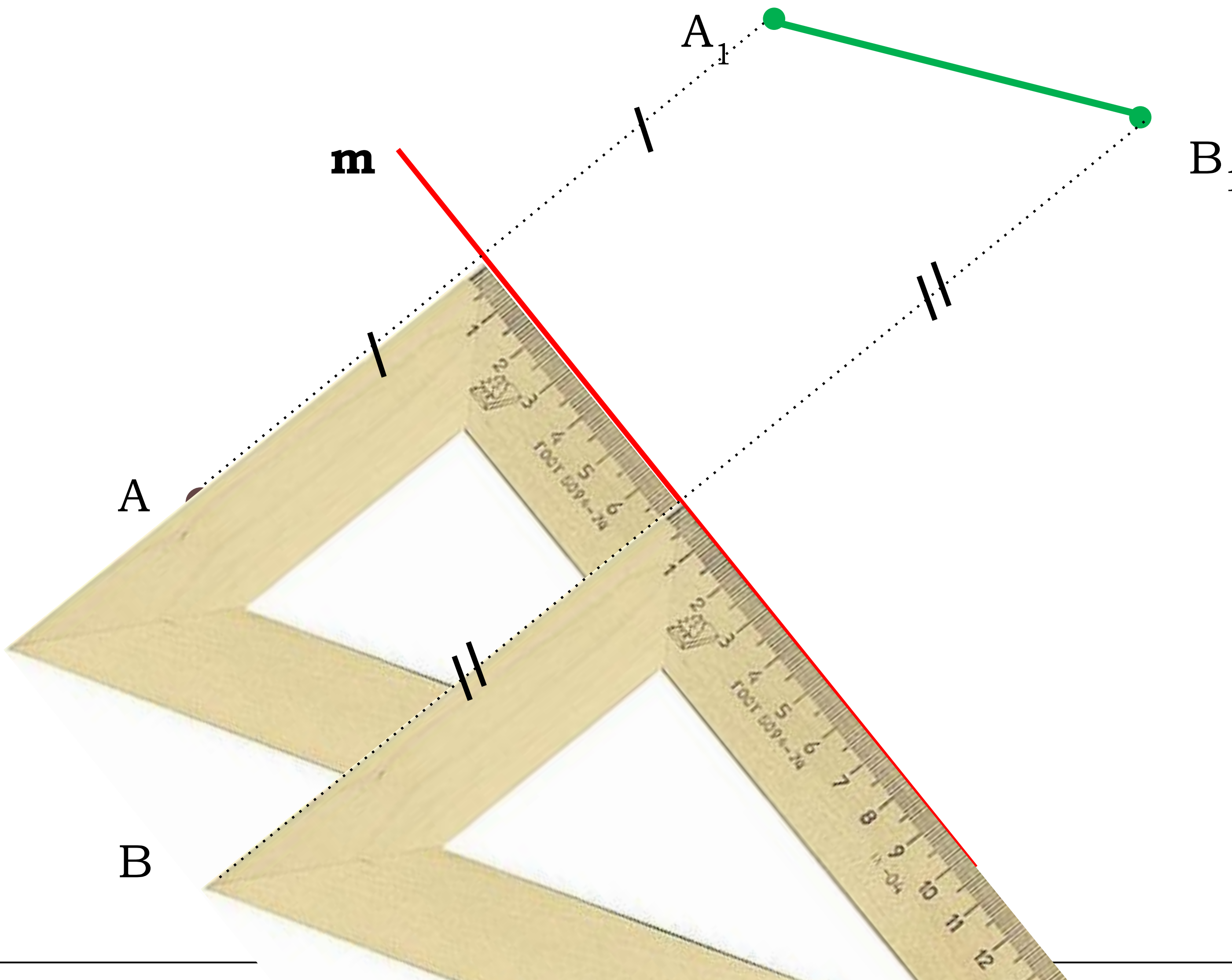
Как для точки M построить точку M_1?

Из точки M опустим перпендикуляр MP на прямую m.

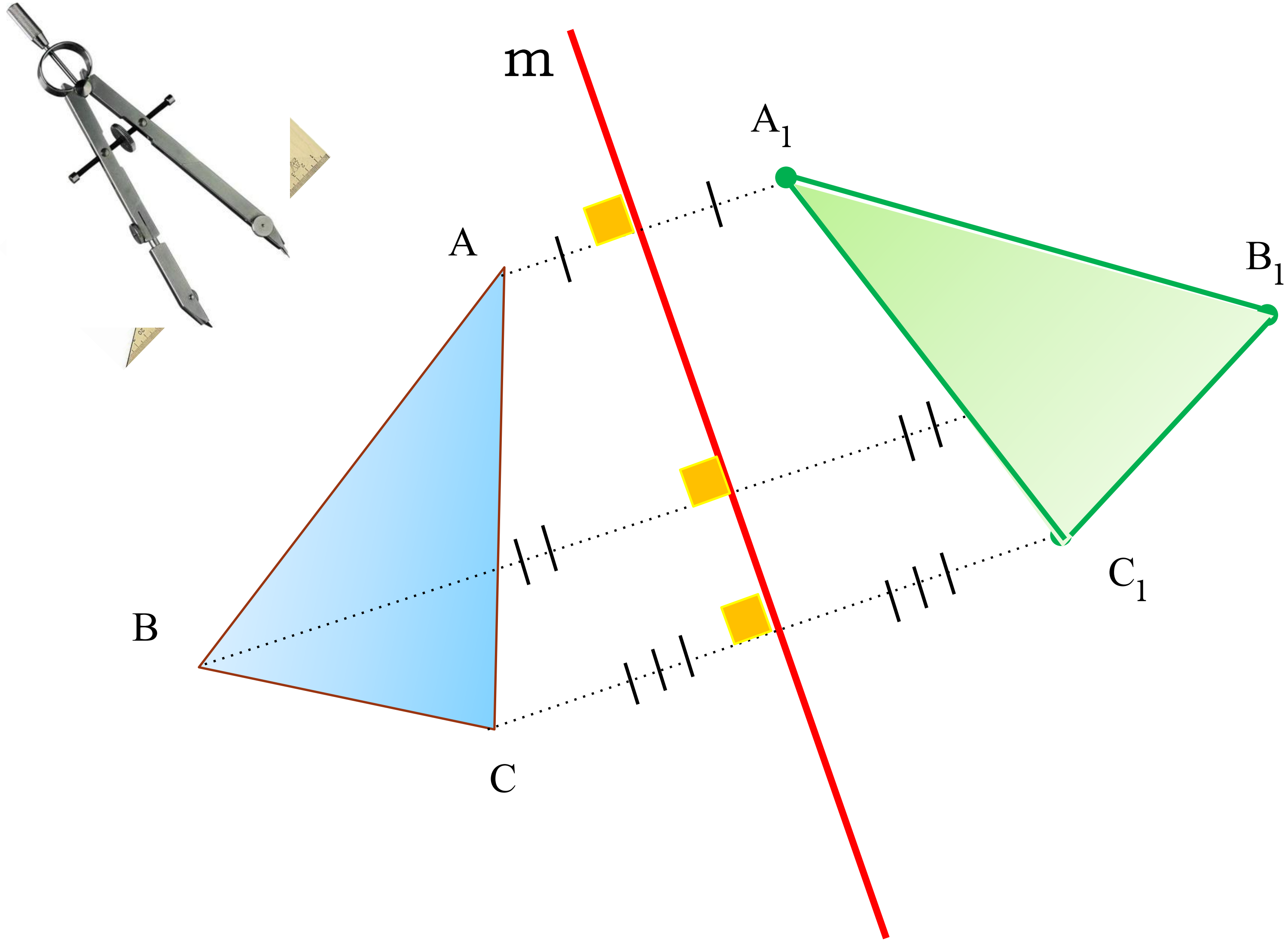
Отложим на прямой MP отрезок PM_1, равный отрезку MP.

Точка, лежащая на прямой m, симметрична сама себе

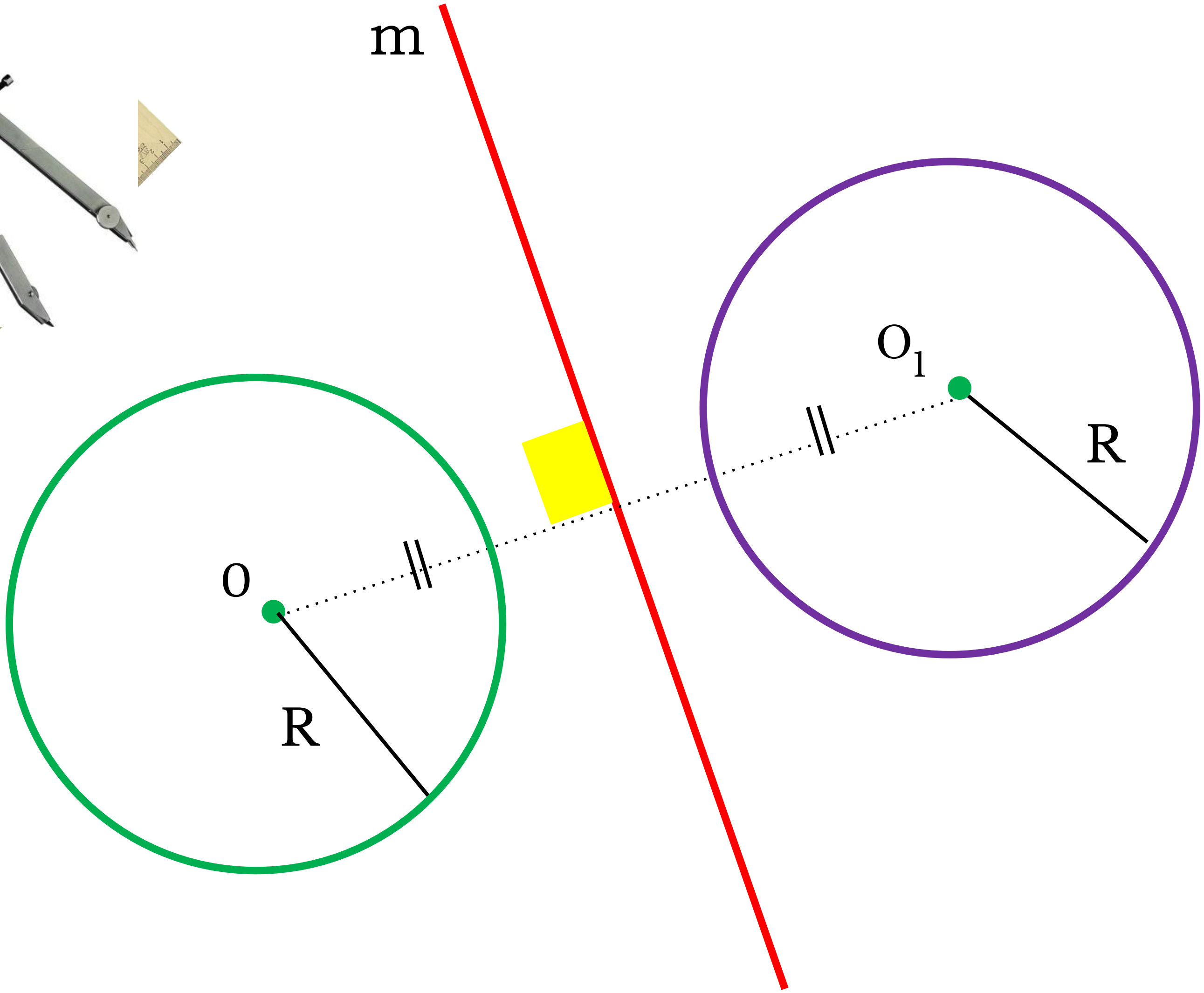
Построение отрезка, симметричного данному относительно **прямой m**



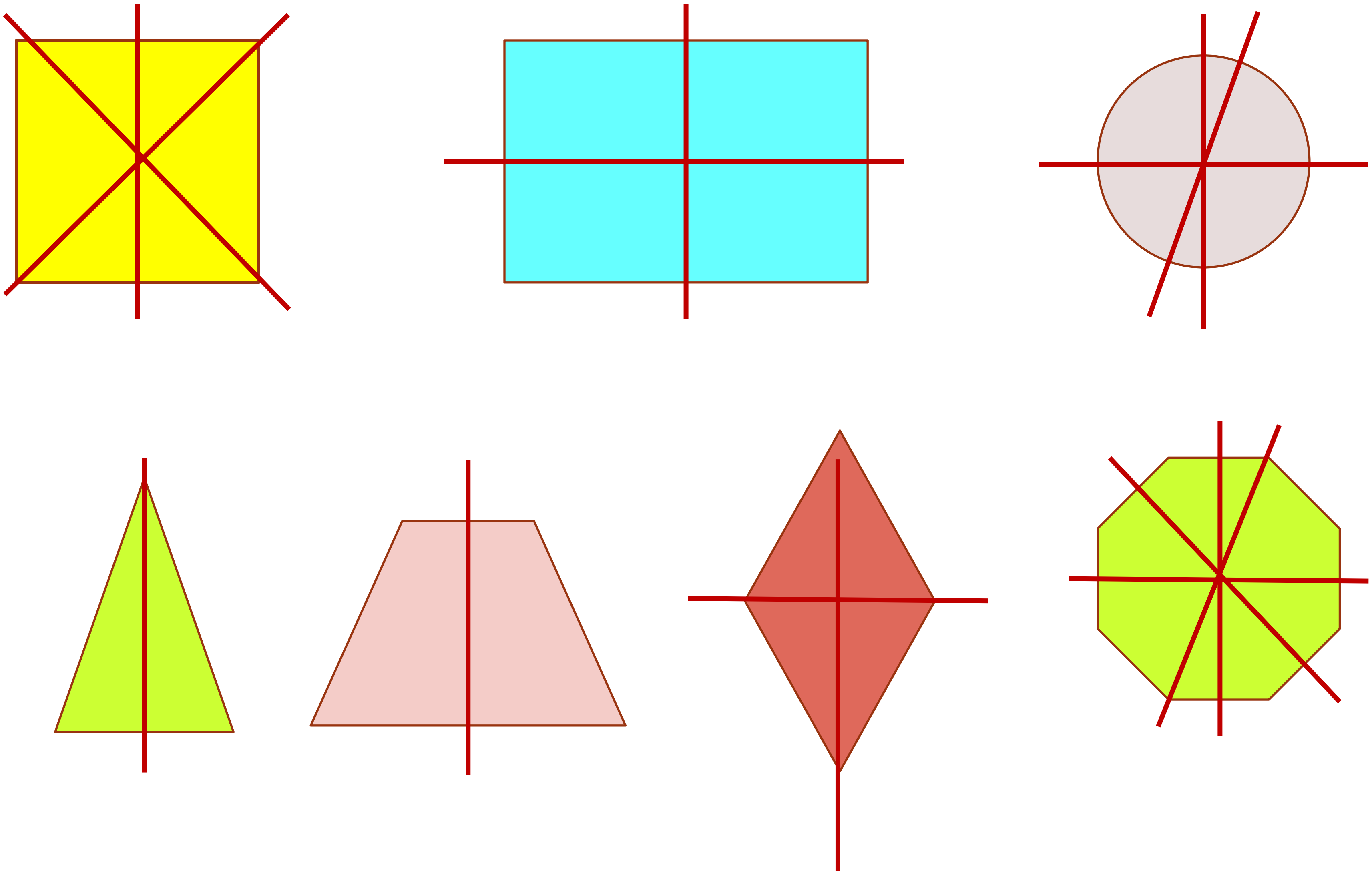
Построение треугольника, симметричного данному относительно **прямой m**



Построение окружности, симметричной данной относительно **прямой m**



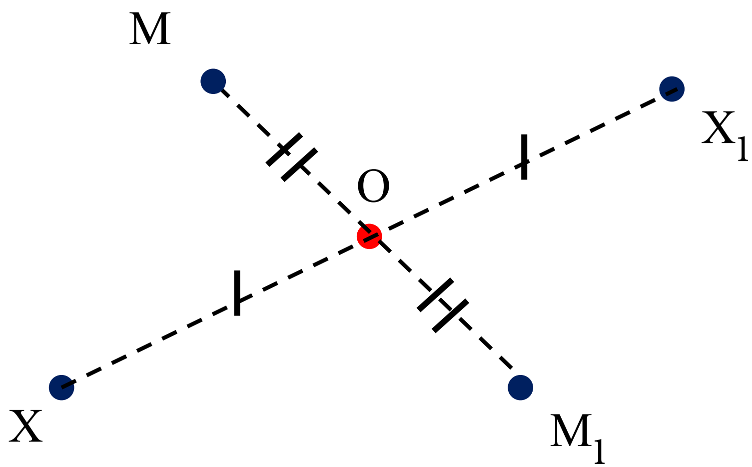
Фигуры, имеющие ось симметрии



Центральная симметрия

Пусть дана какая-то точка О, которую назовем центром симметрии. Центральной симметрией называется отображение плоскости на себя, при котором каждой точке X ставится в соответствие точка X_1 по следующему правилу:

О – середина отрезка XX_1



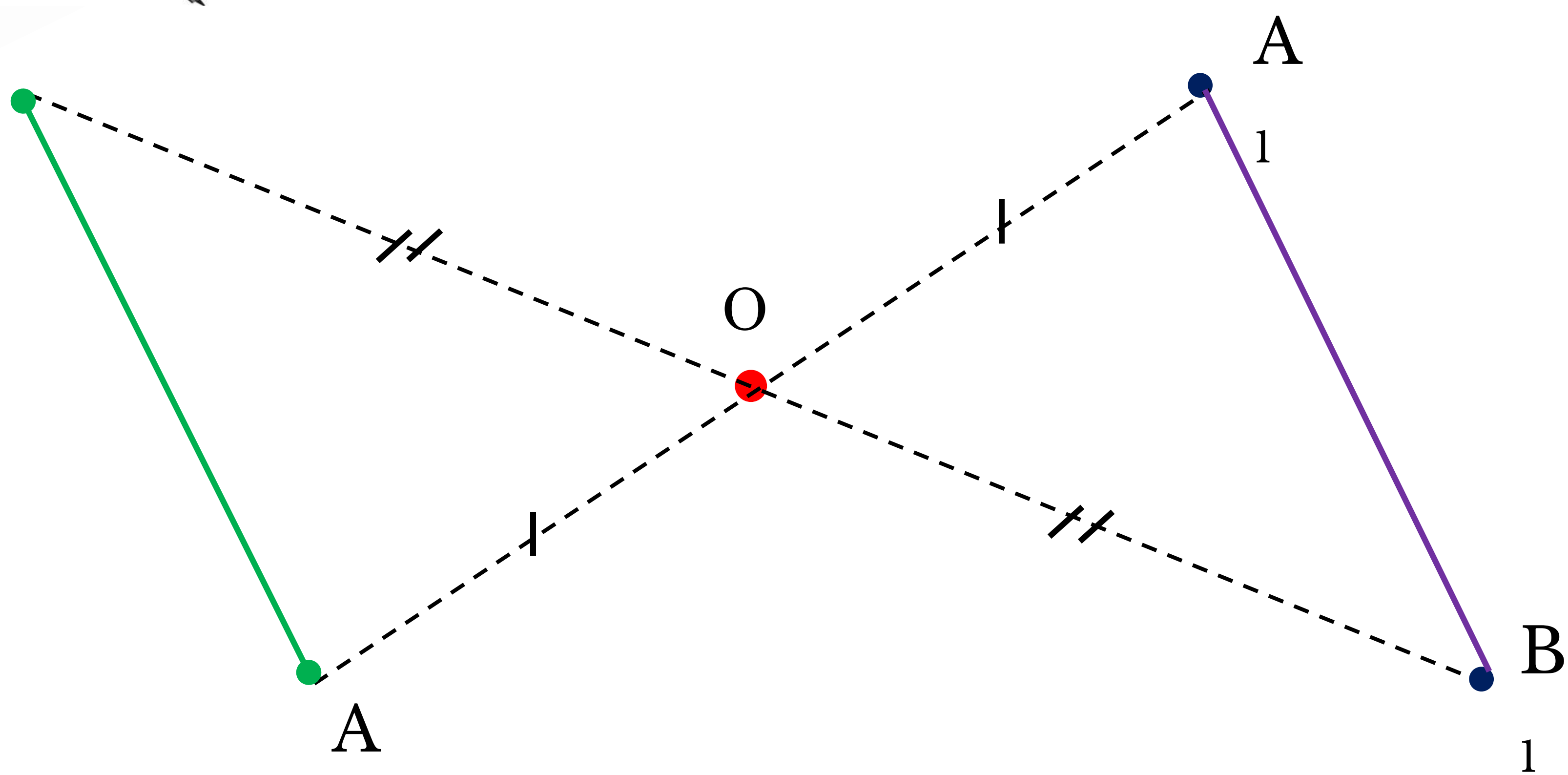
Как для точки М построить точку M_1?

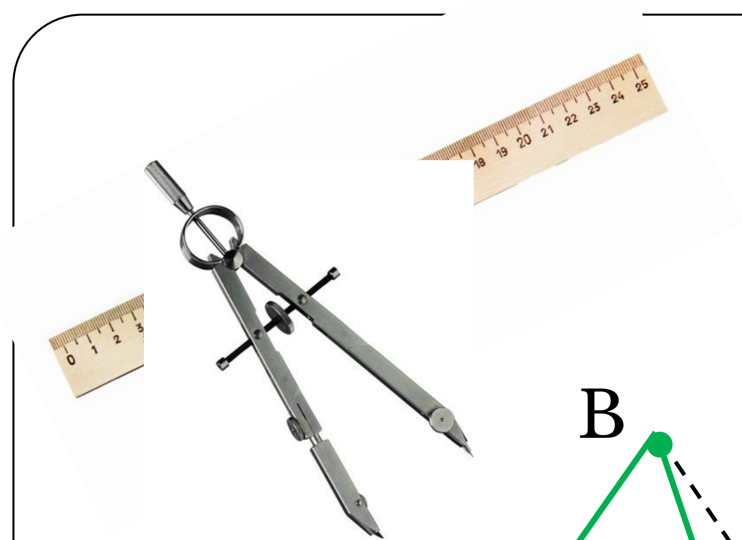
Проведем луч МО

Отложим на луче МО отрезок OM_1, равный отрезку ОМ.

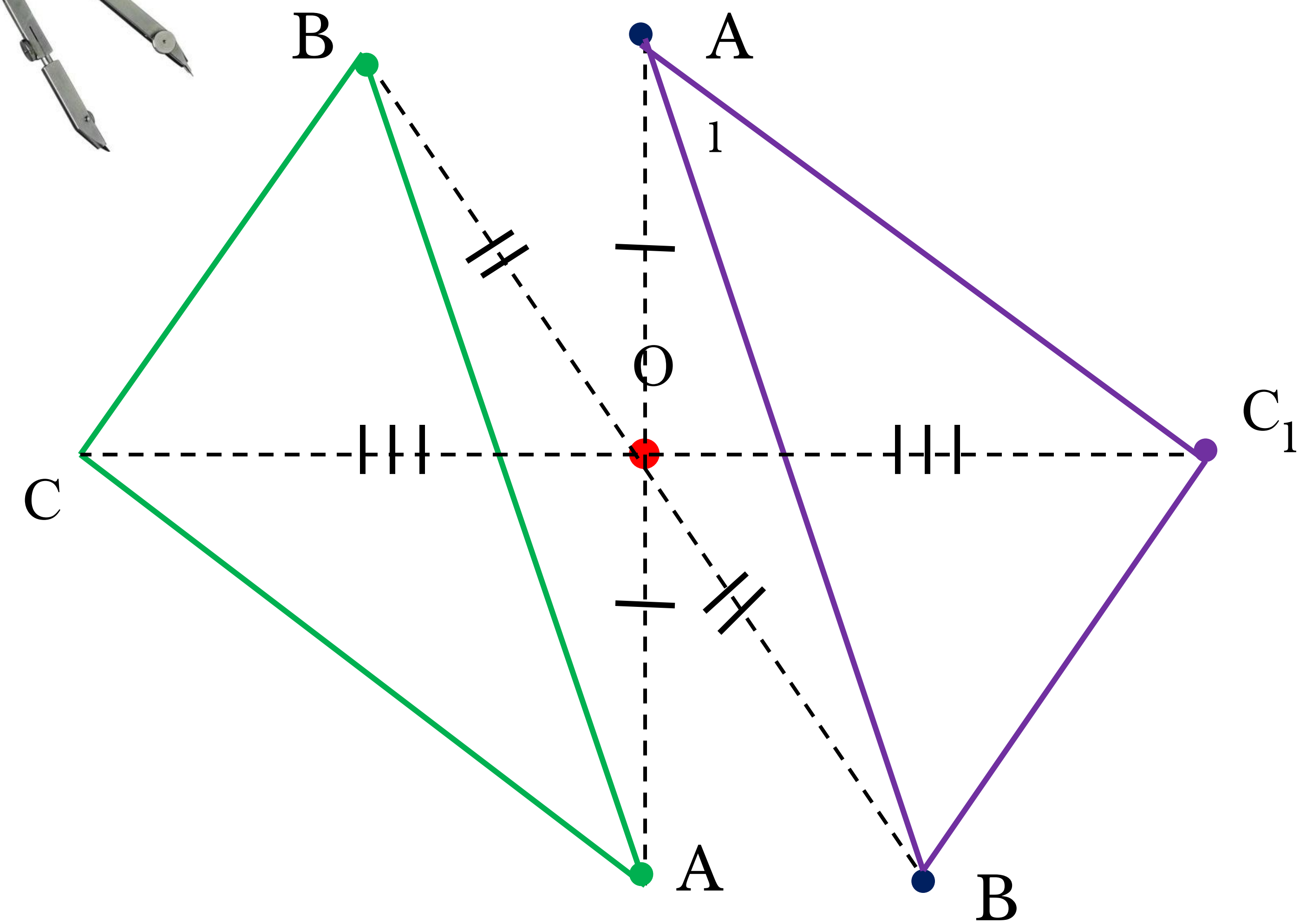
Точка О (центр симметрии) симметрична сама себе.

Построение отрезка, симметричного данному относительно точки О

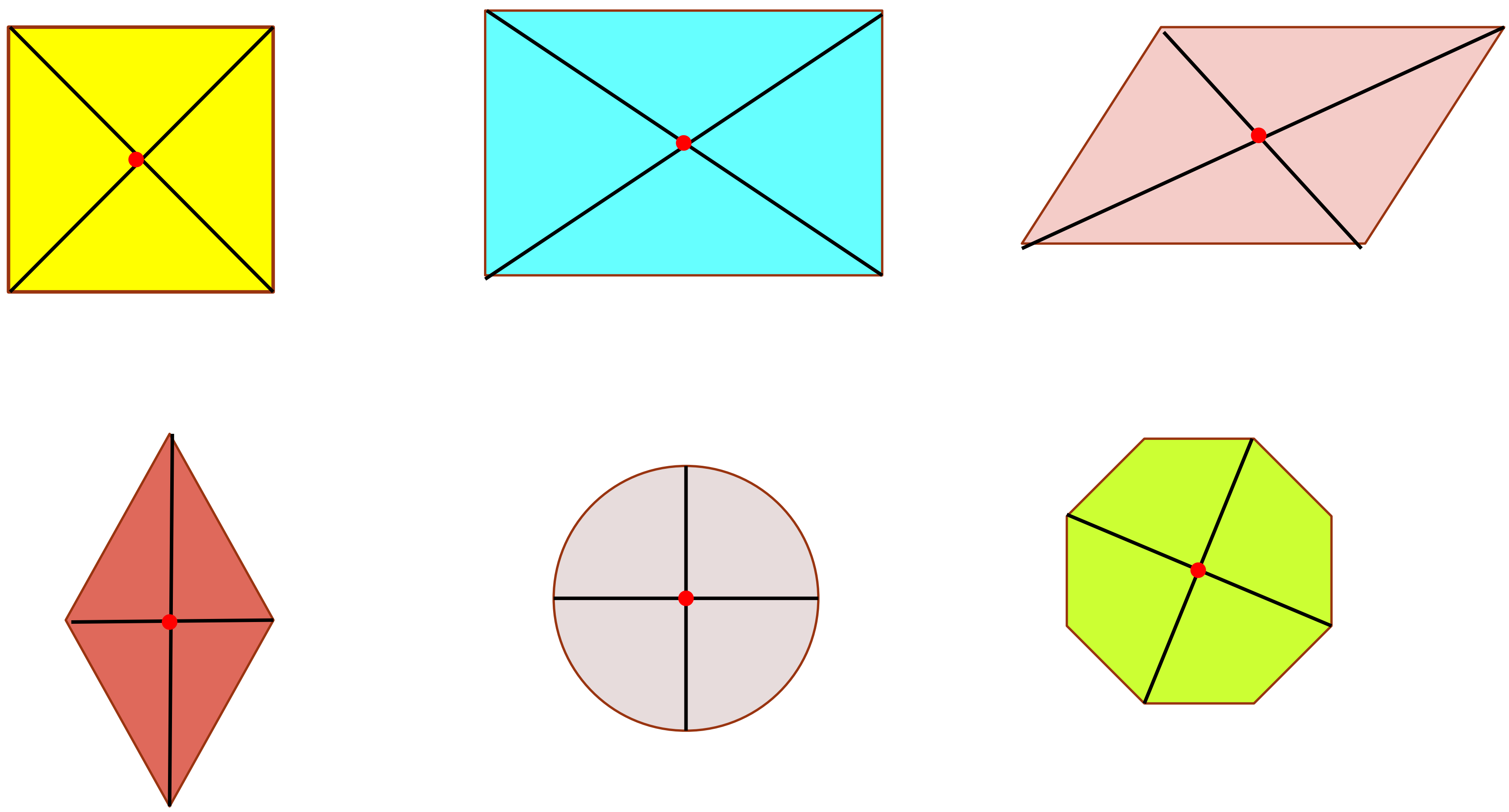




Построение треугольника, симметричного данному относительно **точки О**



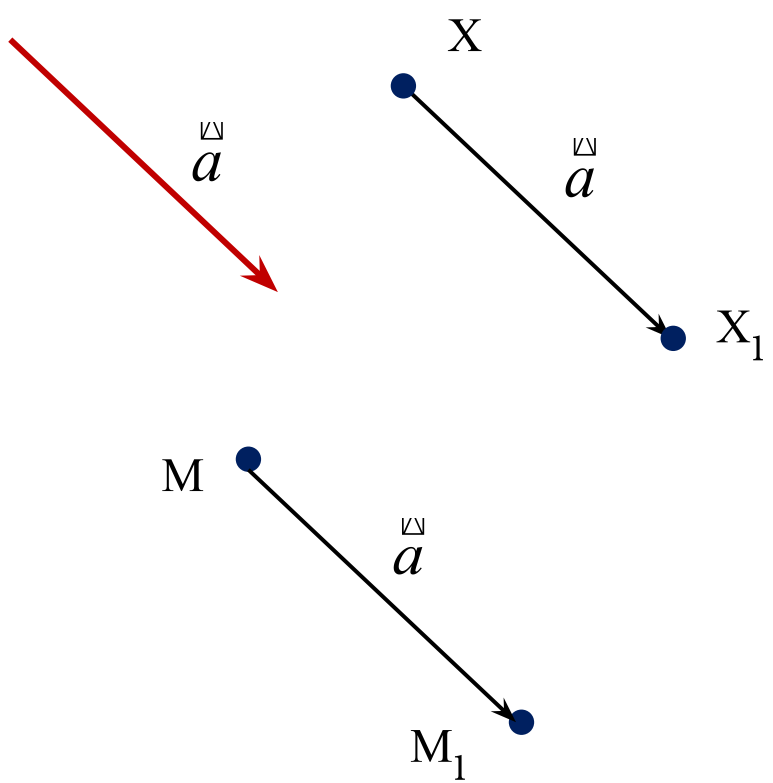
Фигуры, имеющие центр симметрии



Параллельный перенос

Пусть $\vec{a}$ *– данный вектор.*

Параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ *называется отображение плоскости на себя, при котором каждой точке* X *ставится в соответствие точка* X_1 *по правилу :* $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$

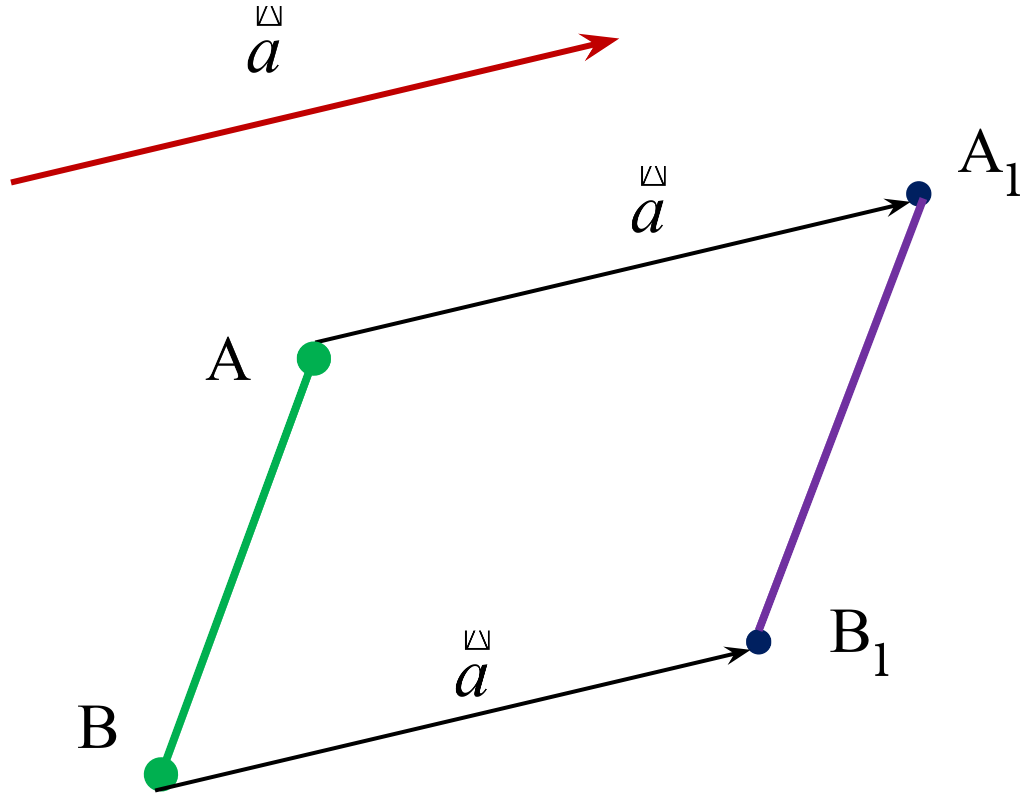


Как для точки M построить точку M_1?

От точки M отложим вектор MM_1, равный данному вектору a

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$$

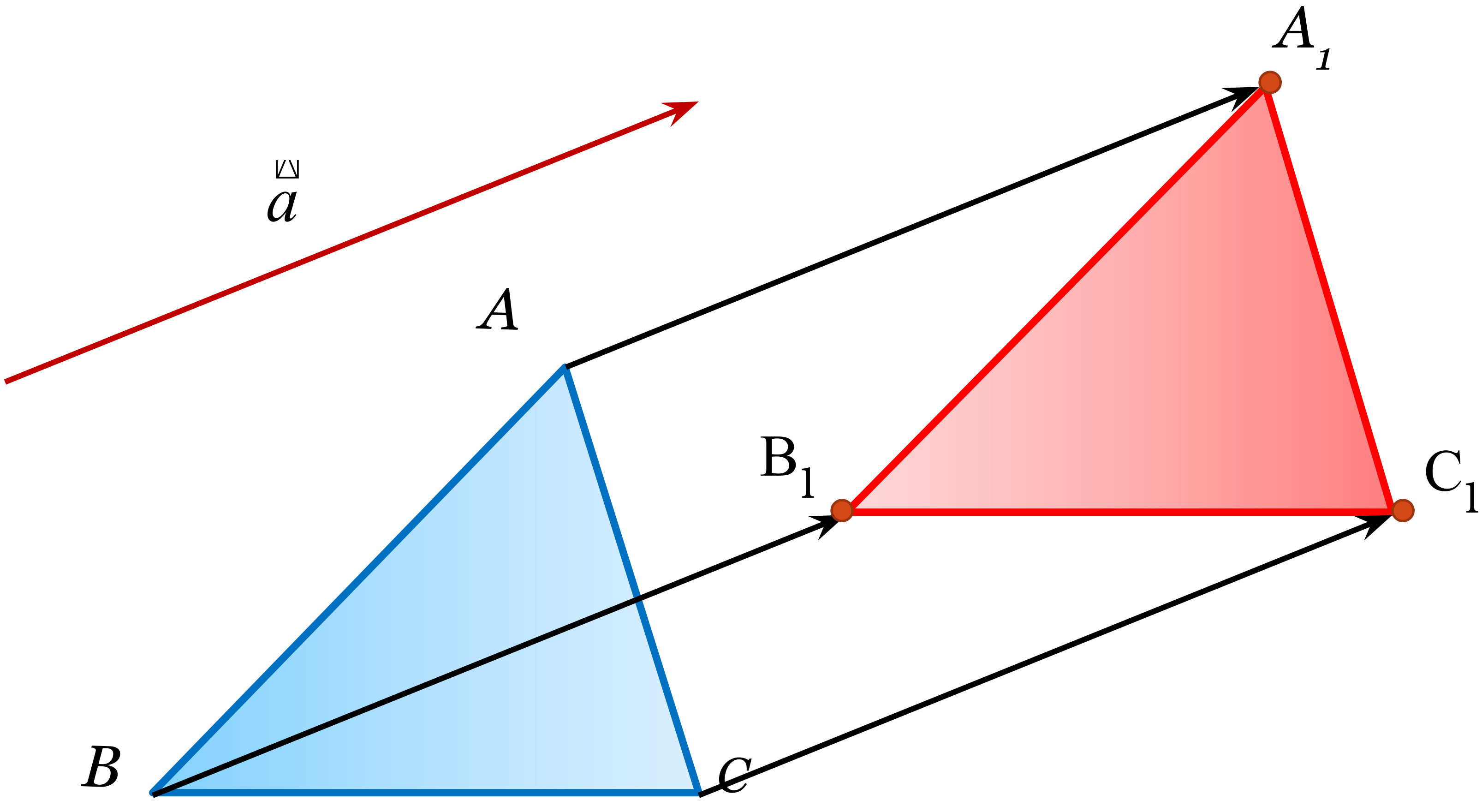
Параллельный перенос отрезка на данный вектор



$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$$

Параллельный перенос треугольника на данный вектор

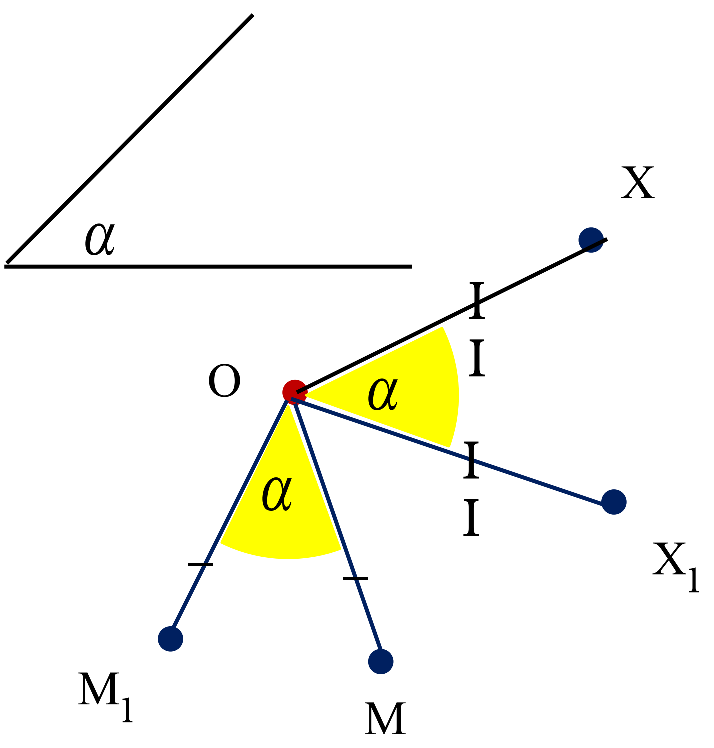


Поворот

Пусть даны точка О (центр поворота) и угол α (угол поворота). Поворотом плоскости вокруг точки О на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждой точке Х ставится в соответствие точка X_1 по следующему правилу:

$$\angle XOX_1 = \alpha$$

$$OX = OX_1$$



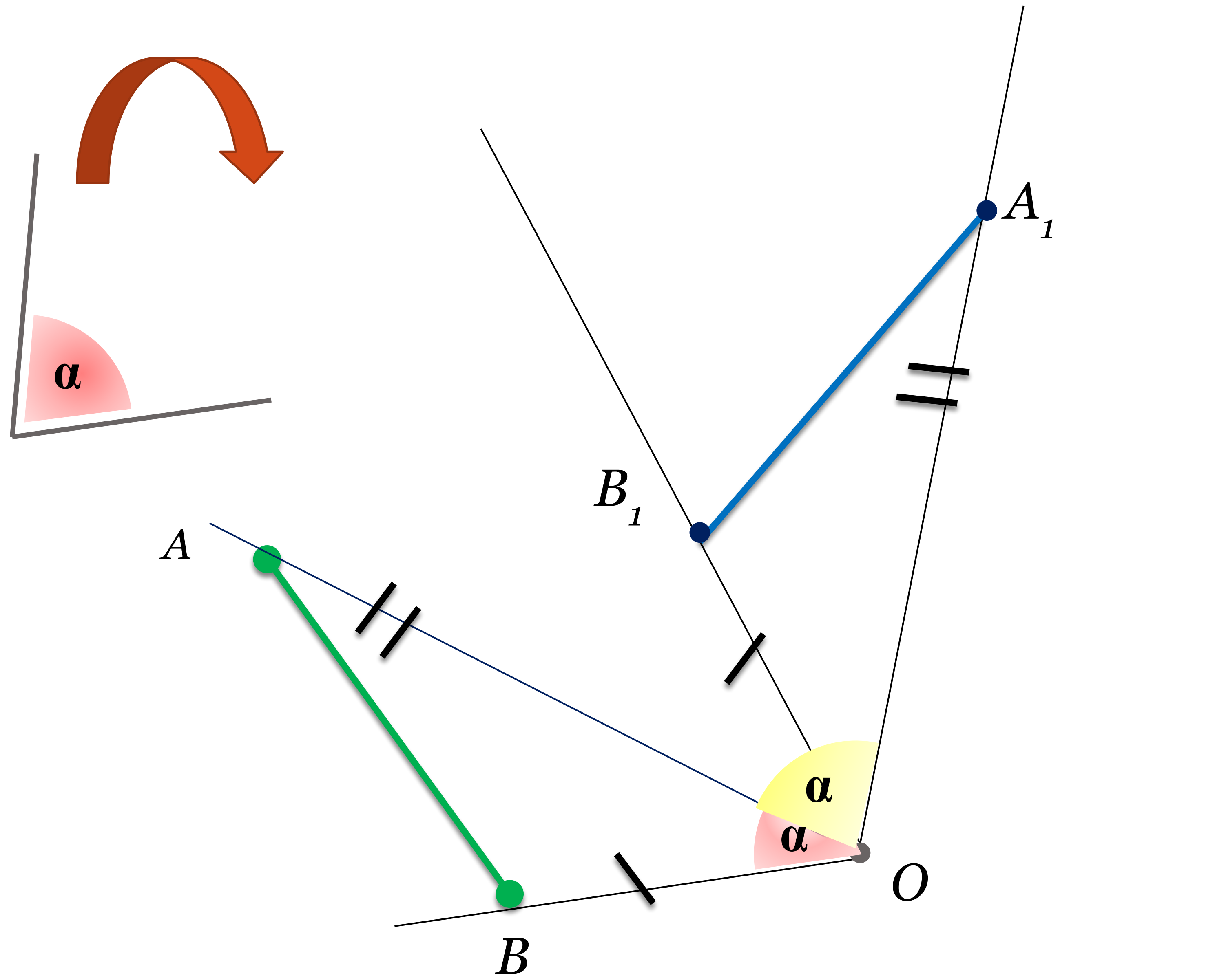
Как для точки М построить точку M_1?

Проведем отрезок ОМ

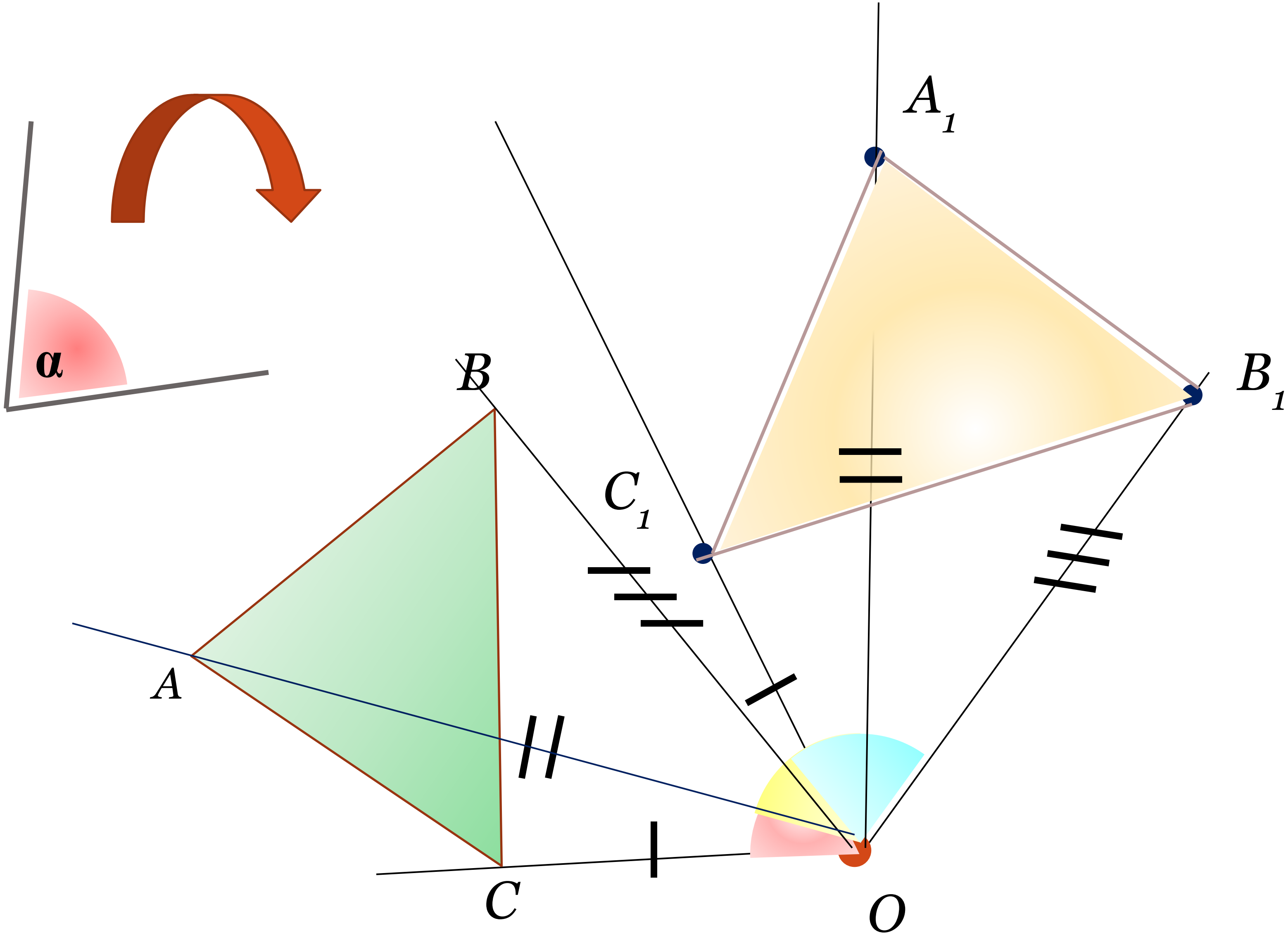
Отложим от отрезка ОМ угол, равный α (направление поворота задается условием задачи).

На второй стороне угла α отложим отрезок OM_1, равный отрезку ОМ.

Поворот отрезка на угол α

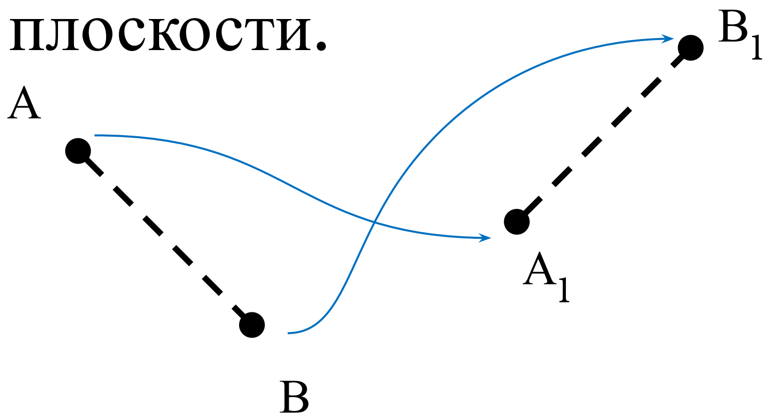


Поворот треугольника на угол α



Движение плоскости

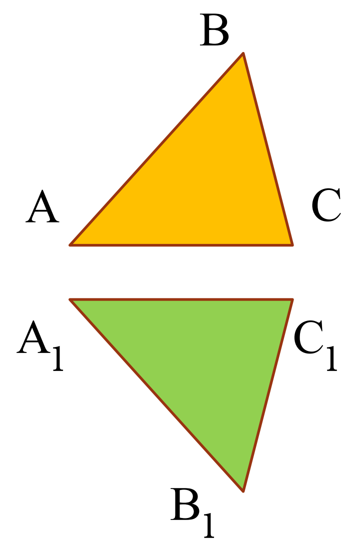
- Отображения плоскости на себя, которое сохраняет расстояние между точками, называется движением плоскости.

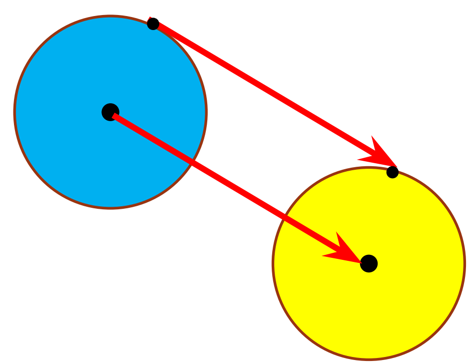


$A \to A_1$

$B \to B_1$

$AB = A_1B_1$





f - движение

$A \to A_1$

$B \to B_1$

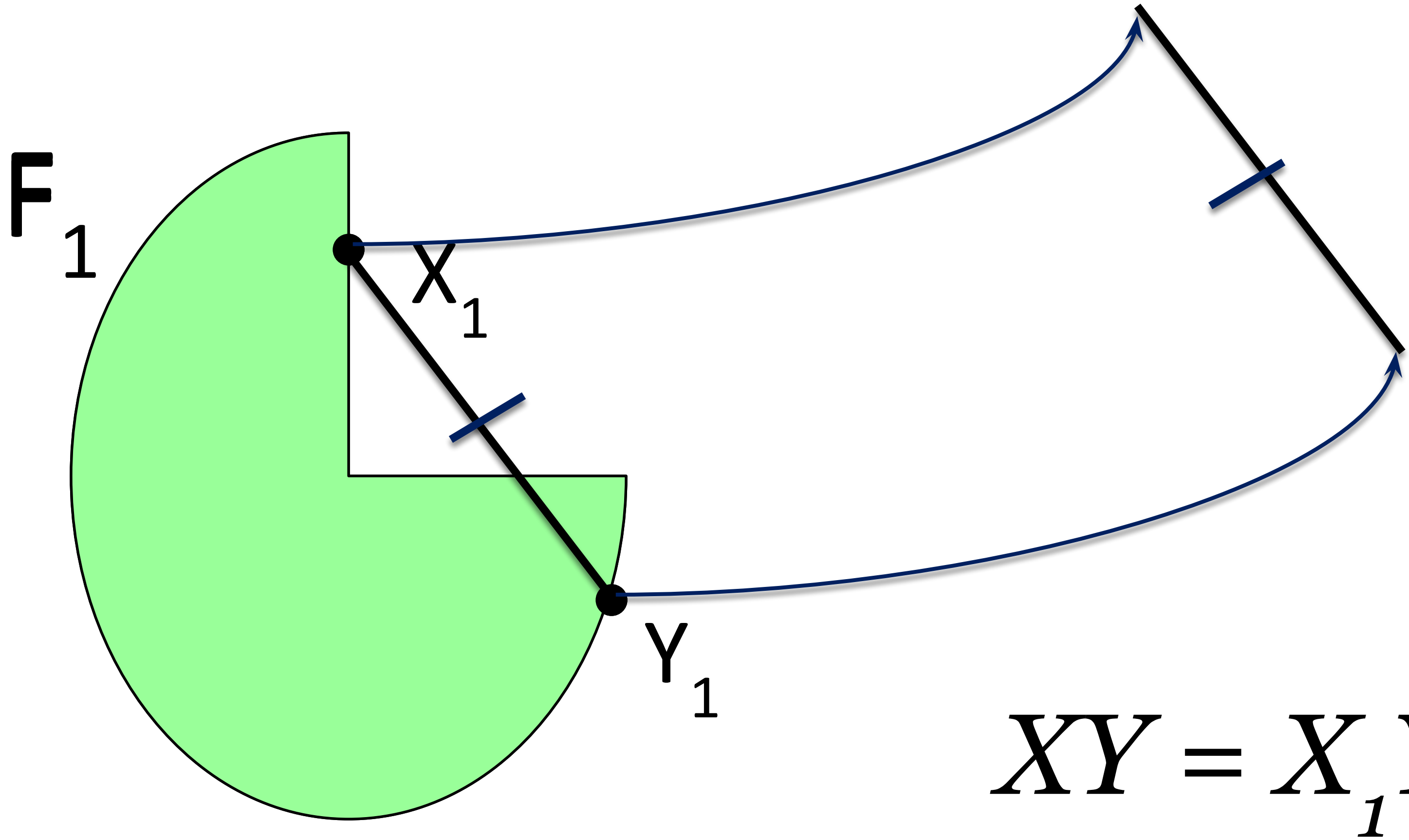
$C \to C_1$

$AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1$

$AC = A_1C_1$

Движение



$$XY = X_1Y_1$$

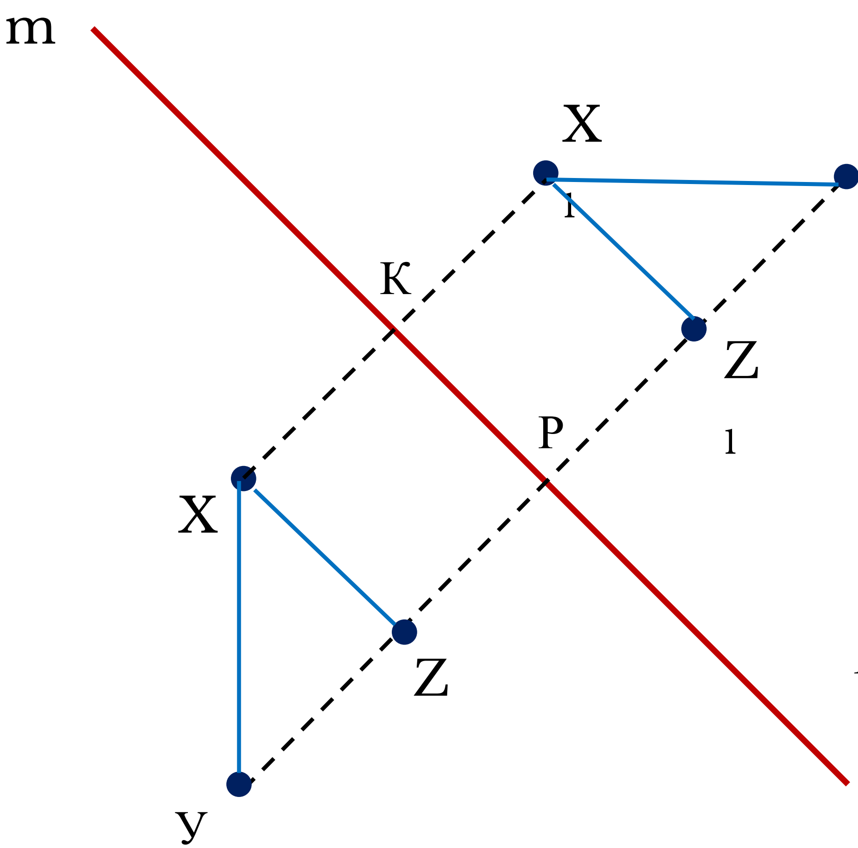
Теорема. Осевая симметрия - движение

Дано: f – осевая симметрия,
прямая m - ось симметрии

$X \to X_1$

$У \to У_1$

Доказать: $XУ = X_1У_1$

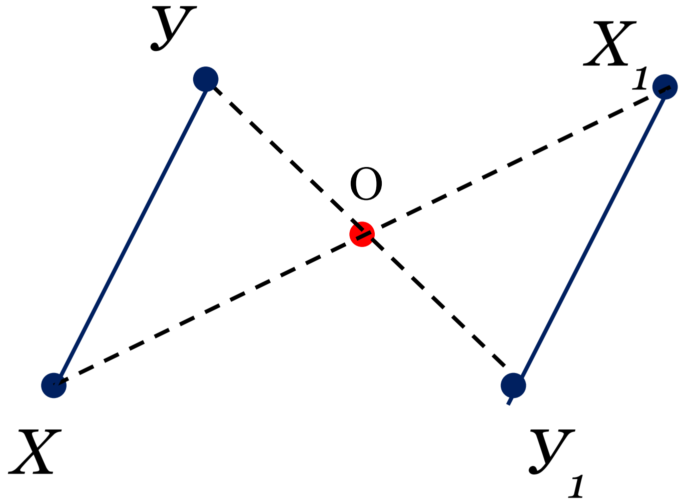


Проведем $XZ \perp УУ_1$ *и* $X_1Z_1 \perp УУ_1$

$$\begin{cases} XZ = X_1Z_1 \\ YZ = Y_1Z_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta XYZ = \Delta X_1Y_1Z_1$$

Из равенства $\Delta XYZ = \Delta X_1Y_1Z_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$

Теорема. Центральная симметрия - движение



Дано: f – *центральная симметрия,*
О - центр симметрии
$X \to X_1$
$У \to У_1$

Доказать: $XУ = X_1У_1$

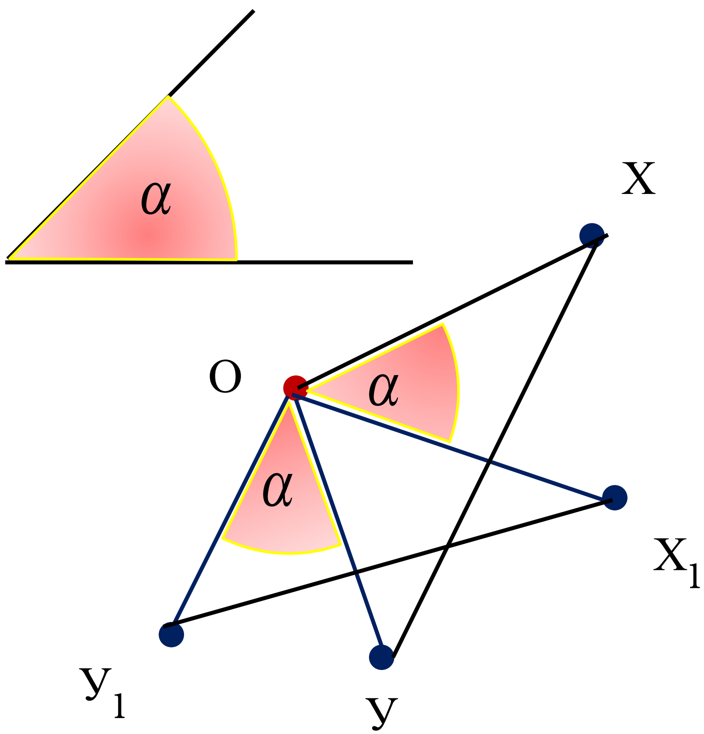
$$\Delta XУO = \Delta X_1У_1O \left(\textit{Почему?}\right) \Rightarrow XУ = X_1У_1$$

Поворот - движение

Дано: f – поворот вокруг точки О на угол α

Х → $Х_1$, У → $У_1$

Доказать: ХУ = $Х_1У_1$



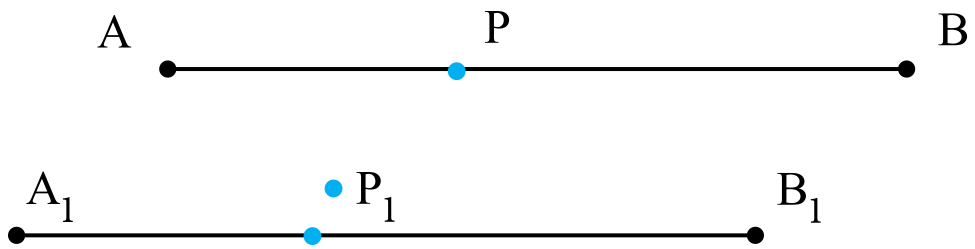
$$\Delta XOY = \Delta X_1OY_1 \quad (почему?)$$

$$\Downarrow$$

$$XY = X_1Y_1$$

Свойства движения

1. *При движении отрезок отображается на отрезок*



$f - \text{движение}$

$A \to A_1 \quad B \to B_1$

$P \in AB \quad P \to P_1$

$\text{Доказать}: \quad P_1 \in A_1B_1 \quad (A_1P_1 + P_1B_1 = A_1B_1)$

$f - \text{движение}$

$A \to A_1 \quad B \to B_1 \quad P \to P_1$

$AB = A_1B_1 \quad AP = A_1P_1 \quad PB = P_1B_1$

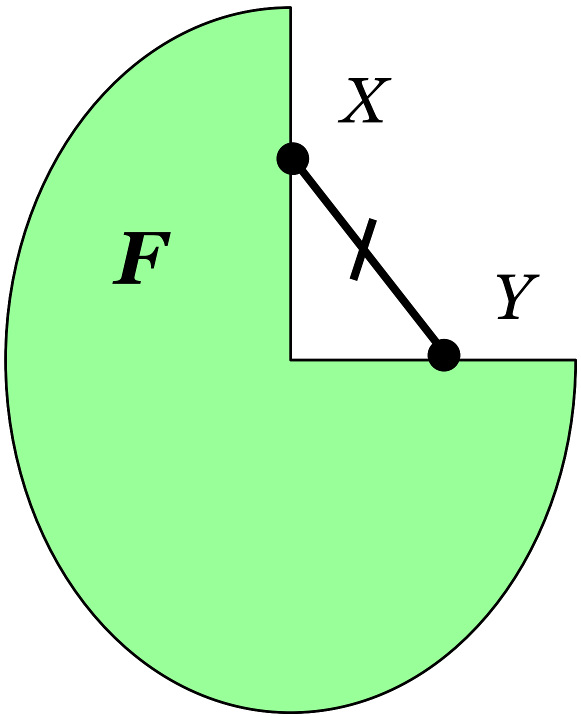
$P \in AB \to AP + PB = AB$

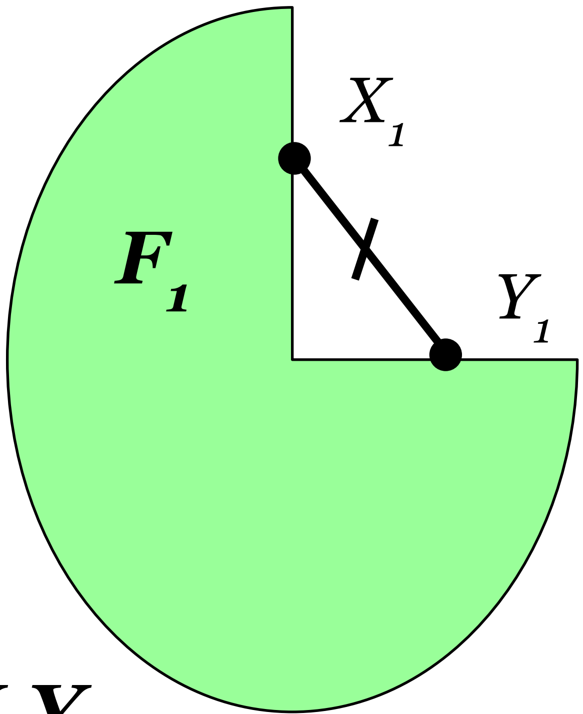
$A_1P_1 + P_1B_1 = AP + PB = AB = A_1B_1$

$\text{Получили}: \; A_1P_1 + P_1B_1 = A_1B_1 \Rightarrow P_1 \in A_1B_1$

НАЛОЖЕНИЯ И ДВИЖЕНИЯ

Фигура F равна фигуре F_1, если фигуру F можно совместить с фигурой F_1 наложением.





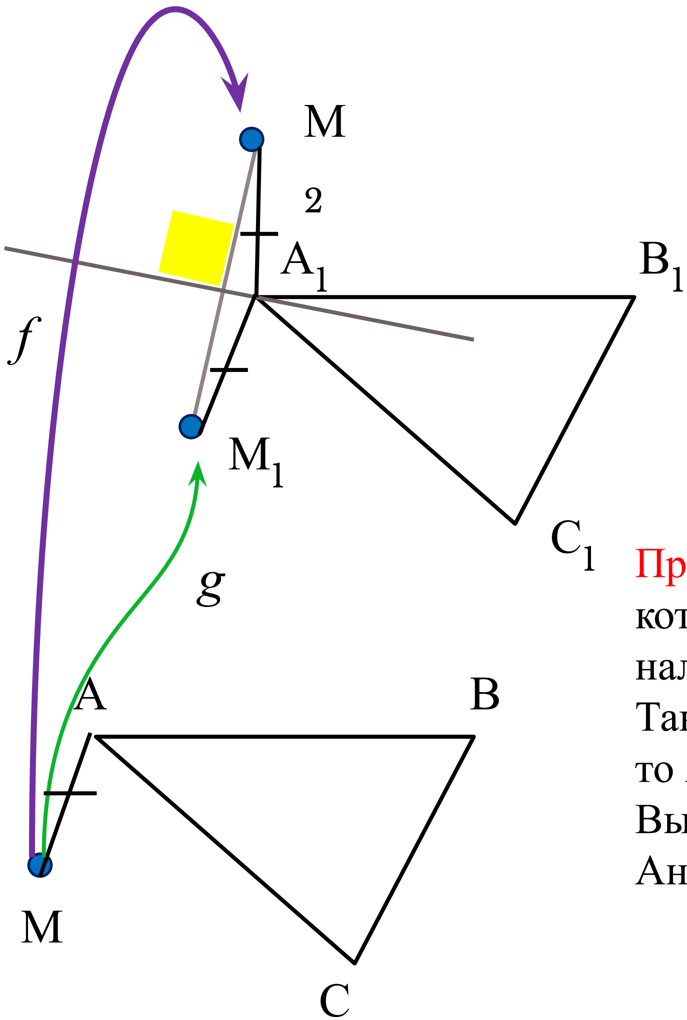
$$XY = X_1Y_1$$

Наложение – это отображение плоскости на себя.

При наложении отрезок отображается в равный себе отрезок.

Значит наложение – это движение.

Теорема. Любое движение является наложением



g – произвольное движение

$$\Delta ABC \xrightarrow{g} \Delta A_1B_1C_1$$

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

По определению равных треугольников существует наложение f , при котором точки A, B, C отображаются соответственно в точки A_1, B_1, C_1 .

Докажем, что движение g совпадает с наложением f.

Предположим противное. Тогда на плоскости найдется точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при наложении f – в точку M_2.
Так как при движении g и наложении f сохраняются расстояния, то $AM = A_1M_1$ и $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 = A_1M_2$
Вывод: Точка A_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 → $A_1 \in \ldots$
Аналогично: Точка B_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 → $B_1 \in \ldots$
Точка C_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 → $C_1 \in \ldots$

Получили, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2, что невозможно, так как вершины треугольника не лежат на одной прямой.
Вывод: наше предположение неверно. Следовательно, движение g совпадает с наложением f.