Математический анализ

ЛЕКЦИЯ № 8

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная

Пусть в окрестности т. x_0, включая x_0, задана функция $y=f(x)$. Дадим в т. x_0 аргументу x приращение Δx (положительное или отрицательное). Тогда $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то его называют производной функции $y=f(x)$ в т. x_0, или говорят, что $y=f(x)$ дифференцируема в т. x_0, и обозначают: y' $f'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, т.е.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

Если в (1) $\Delta x\to 0$ и $\Delta x>0$ $[\Delta x<0]$, то (1) называют правой - $f'_{пр}(x_0)$ [левой - $f'_{л}(x_0)$] производной в т. x_0. Очевидно, что если $\exists f'_{пр}(x_0)$, $f'_{л}(x_0)$ и $f'_{пр} = f'_{л}$, то $\exists f'(x_0)$.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $[a;b]$, если она имеет производную в каждой точке $(a;b)$, а на концах a и b существуют соответственно $f'_{пр}(a)$ и $f'_{л}(b)$.

Класс функций дифференцируемых в области D обозначается $C^1(D)$.

1.1 Интерпретации производной

а) **Механическая.** Пусть $S = S(t)$ - закон движения т. M. Рассмотрим движения т. M на промежутке от t до $t + \Delta t$. Тогда $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, а $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$,

то производная от пути по времени есть скорость движения т. M в момент времени t.

<u>Замечание.</u> Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый физический процесс, то производная $y' = f'(x)$ есть с к о р о с т ь п р о т е к а н и я этого процесса (физический смысл производной).

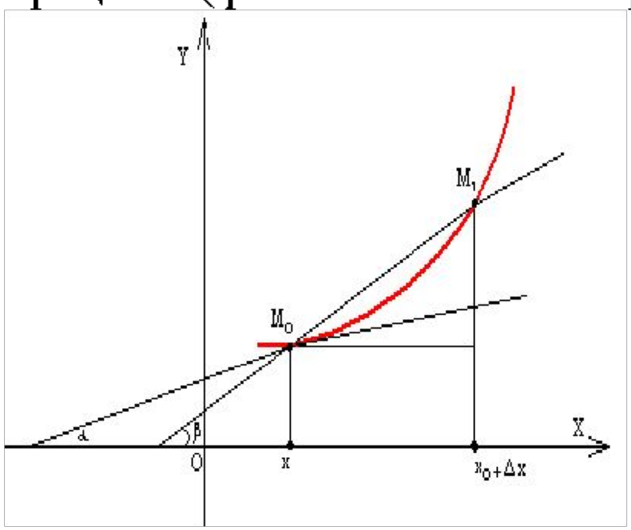

Рисунок 1

б) **Геометрическая.** На кривой $y = f(x)$ рассмо-трим точки $M_0[x_0; f(x_0)]$ и $M_1[x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$. Очевидно, что $M_0A = \Delta x$, $AM_1 = \Delta y$ и $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Будем двигать т. M_1 по кривой к т. M_0. Фиксируя ряд промежуточных положений т. M_1, получим секущих $\{M_0M_1\}$. Очевидно, что при $M_1 \to M_0$ $\Delta x \to 0$ (рис. 1).

Определение 3. Если существует предельное положение M_0T секущих M_0M_1 при неограниченном приближении т. M_1 по кривой к т. M_0 с любой стороны, то M_0T называется касательной к кривой $y = f(x)$ в т. x_0.

Если касательная существует, то

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следовательно, дифференцируемая в т. x_0 функция, имеет в этой точке касательную с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$.

У р а в н е н и е к а с а т е л ь н о й M_0T к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Прямая, проходящая через точку касания $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к касательной, называется н о р м а л ь ю к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

1.2 Правила дифференцирования

Теоремы.

1. Если $y = f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то она непрерывна в этой точке.

Действительно: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

2. Производная сложной функции. Если $x = \varphi(t)$ дифференцируема в т. t_0, а $y = f(x)$ - в т. $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $y = F(t) = f[\varphi(t)]$ дифференцируема в т. t_0 и $F'(t) = f'(x)\varphi'(t)$, или $y'_t = y'_x x'_t$

3. Правила дифференцирования. Пусть существуют $u'(x)$ и $v'(x)$, а C - const. Тогда

а) $C' = 0$. Действительно: $f(x) = C \Rightarrow \Delta f = 0 \Rightarrow C' = 0$.

б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

в) $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow (Cu)' = Cu'$.

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

§ 2. Методы дифференцирования

2.1 Табличное дифференцирование

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции от x, а c, a, α - константы. Тогда

1. $x_x{}' = 1$

2. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$

3. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

5. $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

6. $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

7. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

8. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

9. $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

10. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

11. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

12. $(\log u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u' \Rightarrow \left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$

2.2 Производная обратной функции

Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в т. y_0 имеет производную, отличную от нуля, то

$$f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

2.3 Дифференцирование неявной функции $F(x, y) = 0$

Для нахождения производной по x от неявной функции, необходимо дифференцировать обе части равенства, считая при этом, что y функция от x.

2.4 Дифференцирование функции, заданных параметрически

Пусть функция y от x задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1 .$$

Пусть $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию, которая, включая функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

§ 3. Дифференциал функции

Пусть $y = f(x) \in C^1[a;b]$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x .$$

Определение 4. Главная часть приращения функции Δy, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции и обозначается $dy = f'(x)\Delta x$, $f(x) \in C^1[a;b]$.

Пусть $y = x$. Тогда $dy = dx = \Delta x \Rightarrow dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Отметим следующие свойства дифференциала функции:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(u \cdot v) = udv + vdu$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
4. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ или $y = f[\varphi(x)]$. Тогда
   $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow dy = f'_u \varphi'_x dx \Rightarrow f'_u(u)du$ - свойство инвариантности формы дифференциала.

5. Так как при $f'(x) \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1,$$

то в приближенных вычислениях можно считать $\Delta y = dy$, или

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x) \qquad (2)$$

Пример. Вычислить $y = \sqrt{4{,}001}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$ и т. $x = 4$. За $x + \Delta x$ возьмем $4{,}001$.

Тогда $\Delta x = 0{,}001$, $f(4) = 2$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 0{,}25$. Тогда из (2)

$f(4{,}001) \approx 0{,}25 \cdot 0{,}001 + 2 = 2{,}0025$.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x) \in C^1[a;b]$. Если $z = f'(x) \in C^1[a;b]$, то z' называется второй производной от $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Т. е.

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' \quad \text{или} \quad y''(x) = \left[y'(x)\right]'$$

Определение 5. Производной от функции $y = f(x)$ n-го порядка называется производная от производной $n-1$-го порядка, т.е.

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Замечание. Если известен закон прямолинейного движения материальной точки в виде $S = S(t)$, тогда известно, что скорость $V = S'(t)$,

а ускорение движения $a = V'(t) = S''(t)$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad \text{где } t - \text{параметр.}$$

Известно, что первая производная находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

тогда производная второго порядка имеет вид

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}$$

Пусть $dy = f'(x) \in C^1[a;b]$. Тогда $d^2y = d(dy)$ называется дифференциалом второго порядка от $f(x)$. Отсюда

$$d^2y = d(dy) = \left[f'(x)dx\right]' dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Определение 6. Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $n-1$-го порядка, причем

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (3)$$

Из (3) следует

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad (4)$$