Презентация на тему: «Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл»

Вопросы:

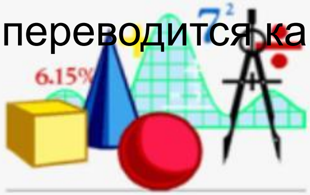
1. История возникновения производной функции.
2. Понятие производной.
3. Геометрический смысл производной.
4. Физический (механический) смысл производной.

1. История возникновения производной функции

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется ***дифференциальным исчислением***. Приращения вида Δf, представляющие собой разности, играют заметную роль при работе с производными. Естественно поэтому появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculis differentialis* нового исчисления, которое переводится как исчисление разностей; это название появилось уже в конце 17в., т.е. при рождении нового метода.

Термин «**производная**» является буквальным переводом на русский французского слова *derivee*, которое ввёл в **1797г. Ж.Лагранж**, он же ввёл современные обозначения **y' , f'.** Такое название отражает смысл понятия: функция f'(x) происходит из f(x), является производным от f(x). **И.Ньютон** называл производную функцию **флюксией**, а саму функцию – **флюентой**. **Г.Лейбниц** говорил о дифференциальном отношении и ввёл обозначение производной **df/dx**.

Слово «э**кстремум**» происходит от латинского extremum (крайний). Maximum переводится как наибольший, а minimum – наименьший.

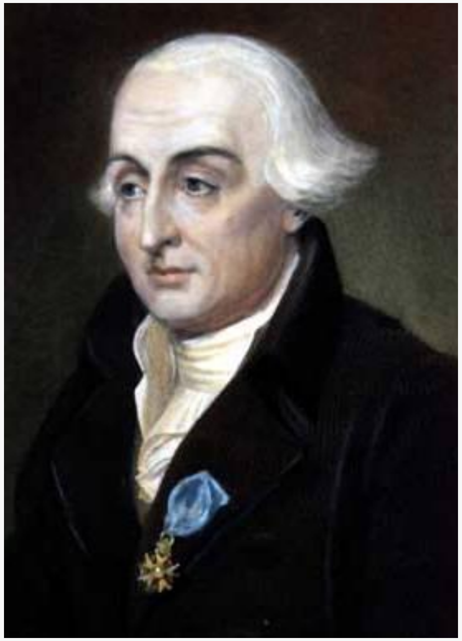


Жозеф Луи Лагранж

«– величественная пирамида математических наук»

Наполеон I Бонапарт

- **Рано изучил сочинения Евклида и Архимеда, Галлея (друга Ньютона).**
- **В 16 лет стал преподавать математику в Артиллерийском училище в Турине.**
- **В 19 лет стал профессором математических наук.**
- **В 23 года стал академиком и иностранным членом Берлинской академии наук.**
- **Автор трудов по вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям.**
- **Его работы по математике, астрономии и механике составляют 14 томов.**
- **Император Франции сделал учёного сенатором, графом империи и командором ордена Почетного легиона.**



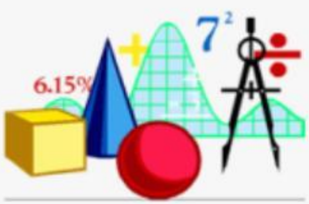
1736 - 1813

Выдающийся французский математик, ввел термин «ПРОИЗВОДНАЯ» и её современное обозначение.

Александр Поуп

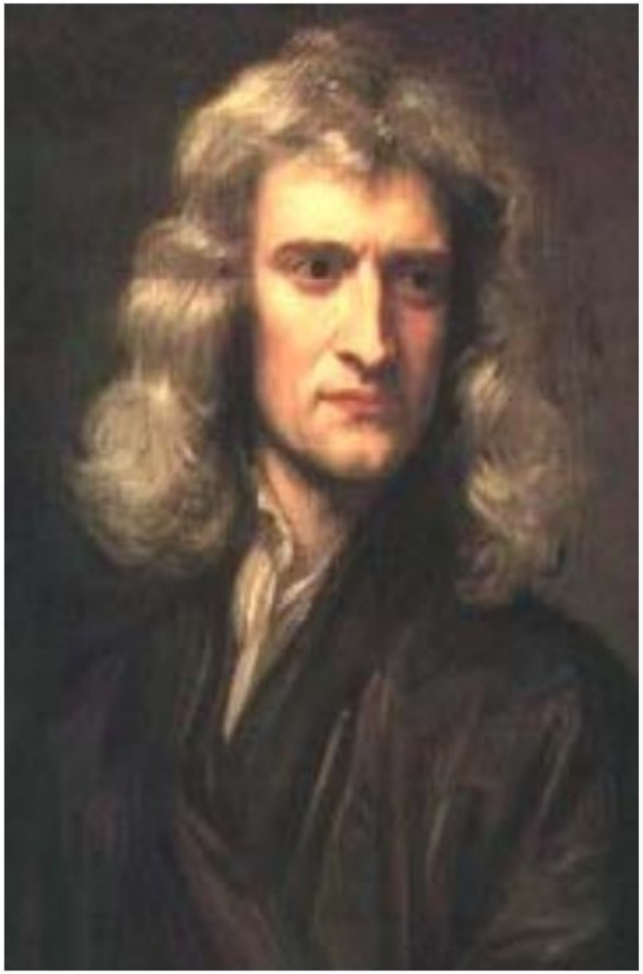
(1688—1744 гг.).

Был этот мир глубокой
тьмой окутан.
Да будет свет!
И вот явился Ньютон.



Ньютон Исаак (1643-1727) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (с 1672) и его президент (с 1703).

Им начато построение математического анализа на основе учения о пределе, подготовлены основы для дифференциального и интегрального исчисления. В физике обосновал справедливость закона всемирного тяготения, законы движения, теорию света и др.



Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716) – немецкий философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк, экономист, дипломат, языковед, член Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук, основатель Берлинской Академии наук.

В 18 лет защитил магистерскую диссертацию по философии, в 20 лет стал доктором права.

Является одним из создателей математического анализа, алгебры определителей, дифференциального и интегрального исчислений.

2. Понятие производной

Пусть **x** - произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки **x_0** (окрестность точки x_0 - это интервал (а; б), $x_0 \in$ (а; б)).

Разность **$x-x_0$** называется ***приращением аргумента***: **$\Delta x = x - x_0$**. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

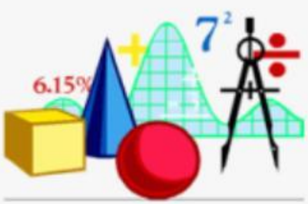
Разность **$f(x)-f(x_0)$** называется ***приращением функции***: **$\Delta f = f(x) - f(x_0)$** или **$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.**

Отсюда, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

2. Понятие производной

Производной функции *y=f(x)* в точке **x_0** называется предел отношения приращения функции **Δf** к приращению аргумента **Δx**, стремящегося к «нулю»:

$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

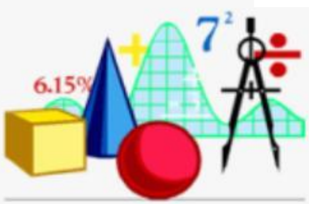


$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Понятие производной

Четыре обозначения для производной:

y'	Лагранжа (читается «игрек штрих»)
$\dfrac{dy}{dx}$	Лейбница (читается «дэ игрек по дэ икс»)
$\dot{y}$	Ньютона (читается «игрек с точкой»)
Dy	Коши (читается «дэ игрек»)



2. Понятие производной

Нахождение производной называется **дифференцированием** этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функцию называют **дифференцируемой в этой точке**.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

2. Понятие производной

Правило нахождения производной функции $y=f(x)$ в точке x_0:

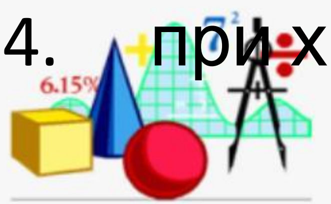
1. Найти значение функции в точке $x_0+\Delta x$: $f(x_0+\Delta x)$
2. Найти приращение функции: $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
3. Найти отношение приращения функции к приращени $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
4. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Понятие производной

Пример: Дана функция $y=x^2$. Найти её производную в произвольной точке и в точке $x=3$.

Решение:

1. $f(x_0+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$;
2. $\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$;
3. $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$, т.е. $y'=(x^2)'=2x$;
4. при $x=3$ получим $y'(3)=2*3=6$.



Ответ: $y'=2x$; $y'(3)=6$

Пример: Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $y=\frac{3x-1}{2x+5}$.

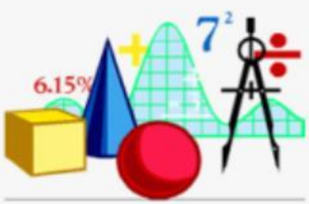
Решение: Дадим *x* приращение Δ*x*, тогда *y* получит приращение Δ*y*:

$$\Delta y=\frac{3(x+\Delta x)-1}{2(x+\Delta x)+5}-\frac{3x-1}{2x+5}=\frac{(3x+3\Delta x-1)(2x+5)-(3x-1)(2x+2\Delta x+5)}{(2(x+\Delta x)+5)(2x+5)}=$$

$$=\frac{17\Delta x}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}.$$

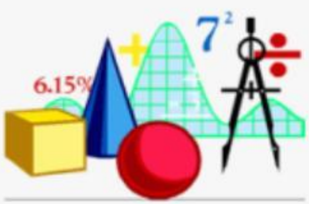
Так как $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{17\Delta x}{\Delta x(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}=\frac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)},$

то $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}=\frac{17}{(2x+5)^2}.$



Ответ: $y'=\frac{17}{(2x+5)^2}.$

Электронная физминутка для глаз




6.15%
7

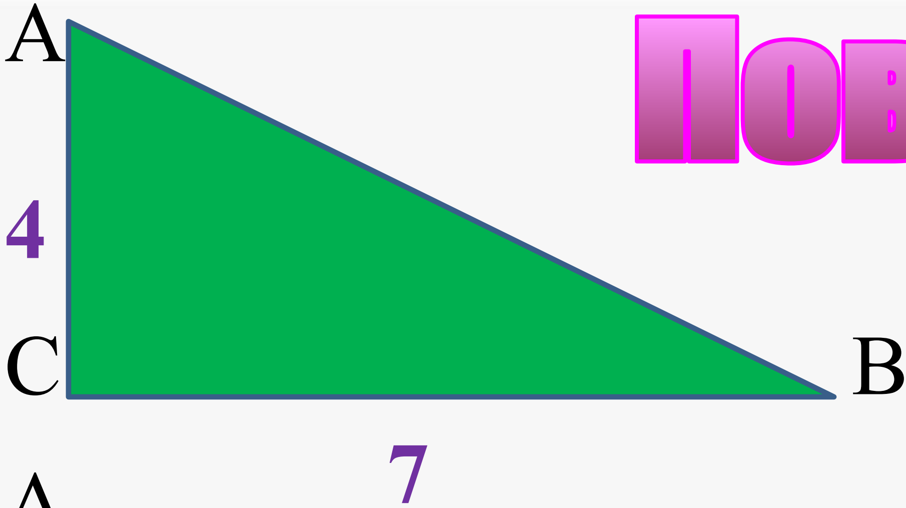
3. Геометрический смысл производной.

Это кто?

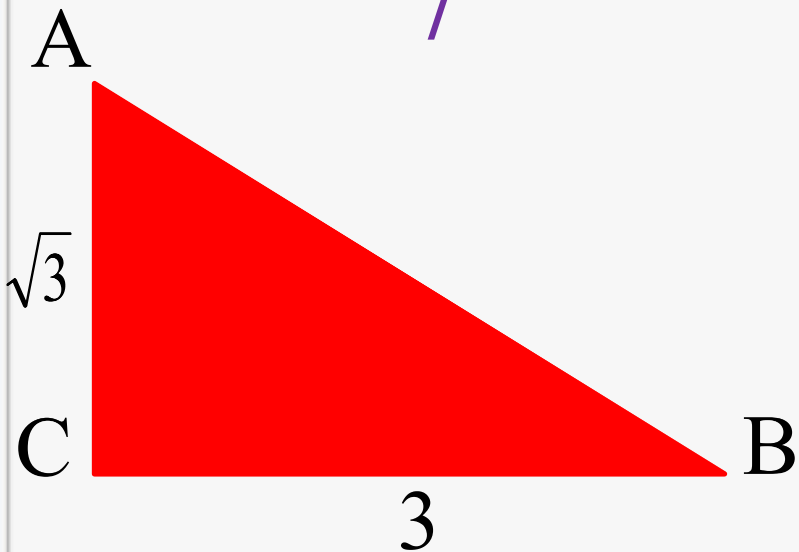
Лейбниц Г.В.

«Если продолжить одно из маленьких звеньев ломаной, составляющей кривую линию, то эта продолженная таким образом сторона будет называться ***касательной к кривой***»

Повторение



tg A-? Tg A=3/√3



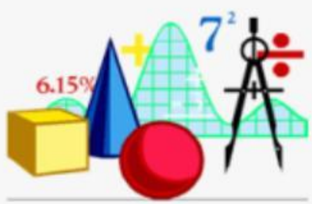
tg B -? Tg B=√3/3

Вычислите tgα, если α = 135°, 120°, 150°.

α=-1

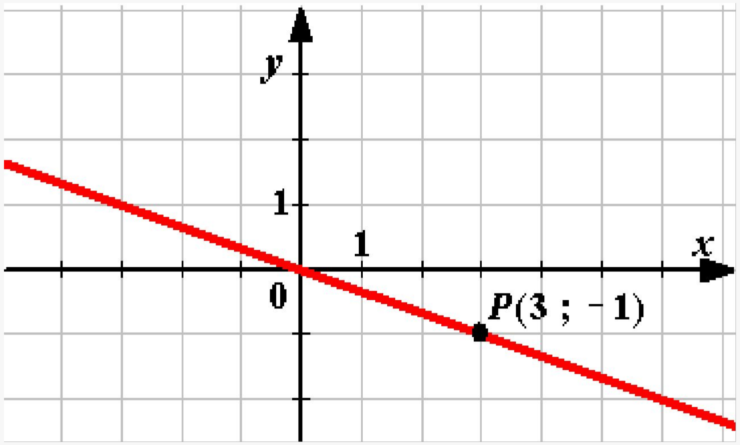
α=-√3

α=-√3/3



Повторение

Угловой коэффициент прямой.



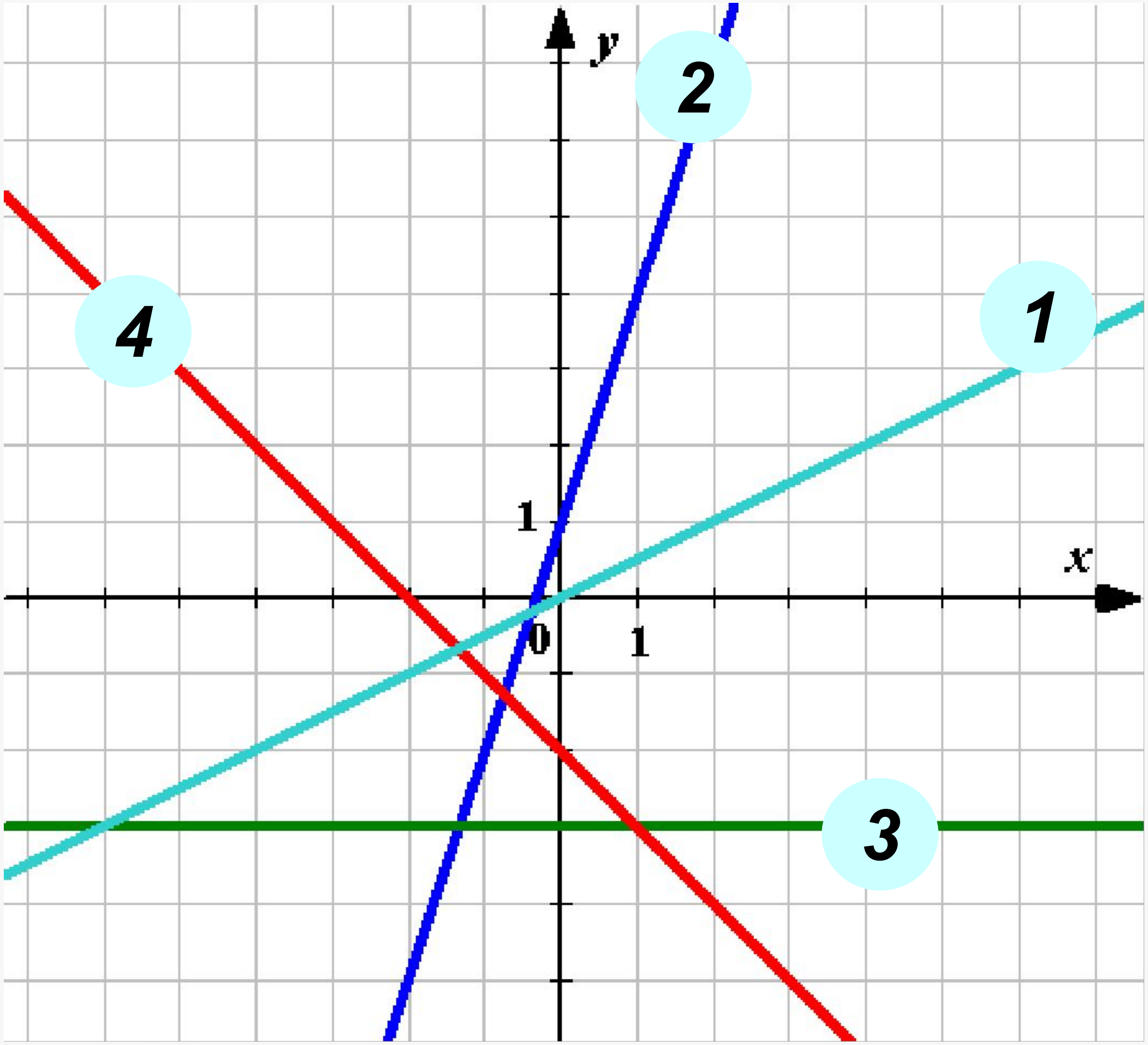
Прямая проходит через начало координат и точку P(3; -1). Чему равен ее угловой коэффициент?

y=kx+b ⟶ y=kx

$$-1 = 3k \longrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

Повторение

Найдите угловые коэффициенты прямых:



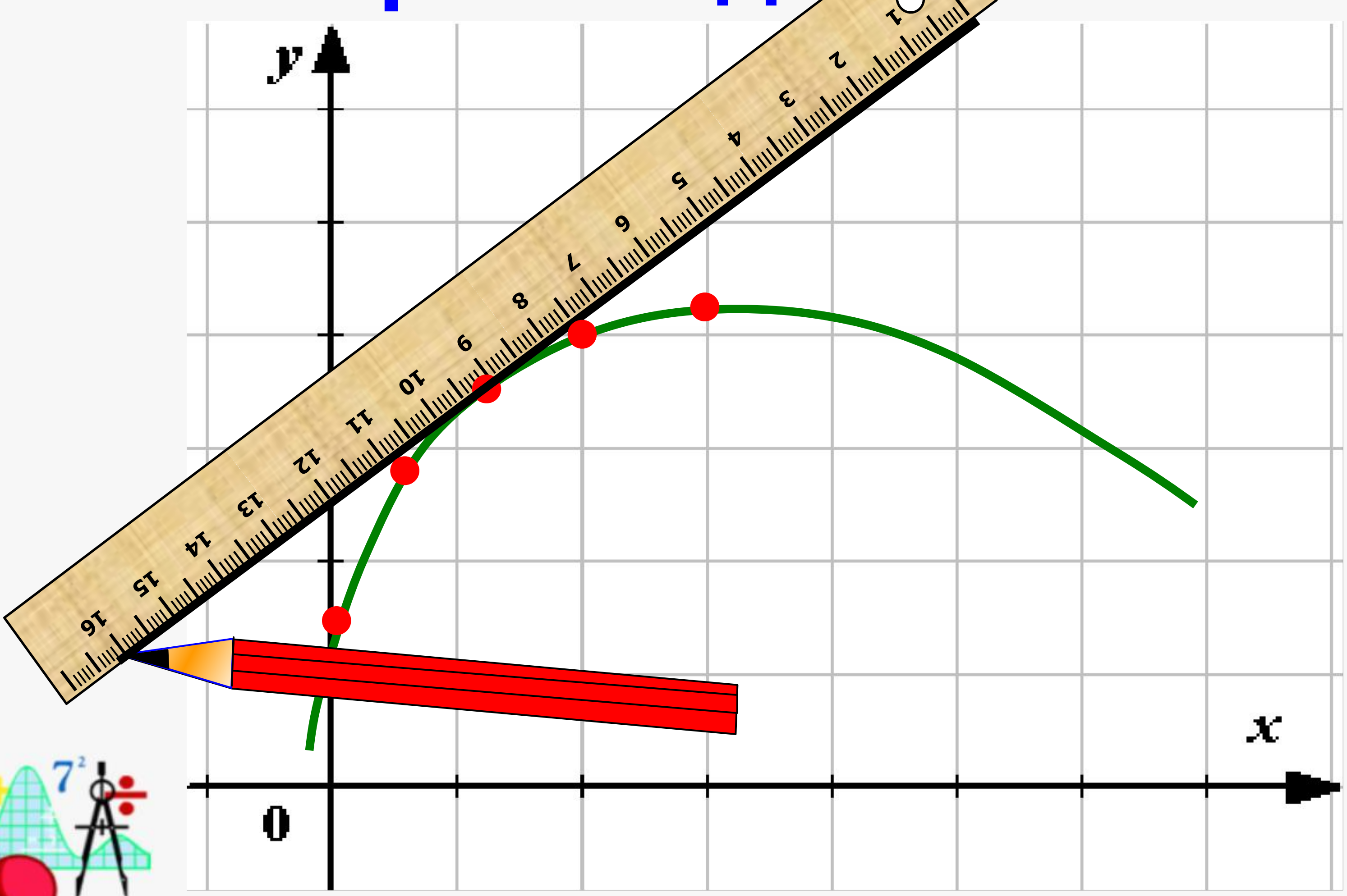
1 $k=0,5$

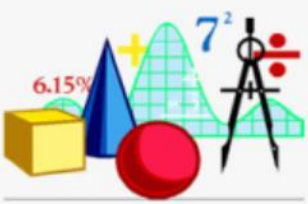
2 $k=3$

3 $k=0$

4 $k=-1$

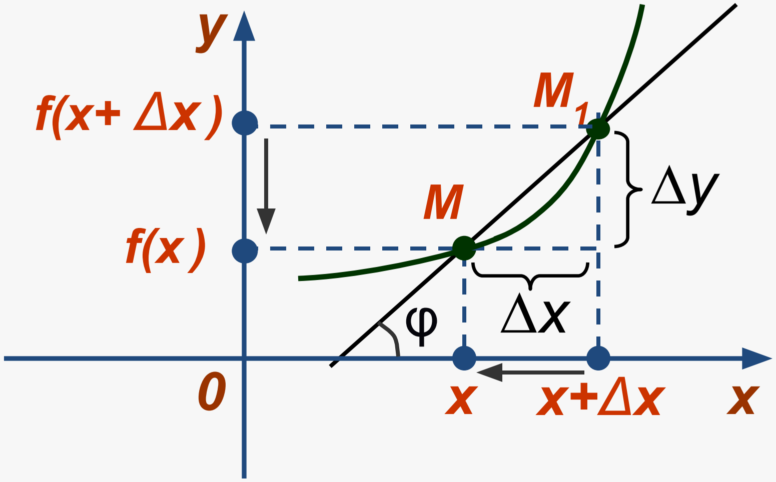
3. Геометрический смысл производной.





3. Геометрический смысл производной

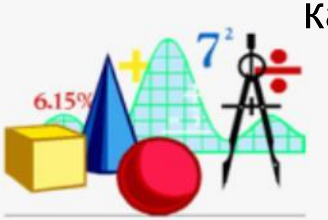
Возьмем на непрерывной кривой ***L*** две точки ***M*** и ***M_1***:



Через точки ***M*** и ***M_1*** проведем секущую и обозначим через ***φ*** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При **Δx→0** в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка ***M_1*** неограниченно приближается по кривой к точке ***M***, а секущая ***MM_1*** переходит в касательную.



$$\varphi \to \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

3. Геометрический смысл производной.

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k = y'$$

Производная **f '(x)** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции **y = f(x)** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания **M** имеет координаты **(x_0; y_0),** угловой коэффициент касательной есть **k = f '(x_0).**

Уравнение касательной

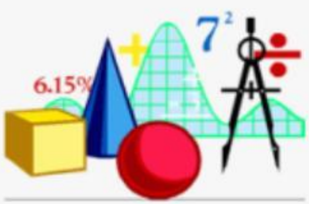
Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

Уравнение нормали

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$f'(x_0)$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.



$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Пример: Найти уравнение касательной и нормали для функции $f(x)=x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Решение:

1) $\Delta y(3) = f(3+\Delta x) - f(3) = (3+\Delta x)^2 - 3^2 = 9 + 2\cdot 3\cdot \Delta x + \Delta x^2 - 9 = 6\Delta x + \Delta x^2,$

2) $f'(3) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{6\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+\Delta x) = 6.$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) - \textit{уравнение касательной}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ - уравнение нормали} \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

3) $y_{\text{кас}} - 9 = 6(x-3)$ $\qquad$ $y_{\text{норм}} - 9 = -\dfrac{1}{6}(x-3)$

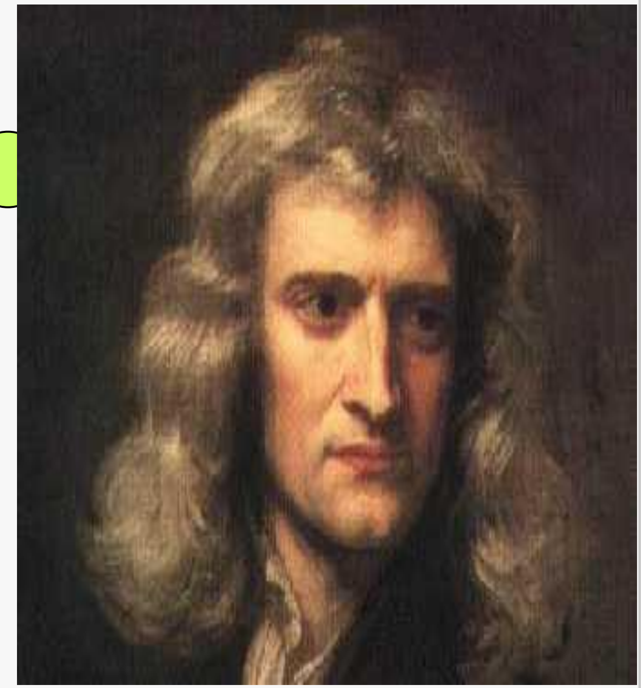
$y_{\text{кас}} = 6x - 9$ $\qquad$ $y_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{6}x + 9\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $y_{\text{кас}} = 6x - 9$ $\qquad$ $y_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{6}x + 9\dfrac{1}{2}.$

3. Физический (механический) смысл производной

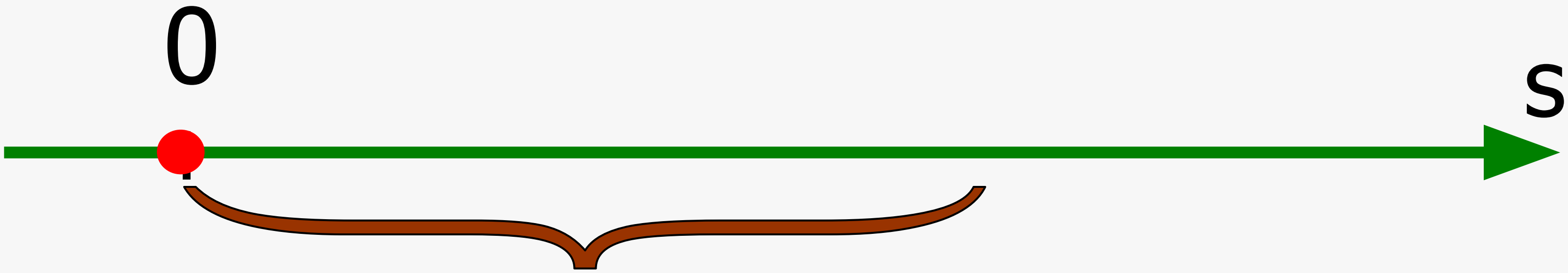
Исаак Ньютон

Это кто?



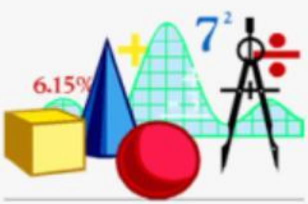
«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад»

3. Физический (механический) смысл производной



S(t) за время t

$$S'(t) = V(t) \qquad V'(t) = a(t)$$



S(t) - перемещение точки за время t

V(t) – скорость точки в момент t

a(t) – ускорение точки в момент t

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Точка движется прямолинейно по закону **$S(t) = 2t^3 - 3t$.** Вычислите скорость движения точки:

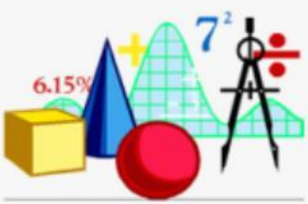
а) в момент времени **t**;

б) в момент времени **$t=2c$**.

Решение:

а) $$v(t) = s'(t) = (2t^3 - 3t)' = 2*3t^2 - 3*1 = 6t^2 - 3$$

б) $$v(2) = 6*2^2 - 3 = 21(м/с)$$



Ответ: **$V(t)=6t^2-3$; $V(2)=21$ м/с**

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: **Материальная точка движется по закону**

$$S(t) = \frac{9}{2}t^2 - 7t + 6$$ **(м).**

Найти

В какой момент времени (с) скорость точки будет равна 12,8 м/с ?

Найти

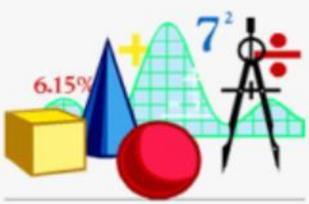
Решение: $S'(t) = V(t)$

$$S'(t) = 9t - 7 = V(t) \qquad V(t) = 12{,}8$$

$$9t - 7 = 12{,}8$$

$$9t = 19{,}8$$

t = 2,2 (с).



3. Физический (механический) смысл производной

Пример: **Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^3-4t^2$**

Найдите скорость и ускорение в момент времени $t=5c$.

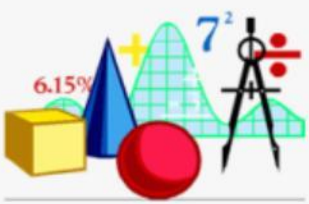
Решение:

$$v(t)=(x(t))'=3t^2-4*2t=3t^2-8t$$

$$v(5)=3*5^2-8*5=75-40=35(м/с)$$

$$a(t)=(v(t))'=(3t^2-8t)'=6t-8$$

$$a(5)=6*5-8=22(м/с^2)$$



Ответ: **V(5)=35 м/с; a(5)=22 м/с^2**

3. Физический (механический) смысл производной

$$x(t) = (t-1)^3, где \;\; t \in [0;10]$$

1. Найти среднюю скорость движения на указанном отрезке

$$\upsilon_{ср} = \frac{x(10) - x(0)}{10 - 0} = \frac{9^3 - (-1)^3}{10} = \frac{730}{10} = 73\, м/с$$

2. Найти мгновенную скорость в момент времени t=3 сек.

$$\upsilon(t) = x'(t) = 3(t-1)^2$$

$$\upsilon_{мгн} = \upsilon(3) = 3(3-1)^2 = 3 \cdot 4 = 12\, {}^{м}\!/_{с}$$

3. Найти ускорение при t=3 сек

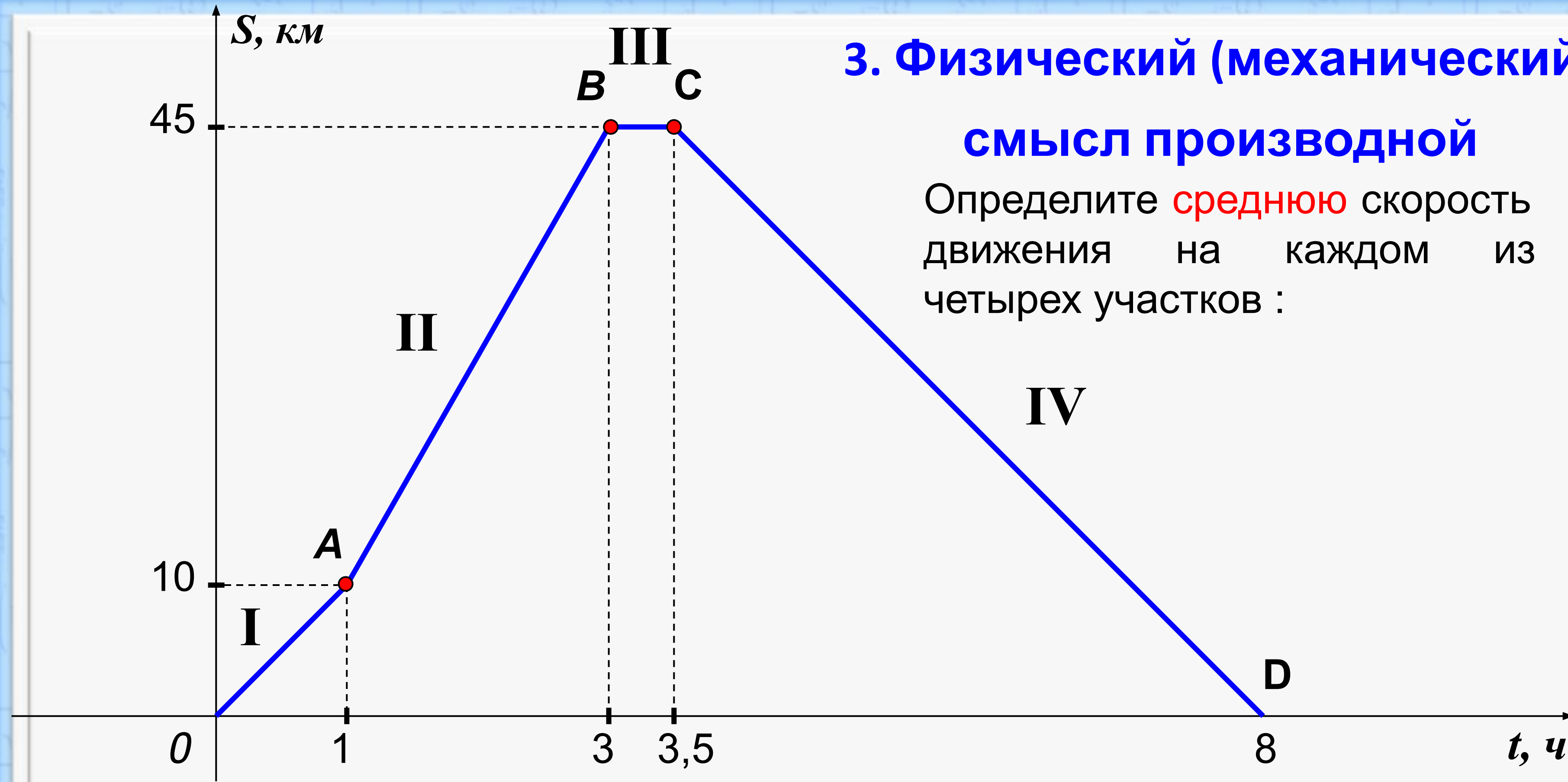
$$a(t) = \upsilon'(t) = 6(t-1)$$

$$a(3) = 12\, {}^{м}\!/_{с^2}$$

Ответ: **$V_{ср}$=73 м/с; V(3)=12 м/с; a(3)=12 м/с^2**

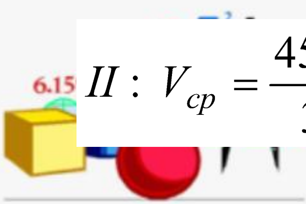
3. Физический (механический) смысл производной

Определите **средней** скорость движения на каждом из четырех участков :



$$I: V_{cp} = \frac{10-0}{1-0} = \frac{10}{1} = 10 \, ^{км}\!/_{ч}$$

$$III: V_{cp} = \frac{45-45}{3{,}5-3} = \frac{0}{0{,}5} = 0 \, ^{км}\!/_{ч}$$



$$II: V_{cp} = \frac{45-30}{3-1} = \frac{15}{2} = 7.5 \, ^{км}\!/_{ч}$$

$$IV: V_{cp} = \frac{45-0}{8-3.5} = \frac{45}{4.5} = 10 \, ^{км}\!/_{ч}$$

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1(t) = 1 - 6t + 2{,}5t^2$ и $s_2(t) = -3 + 2t + 0{,}5t^2$. Определить в какой момент времени скорости их будут равны.

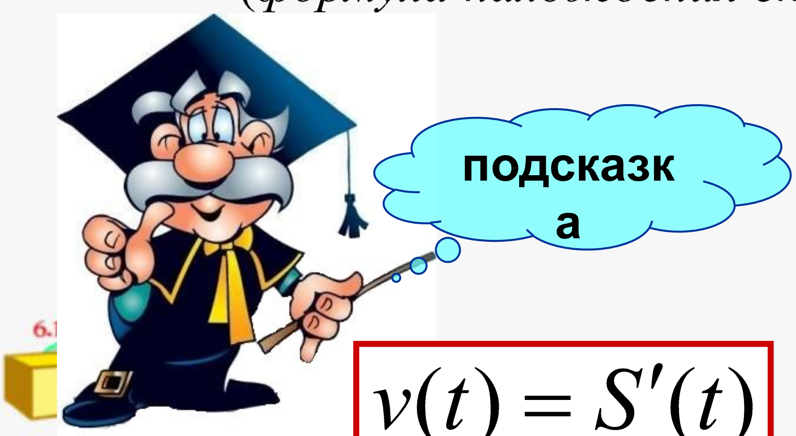
Решение:

$$1)\ V_1(t) = (2.5t^2 - 6t + 1)' = 5t - 6$$

(*формула нахождения скорости движения* 1 *тела*)

$$2)\ V_2(t) = (0.5t^2 + 2t - 3)' = t + 2$$

(*формула нахождения скорости движения* 2 *тела*)



$$\boxed{v(t) = S'(t)}$$

3) *по условию в момент времени* t_0 *их скорости равны, т.е.*

$$5t_0 - 6 = t_0 + 2$$

$$t_0 = 2$$

Ответ: при $t_0 = 2$ с

3. Физический (механический) смысл производной

Задача по химии

Пример: Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью $p(t) = t^2/2 + 3t - 3$ (моль). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

РЕШЕНИЕ: 1) v(t) = p`(t) = t + 3,

2) v(3) = p`(3) = 3 + 3 = 6 (моль/сек)

подсказк
а

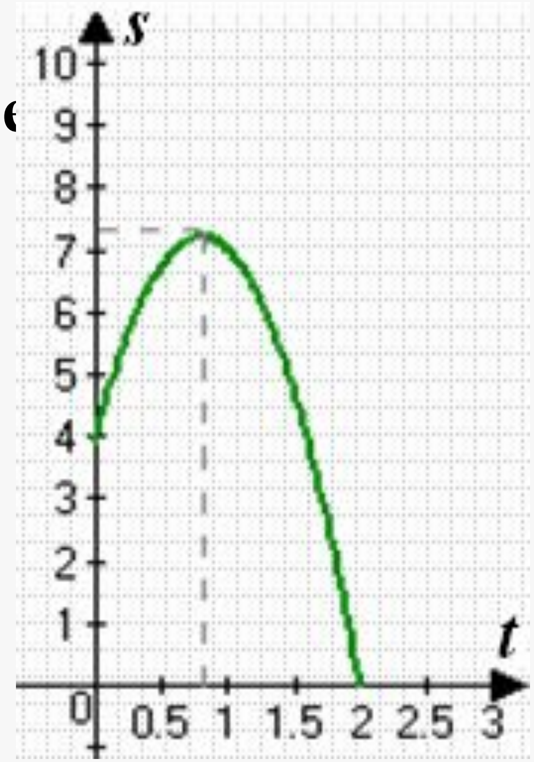
$$\boxed{v(t) = P'(t)}$$

Ответ: 6 моль / сек

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Тело, подброшенное вверх движется по закону $s(t) = 4 + 8t - 5t^2$. Найдите:

1) скорость тела в начальный момент време
2) наибольшую высоту подъёма тела.



РЕШЕНИЕ:

1) $v(t) = s'(t) = 8 - 10t$ - скорость тела;

2) $t = 0$, $v(0) = s'(0) = 8$ м/с – скорость тела в начальный момент времени

3) $s(0{,}8) = 4 + 8 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}64 = 7{,}2$ м – максимальная высота броска тела.

подсказка

$$\boxed{v(t) = S'(t)}$$

Ответ: 8 м/с ; 7,2 м.

УСТНО! **Задача по физике**

Точка движется прямолинейно по закону

$S(t) = t^3 - 2t^2$.

Выберите какой из формул задается скорость движения точки в момент времени t.

$$S'(t) = v(t)$$

1) $3t^2 - 2$; 2) $t^2 - 4t$; 3) $3t^2 - 4t$; 4) $t^4 - 2t^3$

Ответ: 3

УСТНО!

Задача по экономике

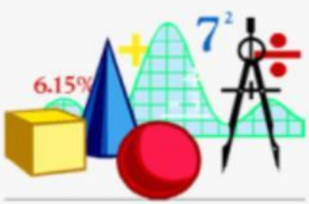
Объем продукции V цеха в течение дня зависит от времени по

$V(t) = -5/3t^3+15/2t^2+50t+70.$

Вычислите производительность труда П(t).

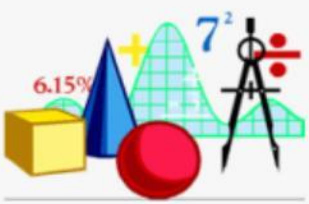
$$V'(t) = \Pi(t).$$

Ответ: $\Pi(t) = -5t^2+15t+50$

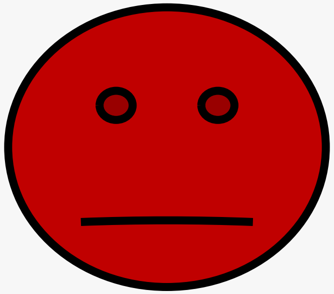


Подведём итог:

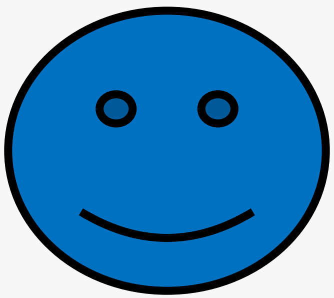
1. Что называется касательной к графику функции в точке?
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной?
4. В чём заключается физический смысл производной?



Выберете смайлик, соответствующий вашему настроению и состоянию после проведенного урока



тревожно, не уверен в себе



спокойно, у меня все получится

безразлично, что будет, то и будет

Домашнее задание:

- Математика. А.А. Дадаян. §9.1-9.3;
- выучить определение понятия и алгоритм нахождения производной;
- *практическое задание:* Математика. А. А. Дадаян. №9.3, 9.7.

Используемая литература:

1. Учебник Колмогорова А.Н. «Алгебра и начала анализа 10-11»
2. Алгебра и начала математического анализа: Учеб. Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
3. Алгебра и начала математического анализа: Задачник, Для 10-11 кл. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.
4. Алгебра и начала анализа. Самостоятельные и контрольные работы для 10-11 классов. / Ершова А.П., Голобородько В.В. – М.: ИЛЕКСА, 2010
5. ЕГЭ 2010. Математика. Задача В8. Рабочая тетрадь / Под редакцией А.Л.Семенова и И.В.Ященко – М.: Издательство МЦНМО, 2010
6. МАТЕМАТИКА СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ПЛАНУ ЕГЭ 2009. Учебно-методическое пособие. под редакцией А. Г. Клово, Д. А. Мальцева; Ростов-на-Дону. НИИ школьных технологий

При создании данной презентации были использованы слайды презентаций, созданные

- учитель математики МОУ «Курлекская СОШ» Томского района Томской области
- **Логунова Людмила Васильевна**, 2006 год
- учитель математики высшей категории МОУ «СОШ №1», г. Магнитогорска, **Пупкова Татьяна Владимировна** 10 класс «А» ГБОУ СОШ №717, учитель: **Чернецова Карина Игоревна**
- **Ковальчук Лариса Ивановна**, учитель математики МОУ СОШ № 288 ЗАТО г.Заозёрск Мурманской области
- 10 класс «А» ГБОУ СОШ №717
- **Дацык О.Н.**, учитель математики, МОУ «Гимназия», г. Костомукша, Республика Карелия
- Амбарцумян Ануш, Дешевых Андрей, Рындин Вячеслав, Макаровская Ирина, Леликова Евгения, Морохов Александр. Задания для устного счета
- **Чудаева Елена Владимировна,** учитель математики, г. Инсар, Республика Мордовия

и материалы с сайта

http://www.mathvaz.ru