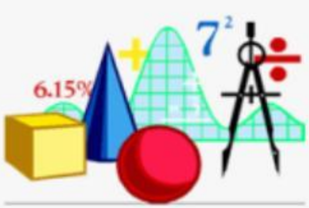
Понятие о производной функции,
её геометрический
и
физический смысл

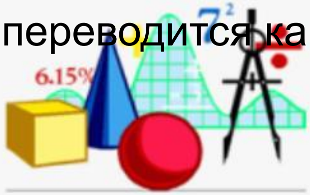


1. История возникновения производной функции

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применение к исследованию функций, называется ***дифференциальным исчислением***. Приращения вида Δf, представляющие собой разности, играют заметную роль при работе с производными. Естественно поэтому появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculis differentialis* нового исчисления, которое переводится как исчисление разностей; это название появилось уже в конце 17в., т.е. при рождении нового метода.

Термин «**производная**» является буквальным переводом на русский французского слова *derivee*, которое ввёл в **1797г. Ж.Лагранж**, он же ввёл современные обозначения **y' , f'.** Такое название отражает смысл понятия: функция f'(x) происходит из f(x), является производным от f(x). **И.Ньютон** называл производную функцию **флюксией**, а саму функцию – **флюентой**. **Г.Лейбниц** говорил о дифференциальном отношении и ввёл обозначение производной **df/dx**.

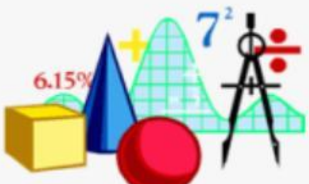
Слово «э**кстремум**» происходит от латинского extremum (крайний). Maximum переводится как наибольший, а minimum – наименьший.



1. Понятие производной

Производной функции *y=f(x)* в точке **x_0** называется предел отношения приращения функции **Δf** к приращению аргумента **Δx**, стремящегося к «нулю»:

$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Понятие производной

Четыре обозначения для производной:

y'	Лагранжа (читается «игрек штрих»)
$\dfrac{dy}{dx}$	Лейбница (читается «дэ игрек по дэ икс»)
$\dot{y}$	Ньютона (читается «игрек с точкой»)
Dy	Коши (читается «дэ игрек»)

2. Понятие производной

Нахождение производной называется **дифференцированием** этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функцию называют **дифференцируемой в этой точке**.

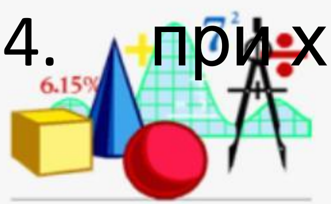
Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется **дифференцируемой на этом промежутке**.

2. Понятие производной

Пример: Дана функция $y=x^2$. Найти её производную в произвольной точке и в точке $x=3$.

Решение:

1. $f(x_0+\Delta x)=(x+\Delta x)^2$;
2. $\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$;
3. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$, т.е. $y'=(x^2)'=2x$;
4. при $x=3$ получим $y'(3)=2*3=6$.



Ответ: $y'=2x$; $y'(3)=6$

Пример: Воспользовавшись определением производной, найти производную функции $y = \dfrac{3x-1}{2x+5}$.

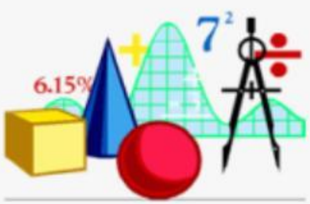
Решение: Дадим *x* приращение Δ*x*, тогда *y* получит приращение Δ*y*:

$$\Delta y = \frac{3(x+\Delta x)-1}{2(x+\Delta x)+5} - \frac{3x-1}{2x+5} = \frac{(3x+3\Delta x-1)(2x+5)-(3x-1)(2x+2\Delta x+5)}{(2(x+\Delta x)+5)(2x+5)} =$$

$$= \frac{17\Delta x}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}.$$

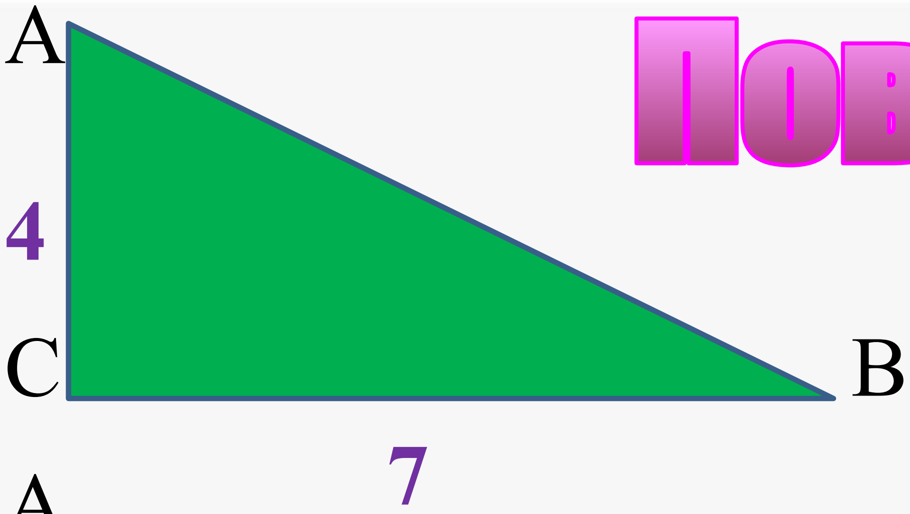
Так как $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{17\Delta x}{\Delta x(2x+2\Delta x+5)(2x+5)} = \dfrac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)}$,

то $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{17}{(2x+2\Delta x+5)(2x+5)} = \dfrac{17}{(2x+5)^2}.$

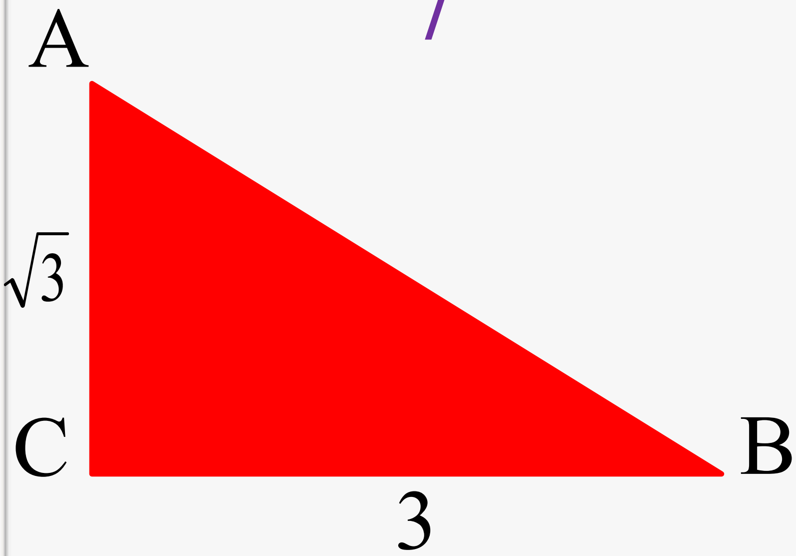


Ответ: $y' = \dfrac{17}{(2x+5)^2}.$

Повторение



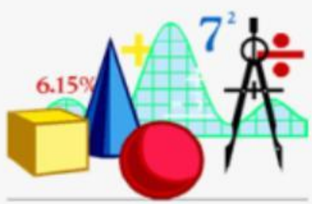
tg A-? Tg A=3/√3



tg B -? Tg B=√3/3

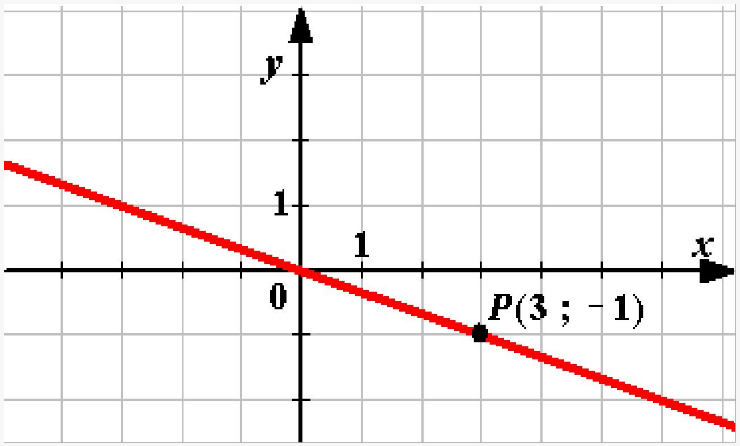
Вычислите tgα, если α = 135°, 120°, 150°.

α=-1 α=-√3 α=-√3/3



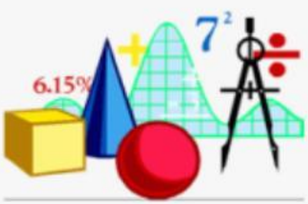
Повторение

Угловой коэффициент прямой.



Прямая проходит через начало координат и точку P(3; -1). Чему равен ее угловой коэффициент?

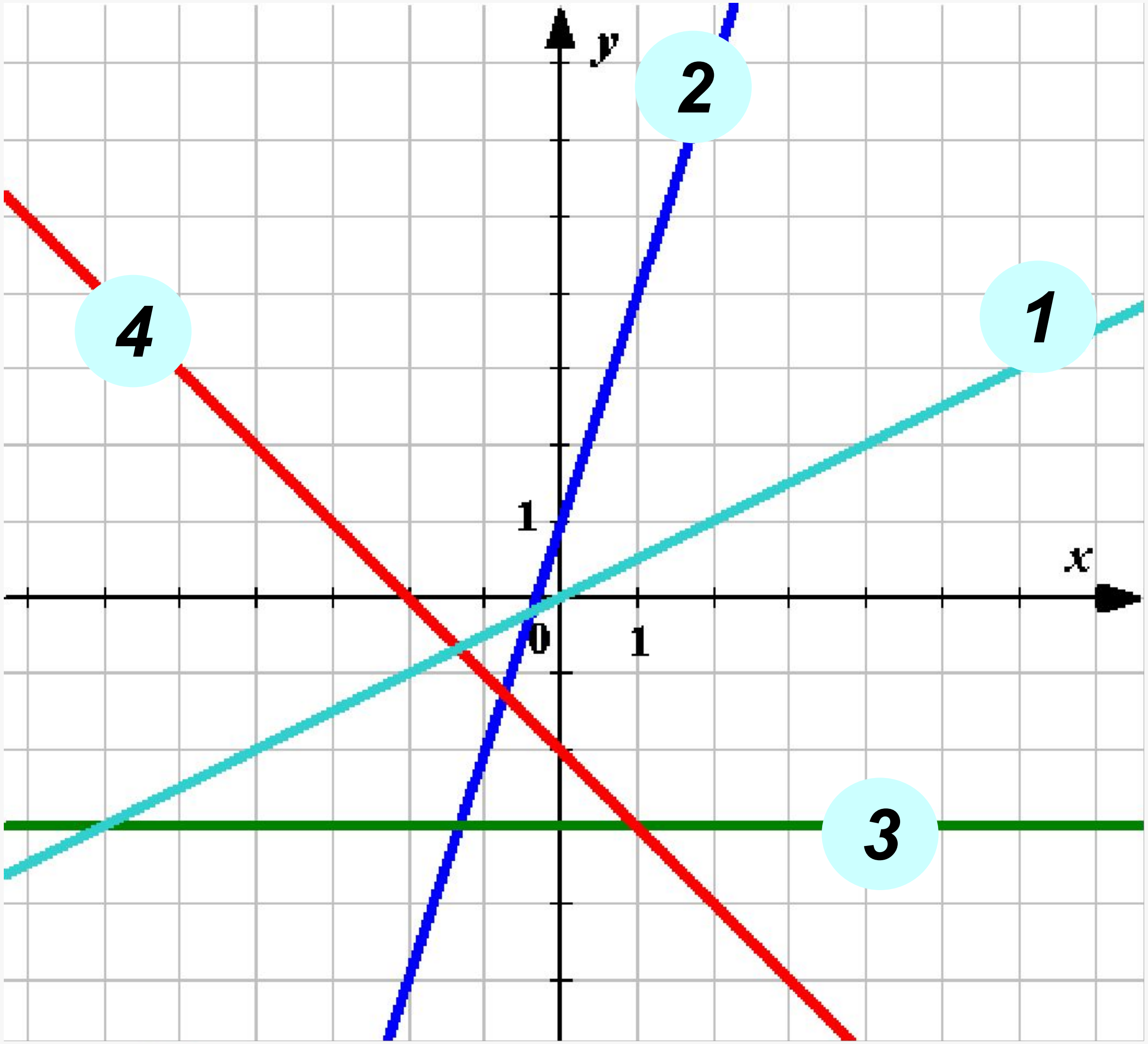
$$y=kx+b \longrightarrow y=kx$$



$$-1=3k \longrightarrow k=-\frac{1}{3}$$

Повторение

Найдите угловые коэффициенты прямых:



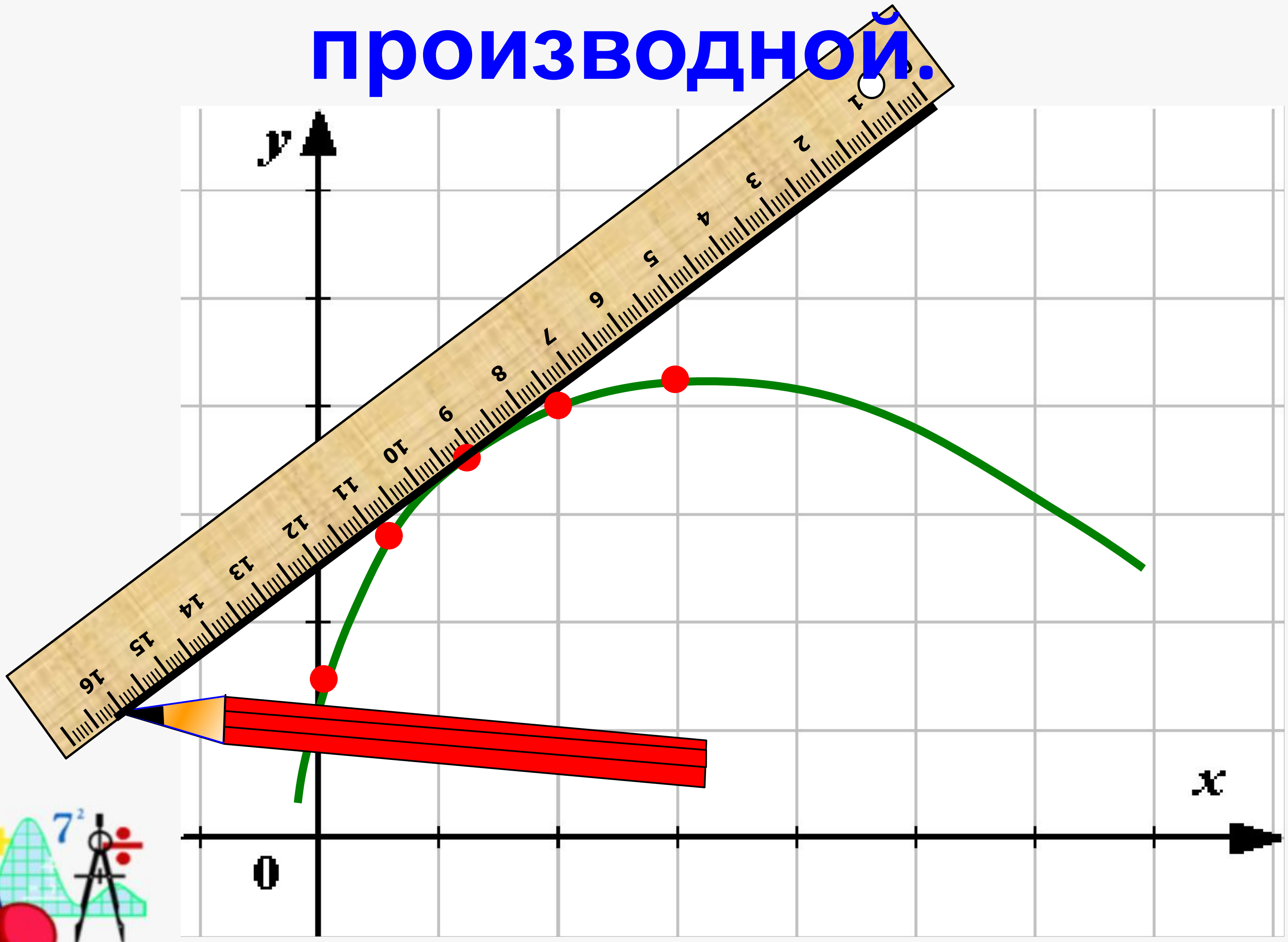
1 $k=0,5$

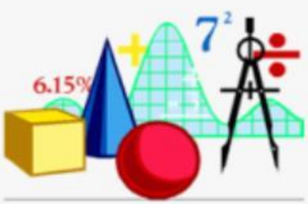
2 $k=3$

3 $k=0$

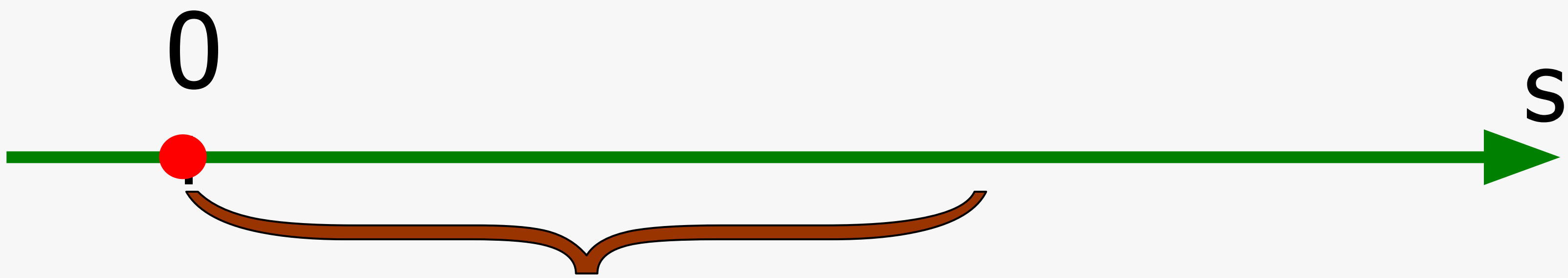
4 $k=-1$

3. Геометрический смысл производной.



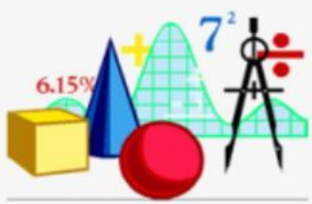


3. Физический (механический) смысл производной



S(t) за время t

$$S'(t) = V(t) \qquad V'(t) = a(t)$$



S(t) - перемещение точки за время t

V(t) – скорость точки в момент t

a(t) – ускорение точки в момент t

3. Физический (механический) смысл производной

Пример: Точка движется прямолинейно по закону

$S(t) = 2t^3 - 3t$. Вычислите скорость движения точки:

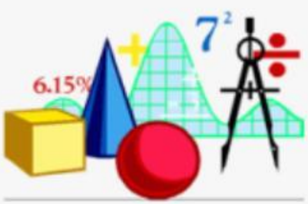
а) в момент времени **t**;

б) в момент времени **t=2c**.

Решение:

а) $v(t) = s'(t) = (2t^3 - 3t)' = 2 * 3t^2 - 3 * 1 = 6t^2 - 3$

б) $v(2) = 6 * 2^2 - 3 = 21(м / с)$



Ответ: $V(t)=6t^2-3$; $V(2)=21$ м/с

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$

2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

4. $\left(e^x\right)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

15. $(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

16. $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$

17. $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$

18. $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$

19. $(\mathrm{th}\,x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$