Відношення та їх властивості

Лекція 3

К.т.н., доцент
Л. А. Савицька

Факультет інформаційних технологій і компютерної інженерії
Кафедра обчислювальної техніки

Поняття відношення

- Теорія відношень реалізує у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами. Підмножина R $\supseteq A^n$ називається n-місним відношенням на множині A. Одномісне (одновимірне) відношення − це просто деяка підмножина A. Такі відношення називають ознаками. Властивості одномісних відношень − це властивості підмножин A, тому для випадку термін "відношення" вживається рідко. Найчастіше зустрічаються і добре вивченими є двомісні або *бінарні* відношення. Якщо a і b знаходяться у відношенні R, це зазвичай записується у вигляді aRb.

Поняття відношення

- Теорія відношень реалізує у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними множинами. Підмножина R $\supseteq A^n$ називається n-місним відношенням на множині A. Одномісне (одновимірне) відношення – це просто деяка підмножина A. Такі відношення називають ознаками. Властивості одномісних відношень – це властивості підмножин A, тому для випадку термін "відношення" вживається рідко. Найчастіше зустрічаються і добре вивченими є двомісні або *бінарні* відношення. Якщо a і b знаходяться у відношенні R, це зазвичай записується у вигляді aRb.

Кортеж

Кортеж – це послідовність елементів, в якій кожен елемент займає визначене місце: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Число елементів кортежу називають довжиною.

Кортеж довжиною 2 називають ***упорядкованою парою***.

Декартів добуток множин

Декартів добуток n множин $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ – це множина упорядкованих наборів з ***n*** елементів – $(x_1, x_2, …, x_n)$, в яких перший елемент належить множині X_1, другий – множині X_2, … , ***n***-й – множині X_n.

Декартів добуток $X \times X \times ... \times X$, в якому одна і та ж множина ***X*** множиться ***n*** раз сама на себе, називають ***декартовим степенем*** множини і позначають X^n.

Множина X^2 називається ***декартовим квадратом*** множини ***X***, множина X^3 – ***декартовим кубом*** множини ***X***.

n-арне відношення

n-арне відношення R на множинах X_1, X_2, …, X_n – це підмножина декартова добутку цих n множин : $R \subseteq X_1 \times X_2 \times, \ldots, \times X_n$. Якщо упорядкований набір елементів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ належить відношенню R, то стверджується, що елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знаходяться у відношенні R.

n-арне відношення

Приклад.

$A=\{a_1, a_2, a_3\}, B=\{b_1, b_2\}, C=\{c_1, c_2\}$.

$A\times B\times C=\{(a1, b1, c1), (a1, b1, c2), (a1, b2, c1), (a1, b2, c2),$
$(a2, b1, c1), (a2, b1, c2), (a2, b2, c1), (a2, b2, c2),$
$(a3, b1, c1), (a3, b1, c2), (a3, b2, c1), (a3, b2, c2)\}$.

$R\subseteq A\times B\times C$

$R_1 = \{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_3, b_1, c_1),$
$(a_3, b_1, c_2), (a_3, b_2, c_2)\}$

$R_2 = \{(a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_1, c_1)\}$.

$A\times B=\{(a1, b1), (a1, b2), (a2, b1), (a2, b2), (a3, b1), (a3, b2)\}$

$R\subseteq A\times B$

$R=\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$.

Бінарні відношення – це відношення між елементами множини X та елементами множини Y.

Приклад.

$X=\{2, 3\}$, $Y=\{3, 4, 5\}$.

$X \times Y= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R \subseteq X \times Y$

R_1 –"$X<Y$" $R_1= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$

R_2 –"$X \geq Y$" $R_2= \{(3,3)\}$

R_3 –"$X>Y$" $R_3= \{\varnothing\}$

Способи задання бінарних відношень

1. Будь-яке відношення може бути задано у вигляді списку, елементами якого є пари, що визначаються цим відношенням.

Приклад.

$A=\{2,3,5,7\}$;

$B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$

R—"бути дільником",

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

Способи задання бінарних відношень

2. Бінарне відношення може бути задане за допомогою матриці.

$R \subseteq X \times Y$

$|X|=n$, $|Y|=m$.

n – кількість рядків,

m – кількість стовбців.

Комірка (i,j) матриці відповідає парі (x_i,y_j) елементів, де $x_i \in X$, а $y_j \in Y$.

В комірку (i,j) заходить 1, якщо $(x_i,y_j) \in R$.

В комірку (i,j) заходить 0, якщо $(x_i,y_j) \notin R$.

Способи завдання бінарних відношень

Приклад.

A={2,3,5,7};

B={24,25,26};

R— “бути дільником”

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}

B / ***A***	24	25	26
2	1		1
3	1		
5		1	
7			

Способи задання бінарних відношень

3. Бінарне відношення ***R*** на множинах ***X*** та ***Y*** може быути задано ***графічно***.

Якщо пара ***(***x_i***,***y_j***)*** належить відношенню ***R***, з'єднуємо точки x_i, y_j лінією, що направлена від першого елемента до другого.

Напрям лінії, що з'єднує пари точок, називають ***дугами***, а точки, визначаючі елементи множин – ***вершинами*** графа.

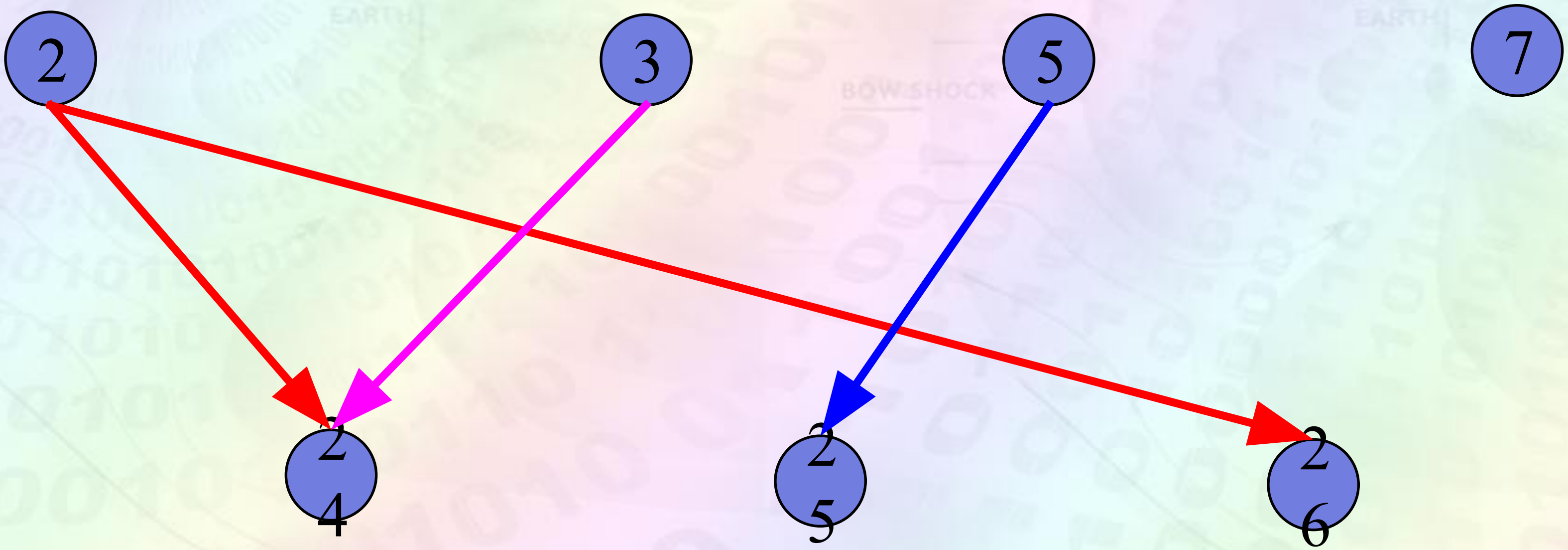
Способи задання бінарних відношень

***Приклад*.**

A={2,3, 5, 7}; ***B={24,25,26}.***

R — "бути дільником";

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}.



Граф ***G*** відношення ***R***

Окремі випадки відношень

R – бінарне відношення на множині ***A***: $R \subseteq A^2$.

$R=A^2$ –***повне*** відношення.

$R=\varnothing$ –***пусте*** відношення.

якщо відношення має всі можливі пари виду ***(a, a)*** и не содержит інших пар елементів, то таке відношення називається ***тотожнім*** (***R=E***).

Властивості бінарних відношень

1. Рефлексивність.

Відношення ***R*** на множині ***X*** називається ***рефлексивним***, якщо для будь-якого $x \in X$ де має місце ***xRx***, тбто, кожен елемент $x \in X$ знаходиться в відношенні ***R*** до самого себе.

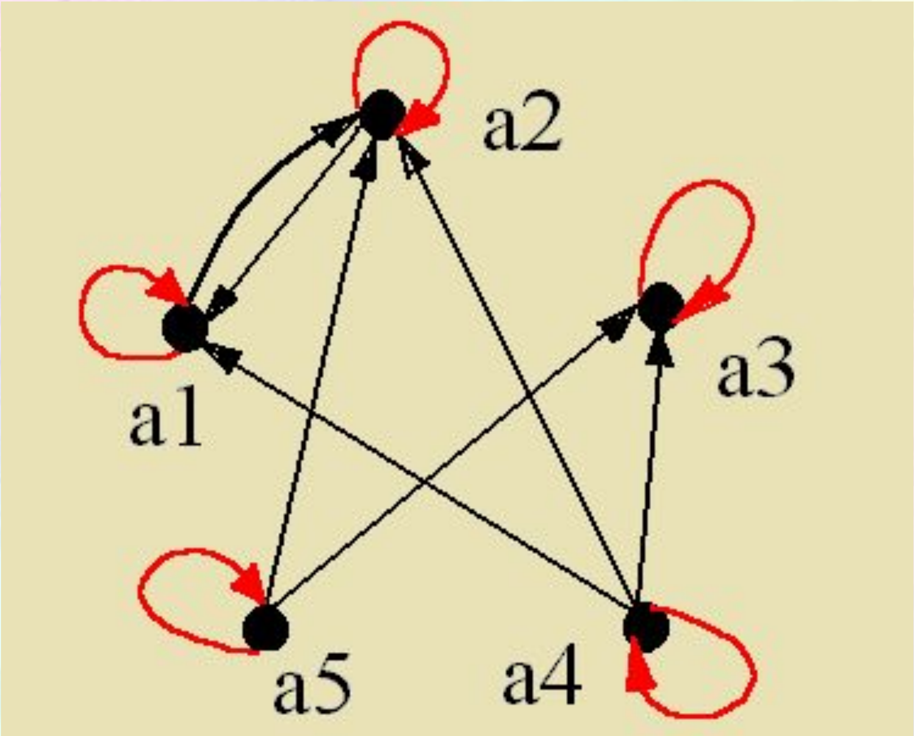
Всі діагональні елементи матриці дорівнюють 1; при завланні відношення графом кожен елемент має петлю – дугу ***(x, x)***.

Приклад.

R_1 — "≤" на множині вещественных чисел,

R_2 — "мати спільний дільник" на множині цілих чисел.

Властивості бінарних відношень



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Властивості бінарних відношень

2. Антирефлексивность.

відношення ***R*** на множині ***X*** називається ***антирефлексивным***, якщо из x_1Rx_2 следует, что $x_1 \neq x_2$.

Всі діагональні елементи є нульовими; при завданні відношення графом жодний елементу не має петлі – нема дуг виду ***(x,x)***.

Приклад.

R_1 — "<" на множині дійсних чисел,

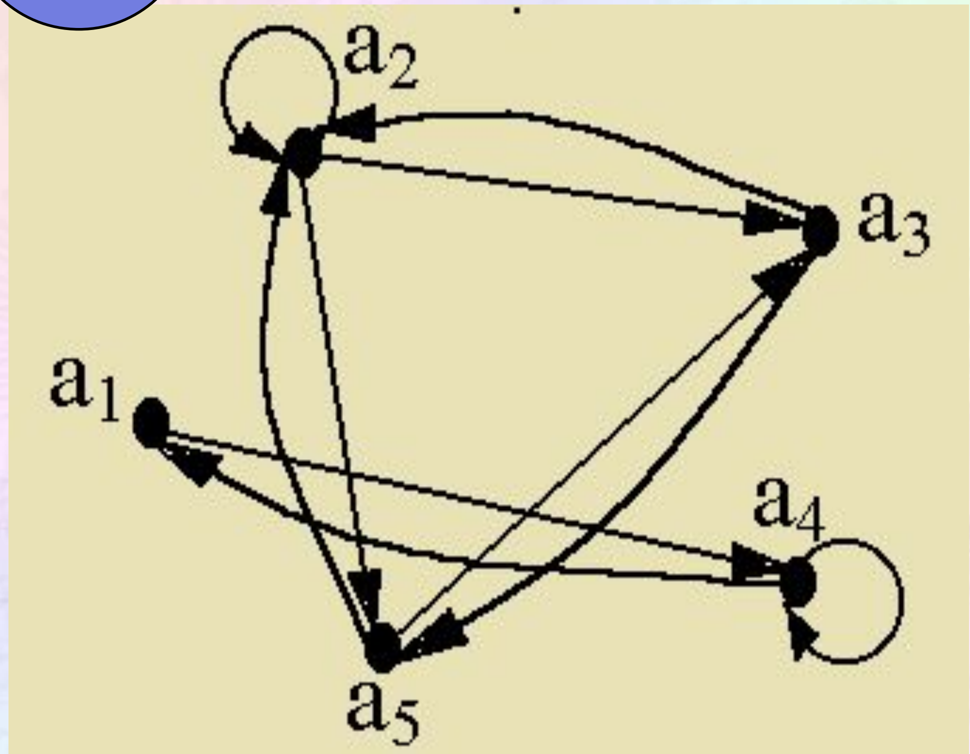
R_2 — "бути сином" на множині людей.

3. Симметричность.

Відношення R на множині X називається ***симетричным***, якщо для пари $(x_1,x_2)\in X^2$ з x_1Rx_2 випливає x_2Rx_1 (т.б., для будь-якої пари R виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі).

Матриця симетричного відношення є симетричною щодо головної діагоналі, а в графі, що задає, для кожної дуги з x_i в x_k існує протилежно спрямована дуга з x_k в x_i.

Граф і матриця симетричного відношення.



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1				
a_5		1	1		

Приклад.

R_1 — “=” на множині дійсних чисел,

R_2 — “бути родичем” на множині людей.

Демонстрація

4. Асиметричность.

Відношення ***R*** називається ***асиметричним***, якщо для пари $(x_1,x_2) \in X^2$ из x_1Rx_2 випливає, що не виконується x_2Rx_1 (т.б., для будь-якої пари ***R*** виконується в один бік, або не виконується зовсім).

Приклад.

R_1 — “>” на множині дійсних чисел,

R_2 — “бути сином” на множині людей.

5. Антисиметричность.

Відношення R називається ***антисиметричним***, якщо з x_1Rx_2 та x_2Rx_1 випливає, що $x_1=x_2$.

Приклад.

R_1 — "$\leq$" на дійсній вісі .

R_2 — "бути дільником"– на множині дійсних чисел.

6. *Транзитивність.*

Відношення ***R*** називається ***транзитивним***, якщо для будь-яких x_1,x_2,x_3 з x_1Rx_2 и x_2Rx_3 випливає x_1Rx_3.

У графі, що задає транзитивне відношення ***R***, для кожної пари дуг таких, що кінець першої збігається з початком другої, існує третя дуга, що має загальний початок з першої і спільний кінець з другої.

Приклад.

R — "$\le$" і "$<$" на множині дійсних чисел – транзитивны.

7. *Антитранзитивність*.

Відношення ***R*** називається ***антитранзитивным***, якщо для будь-яких x_1, x_2, x_3 з $x_1 R x_2$ и $x_2 R x_3$ випливає, що $x_1 R x_3$ не виконується.

***Приклад*.**

R_1 — “перетинається з” на множині відрізків,

R_2 — “бути батьком” на множині людей.

Операції над відношеннями

Так як відношення – це множина, то над відношеннями виконуються всі теоретико–множині операції.

Приклад.

$A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$

$R_1=\{(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)\}$, $R_2=\{(a,2),(a,3)\}$

$R_1\cap R_2=\{(a,3)\}$

$R_1\cup R_2=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,2),(c,3)\}$

$R_1\setminus R_2=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

□$R_1=\{(a,2),(b,1),(b,3),(c,1),(c,2)\}$

$$\underbrace{(A\times B)\cap C}_{X}=\underbrace{(A\cap C)\times(B\cap C)}_{Y}$$

$$X=Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{array}\right.$$

Нехай $x\in X \Rightarrow x\in (A\times B)\cap C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A\times B \\ x\in C \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ (a,b)\in C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ b\in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a\in C \\ b\in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A\cap C \\ b\in B\cap C \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b)\in(A\cap C)\times(B\cap C)$$

Аналітичне доведення тотожностей

$$\underbrace{(A\times B)\cap C}_{X}=\underbrace{(A\cap C)\times(B\cap C)}_{Y}$$

$$X=Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{array}\right.$$

Нехай $(a,b)\in Y \Rightarrow (a,b)\in (A\cap C)\times(B\cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A\cap C \\ b\in B\cap C \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ a\in C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b\in B \\ b\in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ a\in C \\ b\in C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ (a,b)\in C \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\in (A\times B)\cap C$

$\left[\begin{array}{l} (A\times B)\cap C \subseteq (A\cap C)\times(B\cap C) \\ (A\cap C)\times(B\cap C) \subseteq (A\times B)\cap C \end{array}\right. \Rightarrow (A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$

Обернене відношення

Нехай R – бінарне відношення.

Обернене відношення до R позначається R^{-1}.

Впорядкована пара (y,x) належить R^{-1} тоді і тільки тоді, коли (x,y) належить R.

якщо $R \subseteq X^2$, то $R^{-1} \subseteq X^2$, де X – де-яка множина.

якщо бінарное відношення задано на двух множинах X і Y – $R \subseteq X \times Y$, то $R^{-1} \subseteq Y \times X$.

Обернене відношення

Приклад.

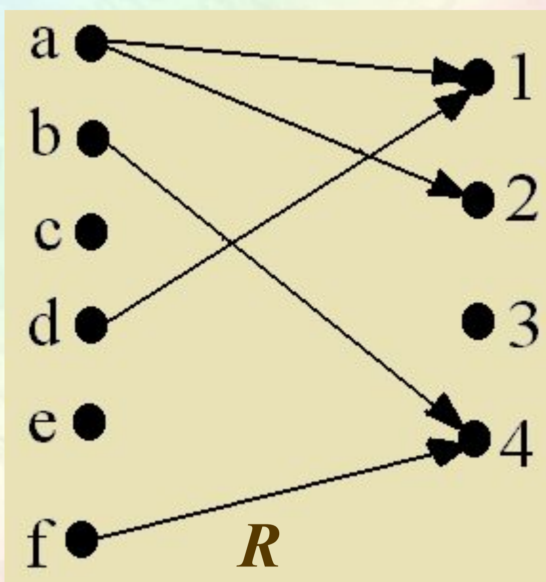
$A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $B=\{1,2,3,4\}$

$R\subseteq A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),$
$(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(e,1),(e,2),(e,3),(e,4),(f,1),(f,2),(f,3),(f,4)\}$;

$R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$;

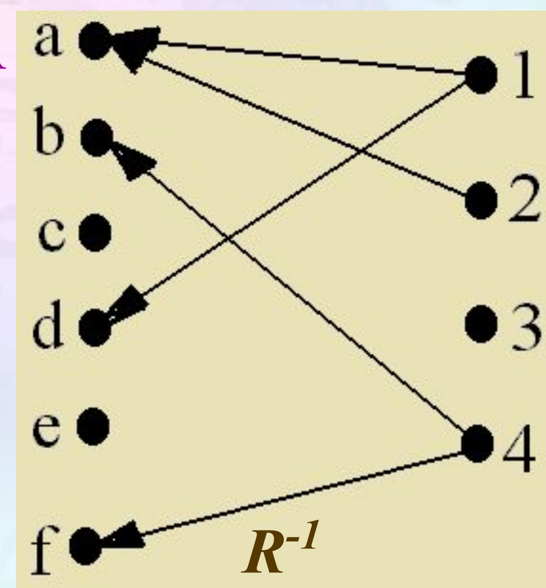
$R^{-1}=\{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$.

A



B

A



B

Композиція відношень

Нехай R і S – відношення,

$R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, где X, Y, Z – некоторые множества.

Композицією відношень R та S називається відношення, що складається з упорядкованих пар (x,z), $x \in X$, $z \in Z$, для яких існує елемент $y \in Y$ такий, що виконуються умови $(x,y) \in R$, $(y,z) \in S$.

Композиція відношень R і S

позначається $S \circ R$.

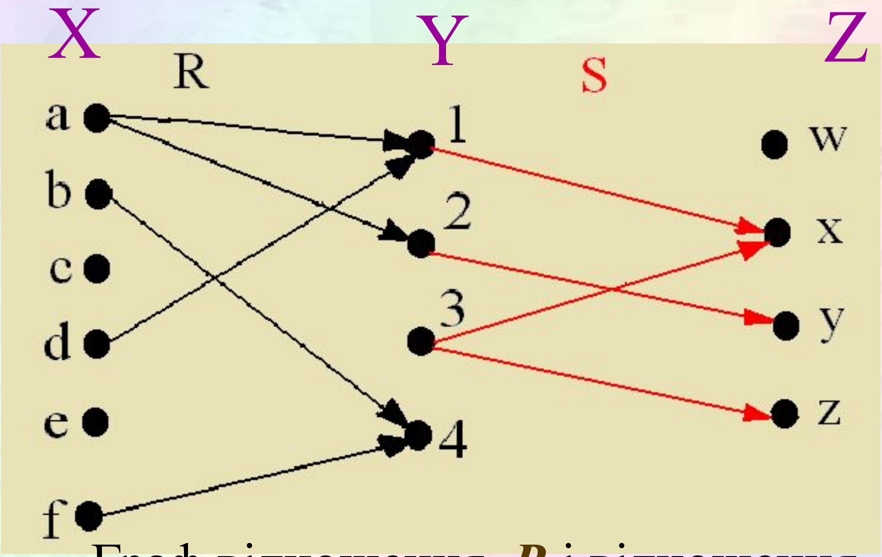
Композиція відношень

Приклад.

$X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $Z=\{w,x,y,z\}$.

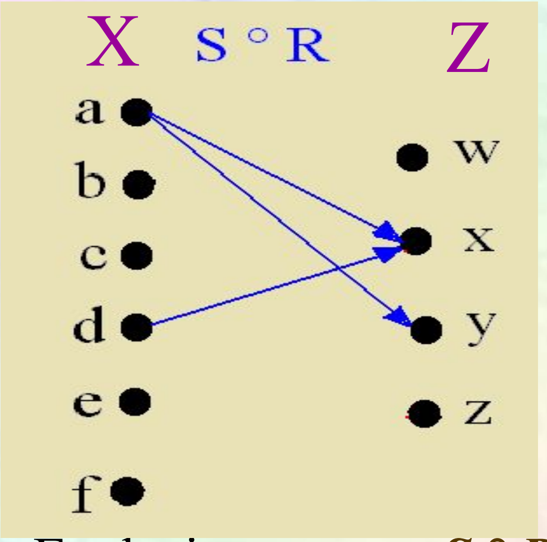
$R \subseteq X\times Y$ $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$,

$S \subseteq Y\times Z$ $S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$.



Граф відношення ***R*** і відношення

$S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$



Граф відношення $S \circ R$

$S \circ R = \{(a,x),(a,y),(d,x)\}$

Відношення еквівалентності

Бінарне відношення називається ***відношенням еквівалентності*** (позначається ~), якщо воно

1) рефлексивно;

2) симетрично;

3) транзитивно.

Приклад.

R_1 — “=” на будь-якій множині.

R_2 — “вчитися в одній групі” на множині студентів університету.

Відношення порядку

Бінарне відношення називається ***відношенням часткового порядку*** (позначається $\leq$), якщо воно

1) рефлексивно;

2) антисиметрично;

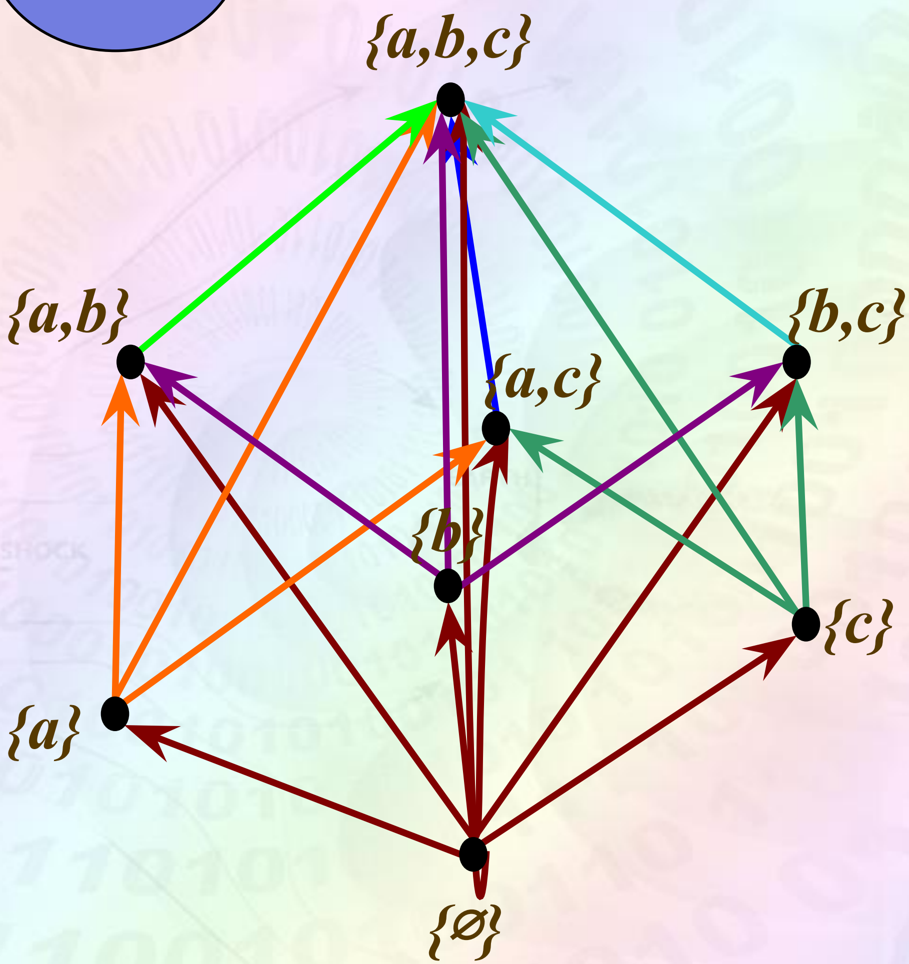
3) транзитивно.

Приклад.

R_1 — “являється нестрогим включенням”, задане на системі множин.

якщо на множині задано відношення часткового порядку, то ця множина називається ***частково упорядкованою.***

Відношення порядку. Відношення включення множин



Граф відношення включення множин

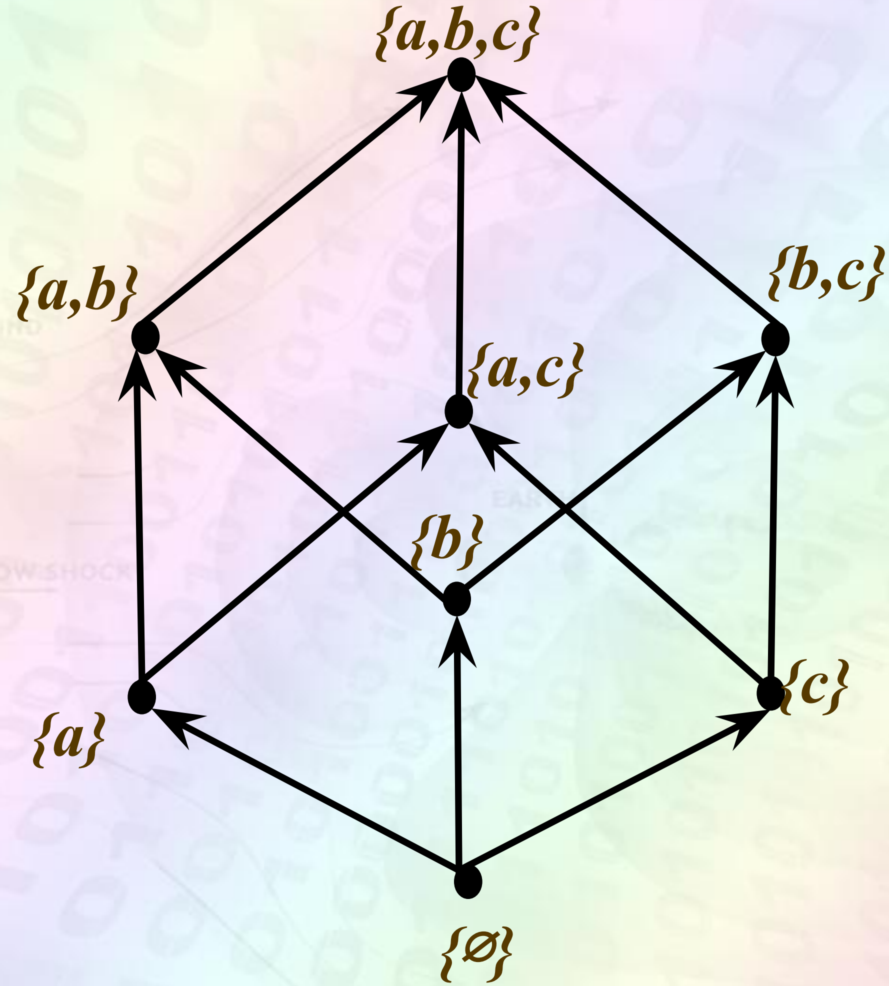


Диаграмма Хассе відношення частково упорядкованої множини

Відношення порядку

Елементи ***a*** і ***b*** називаються ***порівнювальними*** в відношенні часткового порядку ***R***, якщо выполняется хотя б одне з співвідношень ***aRb*** или ***bRa***.

Множина ***A***, на якій задано відношення часткового порядку ***R*** та для якого для будь-яких двох елементів цієї множини виконується умова ***a*** $\leq$ ***b*** або ***b*** $\leq$, ***a*** називається ***лінійно впорядкованою*** або ***повністю впорядкованою.***

Відношення порядку

Відношення часткового порядку також називається ***відношенням нестрогого порядку***.

На відміну від нього ***відношення строгого порядку*** (позначається <):

1) антирефлексивно (якщо $a<b$, то $a \neq b$)

2) асиметрично (якщо $a<b$ то не верно $b<a$)

3) транзитивно (якщо $a<b$ и $b<c$, то $a<c$).

Приклад.

R_1 — “>” на будь-якій множині.

R_2 — “жити в одному місті” на множині жителів району.

Відношення толерантностиі

Відношення називається ***відношенням толерантности***, якщо воно:

1) рефлексивно;
2) симметрично;
3) антитранзитивно.

Приклад.

$\boldsymbol{A=\{1,2,3,4\};}$

$\boldsymbol{R \subseteq A^2;}$

$\boldsymbol{R=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}}$

Використання властивостей бінарних відношень

$A=\{1,2,3,4\};$
$R_1 \subseteq A^2;$
$R_2 \subseteq A^2.$

$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\};$

$R_2=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$

	R_1	R_2
Рефлексивність	+	-
Антирефлексивність	-	+
Симетричність	-	-
Асимметричність	-	+
Антисимметричність	-	-
Транзитивність	+	+
Антитранзитивність	-	-
Эквівалентності	-	-
Толерантності	-	-
Часткового порядку	-	-
Строгого порядку	-	+