

# Математическая ЛОГИКА

- § 8. Логика и компьютеры
- § 9. Логические элементы
- § 10. Другие логические операции
- § 11. Логические выражения
- § 12. Множества и логика

# Математическая логика

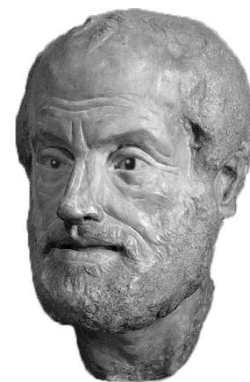
## **§ 5. Логика и компьютер**

# Логика, высказывания

---

**Логика** (др.греч. *λοῦκος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

**Формальная логика** отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель  
(384-322 до н.э.)

**Логическое высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

# Высказывание или нет?

---

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

# Логика и компьютер

двоичная логика

**!** Любое высказывание может быть **ложно (0)** или **истинно (1)**.

Логика изучает операции между 0 и 1!



**!** Связь с двоичным кодированием!

**Алгебра логики** — это математический аппарат, с помощью которого записывают, упрощают и преобразуют логические высказывания, вычисляют их значения.

Алгебра высказываний,  
булева алгебра



**Джордж Буль**

# Простые и составные высказывания

**A** – Сейчас идет дождь. }  
**B** – Форточка открыта. }

простые  
высказывания  
(элементарные)

**Составные высказывания** строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

**A и B** Сейчас идет дождь и открыта форточка.

**A или не B** Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

**если A, то B** Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

**A тогда и только тогда, когда B** Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

# Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также  $\bar{A}$ , not A

таблица  
истинности  
операции НЕ

**Таблица истинности логического выражения X** – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

# Разные операции с одной переменной



Сколько всего?

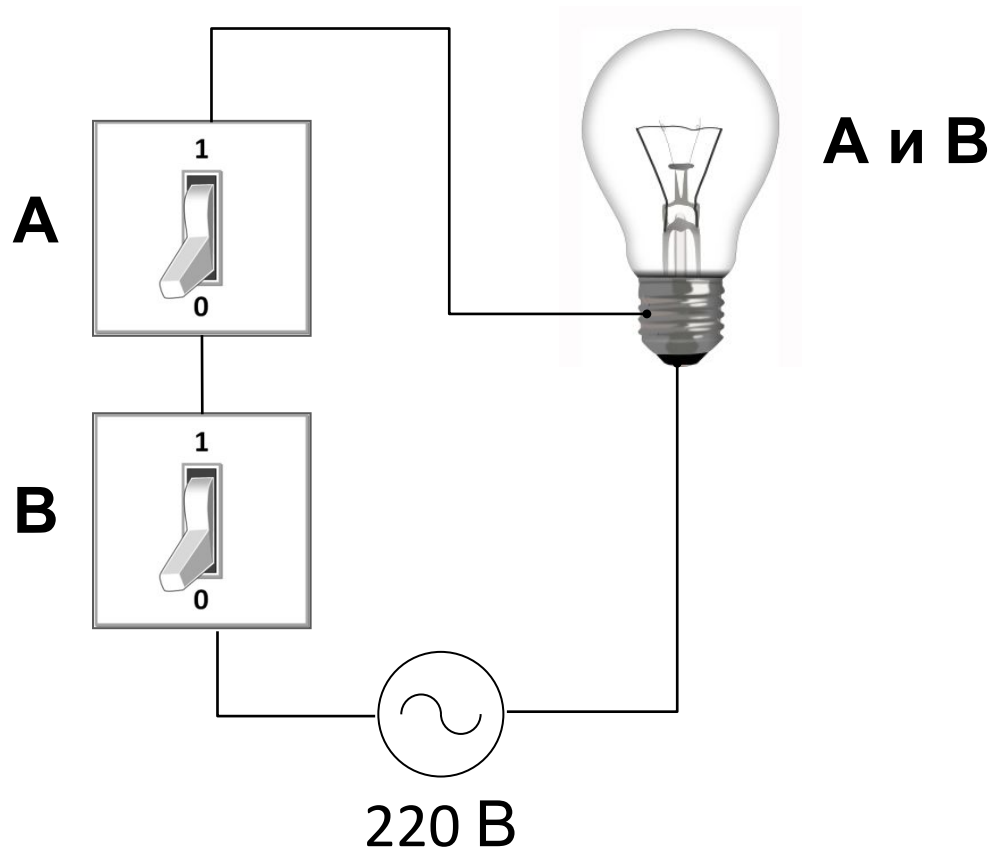
$$2^2 = 4$$

A	не A	A	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1



# Операция И

Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



# Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	А	В	А и В
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также  $A \cdot B$ , A and B



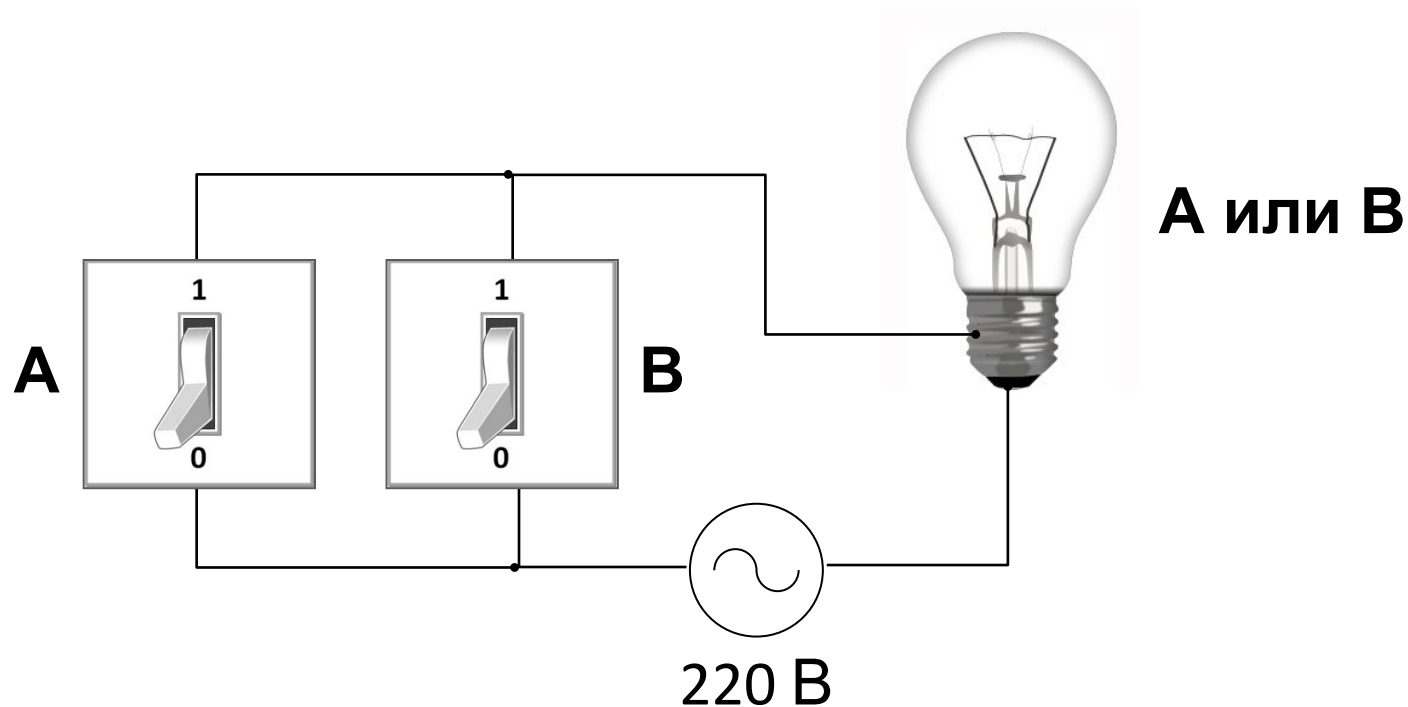
Почему  
умножение?

**конъюнкция** – от лат. *conjunctio* — соединение

$$A \text{ и } B = \min(A, B)$$

# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также:  $A+B$ , A or B



Почему  
сложение?



$1+1=1$

**ДИЗЪЮНКЦИЯ** – от лат. *disjunctio* — разъединение

$$A \text{ или } B = \max(A, B)$$

# Упрощение логических выражений

---

$$A \text{ и } 0 = A \cdot 0 = 0$$

$$A \text{ и } 1 = A \cdot 1 = A$$

$$A \text{ или } 0 = A + 0 = A$$

$$A \text{ или } 1 = A + 1 = 1$$

$$A \text{ и не } A = A \cdot \overline{A} = 0$$

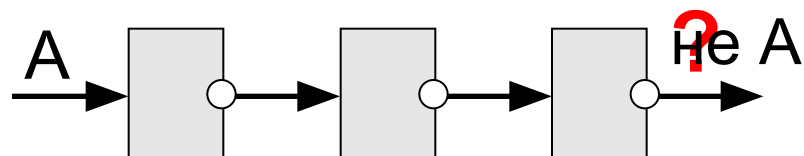
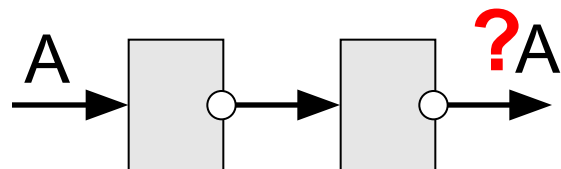
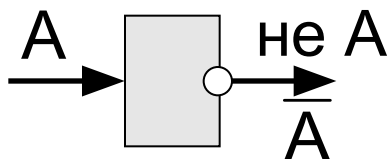
$$A \text{ или (не } A) = A + \overline{A} = 1$$

# Математическая логика

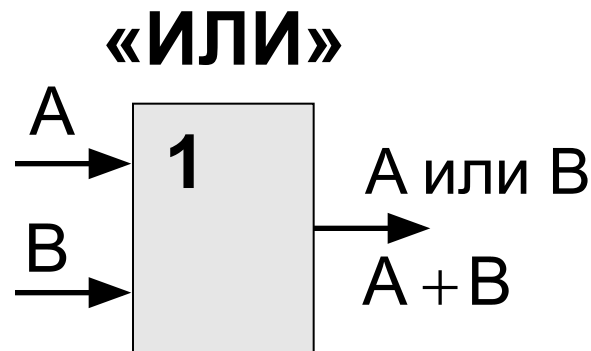
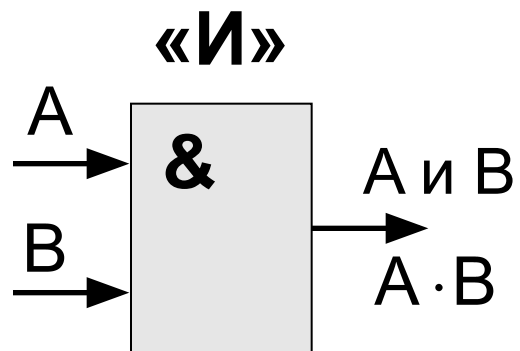
## **§ 6. Логические элементы**

# Элемент «НЕ»

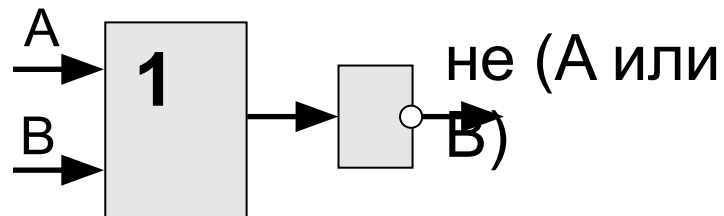
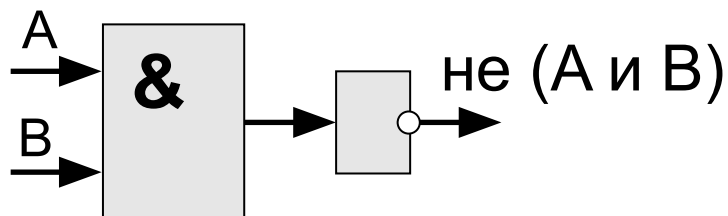
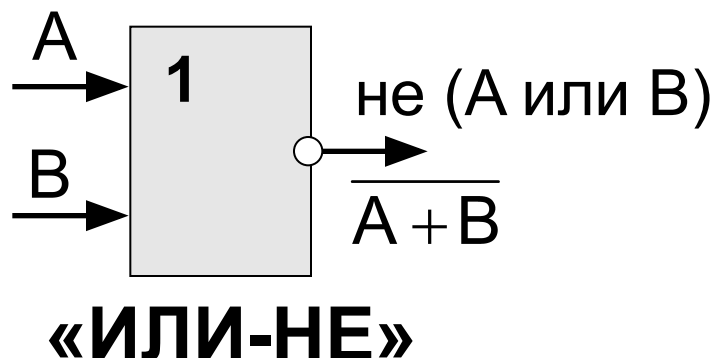
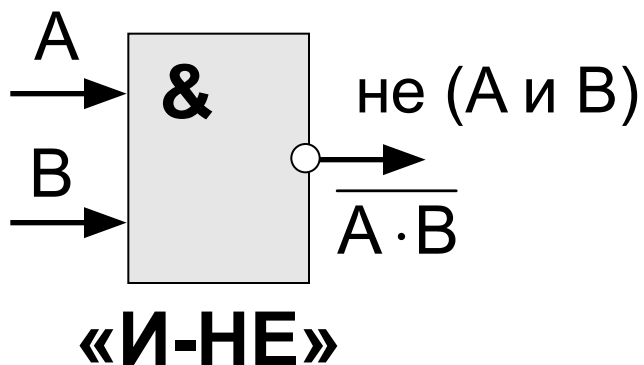
значок  
инверсии



# Элементы «И» и «ИЛИ»

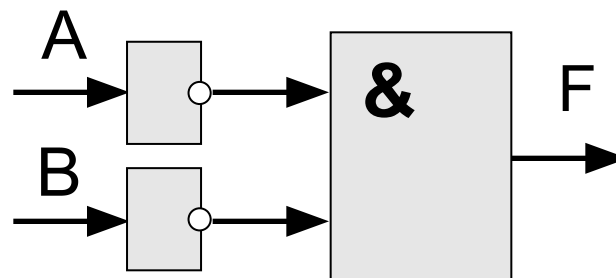
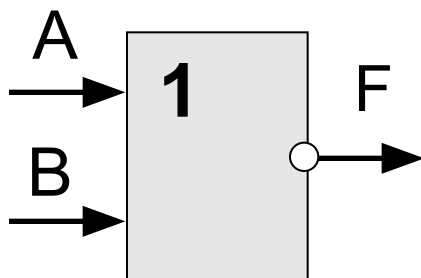
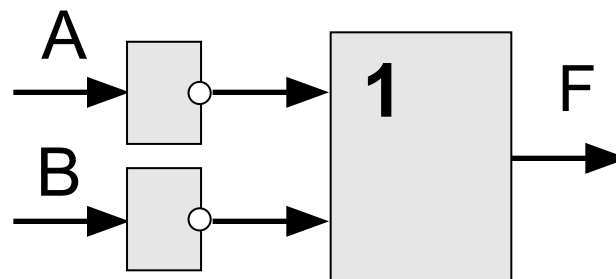
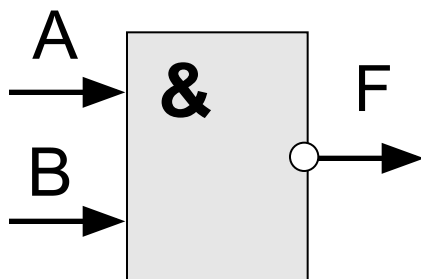
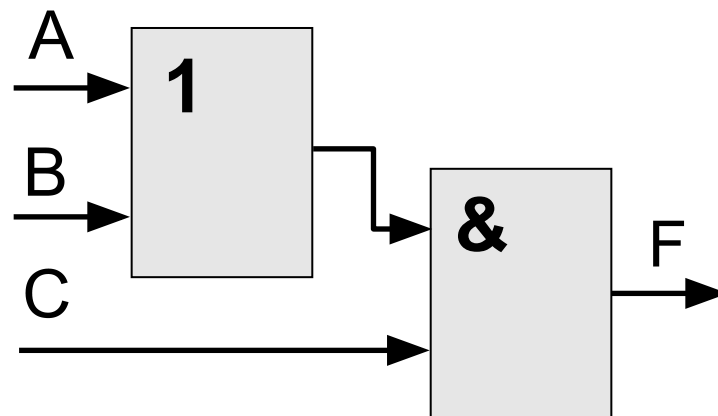
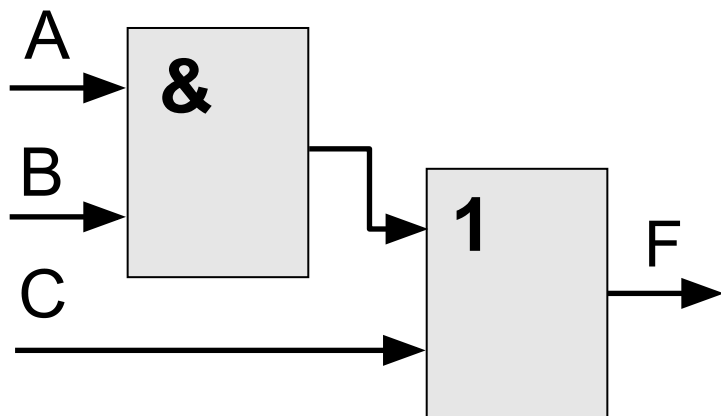


Двойные элементы:





# Составьте таблицы истинности



# Математическая логика

## **§ 7. Другие логические операции**

# Операции с двумя переменными



Сколько всего?

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

0 или 1

$$2^4 = 16$$

# Импликация

**A**

$X =$  Если *идёт дождь*, то

*Лена раскрывает зонтик.*

$$X = A \rightarrow B$$

**B**

Импликация  $A \rightarrow B$  истинна, если **не исключено**, что из  $A$  следует  $B$ .

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Идёт дождь, но Лена не раскрыла зонтик.

# Постройте таблицы истинности

---

$$X = B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow A \neq A \rightarrow B$$

$$X = \bar{A} + B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$X = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

$$A \rightarrow B = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$$

# Эквиваленция

Высказывание «**A**  $\leftrightarrow$  **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## Постройте таблицы истинности

---

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$X = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$A \leftrightarrow B = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B)$$

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B)}$$

## Исключающее «ИЛИ»

Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно  $A$  или  $B$ , но **не оба одновременно** ( $A \neq B$ ).

*«Либо пан, либо пропал».*

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

арифметическое  
сложение,  $1+1=2$

остаток

**сложение по модулю 2:**  $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$



# Постройте таблицы истинности

---

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$X = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

$$A \oplus B = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

# Упрощение логических выражений

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus A = 0$$

$$(A \oplus B) \oplus B = A$$

операция обратима



Повторное применение операции  $\oplus$  с тем же  $B$  восстанавливает исходное  $A$ !

# Шифрование

данные

ключ

$$(A \oplus B) \oplus B = A$$

шифровка

дешифровка

$$A = 1\ 0\ 0\ 1$$

$$B = 0\ 1\ 0\ 1$$

$$(A \oplus B) = 1\ 1\ 0\ 0$$

$$B = 0\ 1\ 0\ 1$$

$$1\ 0\ 0\ 1 = A$$

# Математическая логика

## § 8. Логические выражения

# Логические выражения

**Логическое выражение** — это выражение, результат вычисления которого — логическое значение (истина или ложь).

Авария = вышли из строя 2 из 3-х двигателей.

**A** — «Двигатель № 1 неисправен».

**B** — «Двигатель № 2 неисправен».

**C** — «Двигатель № 3 неисправен».

логическое  
выражение

**Аварийный сигнал:**  $X = (A \cdot B) + (A \cdot C) + (B \cdot C)$

**X** = «Неисправны два двигателя»

= (A и B) или (A и C) или (B и C)

**!** **Формализация** – это переход к записи на формальном языке!

# Порядок вычисления

---

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ X = & A & \cdot & B & + & (\bar{A} & \cdot & B & + & \bar{B}) \end{array}$$

# Таблицы истинности

$$X = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

	A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	X
0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	0	0

Логические выражения могут быть:

- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)
- **тождественно истинными** (всегда 1, **тавтология**)
- **тождественно ложными** (всегда 0, **противоречие**)

# Таблицы истинности

$$X = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$$

равносильны

	A	B	$A + B$	$\bar{A} + \bar{B}$	X
0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0

$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$
0
1
1
0

Если два выражения принимают одинаковые значения при всех значениях переменных, они называются **равносильными** (определяют одну и ту же логическую функцию).



# Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

а)  ~~$F = A + \bar{B} + \bar{C}$~~

б)  ~~$F = A \cdot \bar{C} + B$~~

в)  ~~$F = A \cdot B + C$~~

г)  $F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$



Сколько строк в полной таблице?

$$2^3 = 8$$



Сколько подходящих функций?

$$2^5 = 32$$

один ноль в таблице

по 1-й строке

по 2-й строке

# Сколько нулей и единиц?

в таблице истинности функции от 3-х переменных:

	нулей	единиц
$A + B + \bar{C}$	1	7
$A \cdot B \cdot \bar{C}$	7	1
$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	7	1
$\bar{A} + \bar{B} + C$	1	7
$\bar{A} \cdot (\bar{B} + C)$	5	3

# Неполные таблицы истинности

A	B	C	F
0		1	0
1	0		1
		1	1

один ноль,  
две единицы

а)  ~~$F = \bar{A} + B + \bar{C}$~~

по 1-й строке  $1 + B + 0 \neq 0$

б)  ~~$F = \bar{A} \cdot B \cdot C$~~

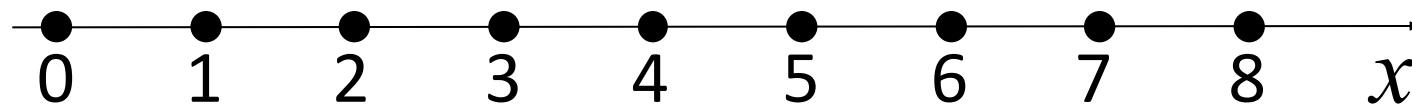
по 2-й строке  $0 \cdot 0 \cdot C \neq 1$

в)  $F = A + \bar{B} + \bar{C}$

г)  ~~$F = A \cdot \bar{B} \cdot C$~~

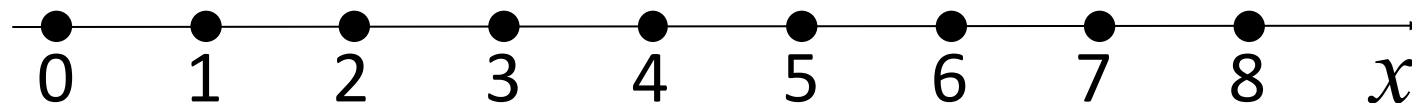
только 1 единица,  
все строки разные!

# Составление условий

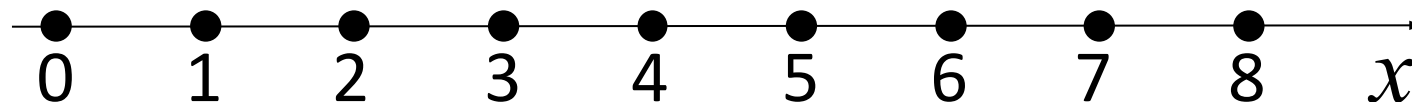


$$(x \geq 3) \text{ и } (x \leq 6)$$

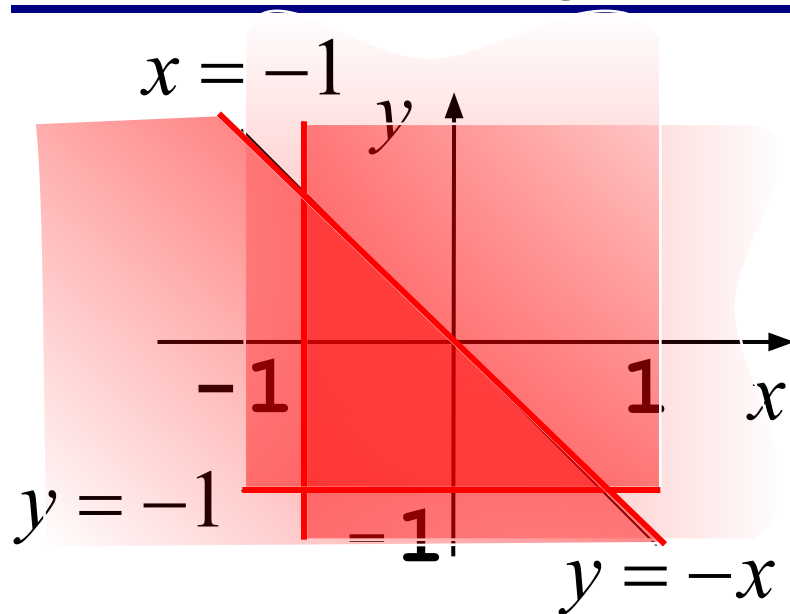
$$(3 \leq x) \text{ и } (x \leq 6)$$



$$(1 \leq x) \text{ и } (x \leq 3) \text{ или } (5 \leq x) \text{ и } (x \leq 8)$$



# Составление условий



левая граница:  $x \geq -1$

нижняя граница:  $y \geq -1$

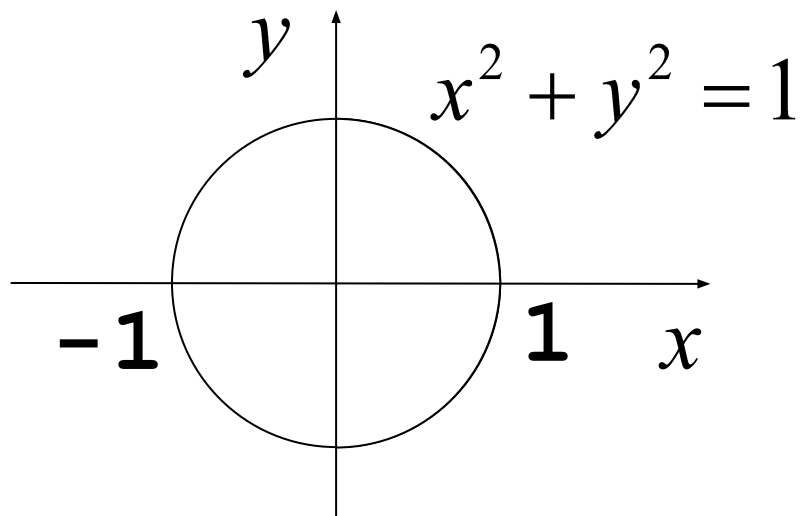
верхняя граница:  $y \leq -x$



Всё одновременно!

$$(x \geq -1) \text{ и } (y \geq -1) \text{ и } (y \leq -x)$$

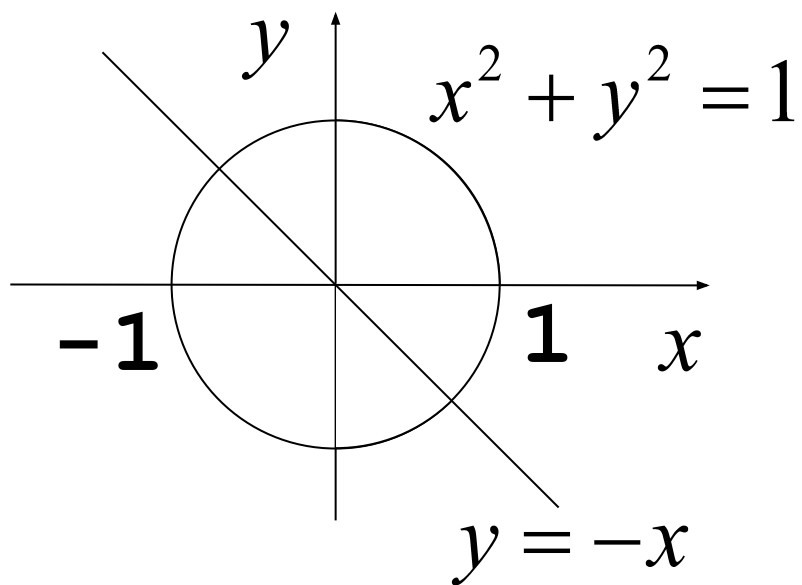
# Составление условий



левая

правая

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \leq 0)$$



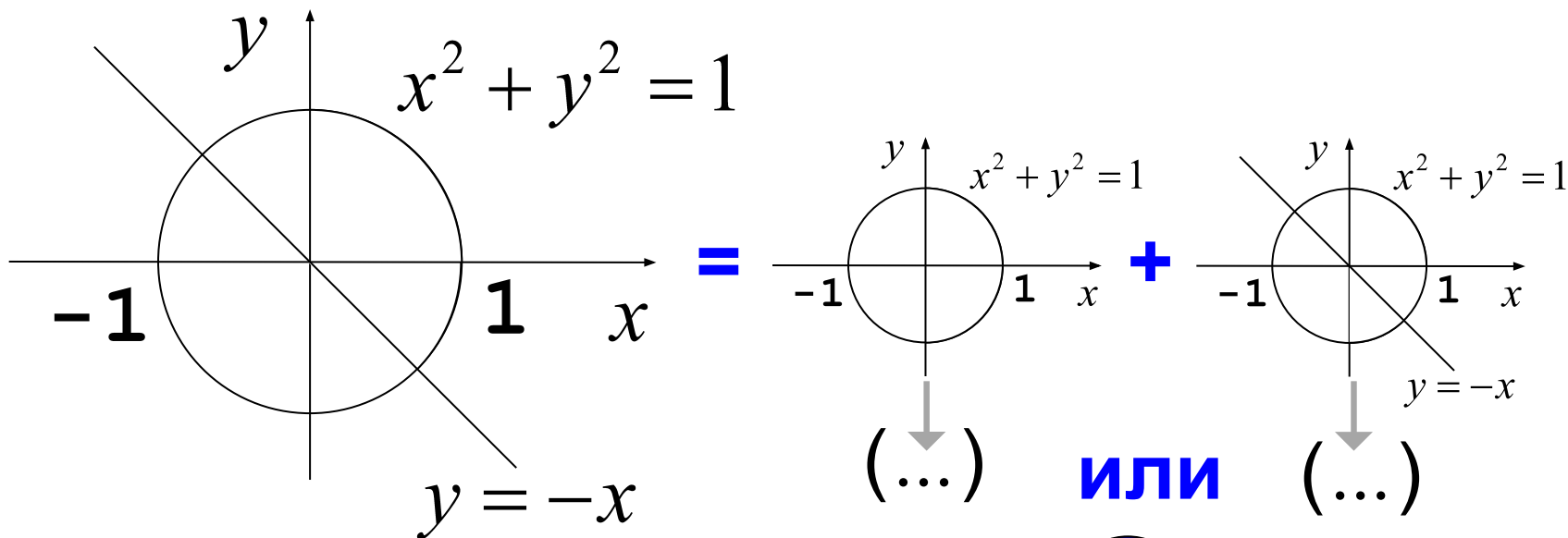
левая

нижняя

$$(x \geq 0) \text{ и } (x^2 + y^2 \leq 1) \\ \text{и } (y \leq -x)$$

верхняя

# Составление условий



$$((x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \leq 0)) \text{ или}$$

**?** Как упростить?

$$((x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } (x \geq 0) \text{ и } (y \leq -x))$$

**?** А ещё?

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } ((x \leq 0) \text{ или } ((x \geq 0) \text{ и } (y \leq -x)))$$

$$(x^2 + y^2 \leq 1) \text{ и } ((x \leq 0) \text{ или } (y \leq -x))$$

# Определение истинности выражений

Для каких из указанных значений числа  $X$  истинно высказывание:

$(X < 5)$  и не  $(X < 1)$  ?

$X = 2:$

$(1)$  и не  $(0)$

$(1$  и  $1) = 1$

$X = 4:$

$(1)$  и не  $(0)$

$(1$  и  $1) = 1$

$X = 8:$

$(0)$  и не  $(0)$

$(0$  и  $1) = 0$

МОЖНО НЕ  
ВЫЧИСЛЯТЬ!



# Табличный метод

Для каких из указанных значений числа  $X$  истинно высказывание:

$$R = (X < 5) \text{ и не } (X < 1) ?$$

$X$	$X < 5$	$X < 1$	не $(X < 1)$	$R$
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	



И

## Задачи

Для каких из указанных значений числа  $X$   
**ЛОЖНО** высказывание:

(не ( $X \geq 3$ ) и не ( $X = 8$ )) или ( $X \leq 5$ ) ?

? + 1

$X = 4$ : (не (1) и не (0)) или (1) = 1

$X = 1$ : (не (0) и не (0)) или (1) = 1

$X = 8$ : (не (1) и не (1)) или (0)

( 0 и 0 ) или (0) = 0

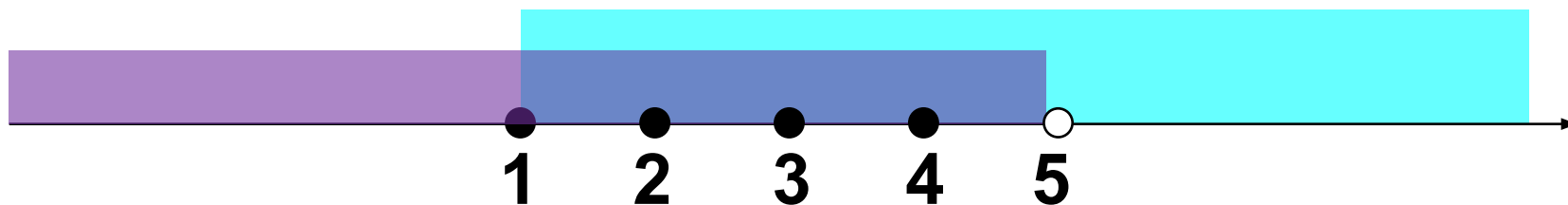
# Задачи

Для каких значений числа  $X$  истинно высказывание:

$$(X < 5) \text{ и не } (X < 1) ?$$



$$(X < 5) \text{ и } (X \geq 1)$$



1, 2, 3, 4

# Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**  
высказывание:

(Первая буква согласная)

**НЕ(Первая буква гласная)** или  
(Последняя буква гласная) ?

	ПервСогл	ПослГлас	R
Никита			
Антон			
Даниил			
Инна			
Кирилл			



# Задачи (ЛОЖНО $\rightarrow$ ИСТИННО)

**ЛОЖНО** А или В



Какое условие истинно?

А	В	А или В
0	0	0 ✓
0	1	1
1	0	1
1	1	1

А	В	?
0	0	1 ✓
0	1	0
1	0	0
1	1	0

**ЛОЖНО** А или В

**ИСТИННО** не А и не В

$$A + B = 0$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$$

# Задачи (ЛОЖНО $\rightarrow$ ИСТИННО)

**ЛОЖНО** А и В



Какое условие истинно?

А	В	А и В
0	0	0 ✓
0	1	0 ✓
1	0	0 ✓
1	1	1

А	В	?
0	0	1 ✓
0	1	1 ✓
1	0	1 ✓
1	1	0

**ЛОЖНО** А и В

**ИСТИННО** не А или не В

**А · В =**

**А + В = 1**

## Задачи (ЛОЖНО $\rightarrow$ ИСТИННО)

---



Для перехода от ложного условия к равносильному истинному нужно:

- заменить все простые условия на обратные
- заменить И  $\rightarrow$  ИЛИ
- заменить ИЛИ  $\rightarrow$  И

# Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**  
высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) **или**  
(Последняя буква гласная) ?



(Первая буква гласная) **и**  
(Последняя буква согласная)

$$A + B = 0$$



$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$$

Никита

**Антон**

Даниил

Инна

Кирилл

**Егор**

Мефодий

**Игнат**



# Задачи

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**  
высказывание:

НЕ(Первая буква гласная) **и**  
(Последняя буква гласная) ?



(Первая буква гласная) **или**  
(Последняя буква согласная)

$$A \cdot B = 0$$



$$\bar{A} + \bar{B} = 1$$

Никита

Антон

Даниил

Инна

Кирилл

Егор

Мефодий

Игнат

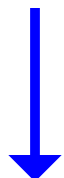
# Задачи

Для каких значений числа  $X$  **ЛОЖНО**  
высказывание:

(НЕ ( $X \geq 3$ ) и не ( $X = 8$ )) или ( $X \leq 5$ ) ?

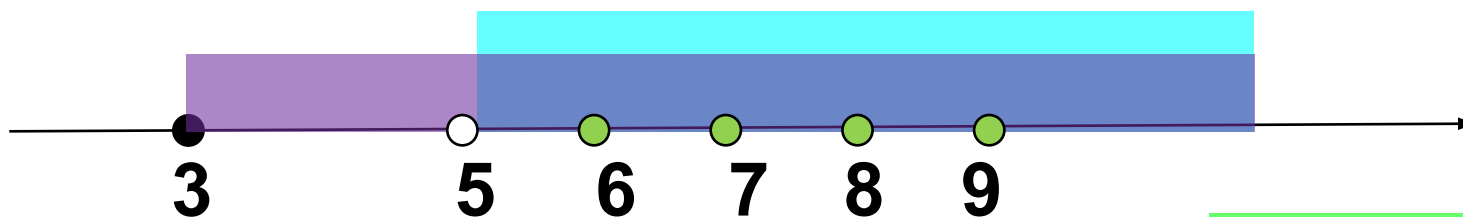


**ЛОЖНО** ( ( $X < 3$ ) и ( $X \neq 8$ )) или ( $X \leq 5$ )



и  $\leftrightarrow$  или,  
обратные условия

**ИСТИННО** ( ( $X \geq 3$ ) или ( $X = 8$ )) и ( $X > 5$ )



6, 7, 8, ...

## Задачи

---

Напишите наибольшее число  $x$ , для которого истинно высказывание:

$(x < 42)$  **и не** (в числе  $x$  **нет** одинаковых цифр)



$(x < 42)$  **и** ~~**не**~~ (в числе  $x$  **ЕСТЬ** одинаковые цифры)



33



# Задачи

Напишите наименьшее число  $x$ , для которого  
**ЛОЖНО** высказывание:

$(x < 42)$  **или**  $(x$  **не** делится на 14)



$(x \geq 42)$  **и**  $(x$  ~~**не**~~ делится на 14)



42

**$A + B = 0$**



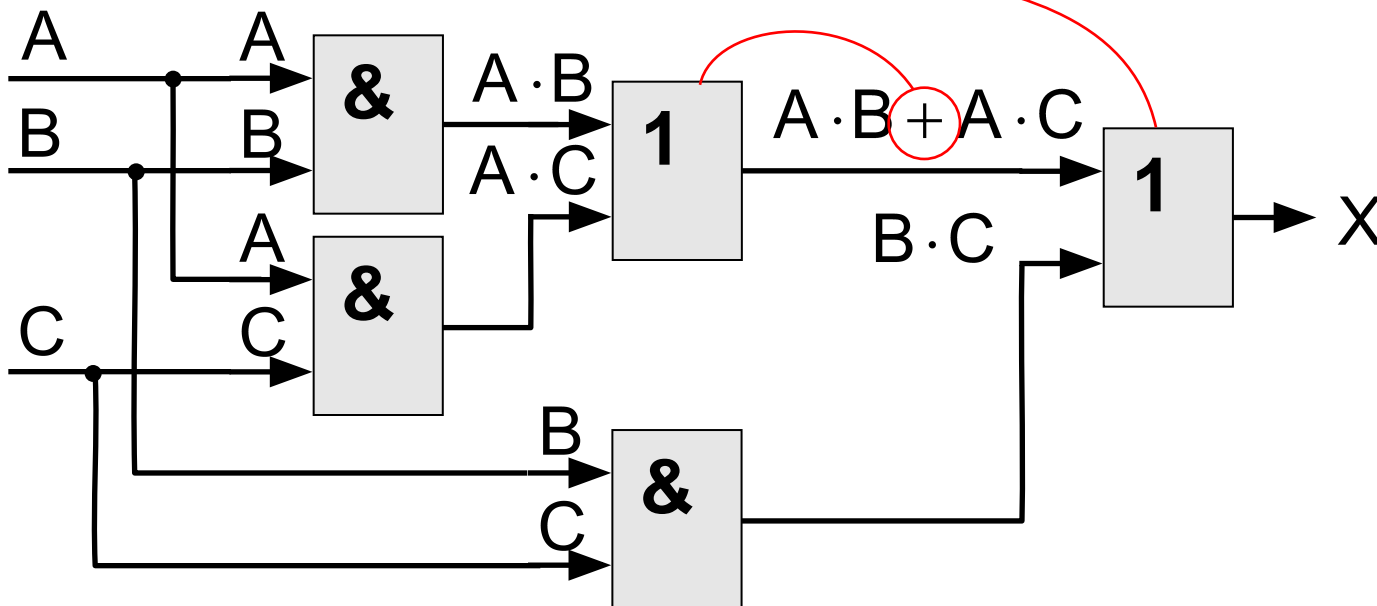
**$\bar{A} \cdot \bar{B} = 1$**

# Логические схемы

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$



Какая последняя операция?



# Математическая логика

## **§ 12. Множества и логика**

# Что такое множество?

**Множество** – некоторый набор элементов, каждый из которых отличается от остальных.

пустое множество:  $\emptyset$

конечное число элементов: буквы русского алфавита

бесконечное число элементов: натуральные числа

## Как задать множество?

- перечислением элементов

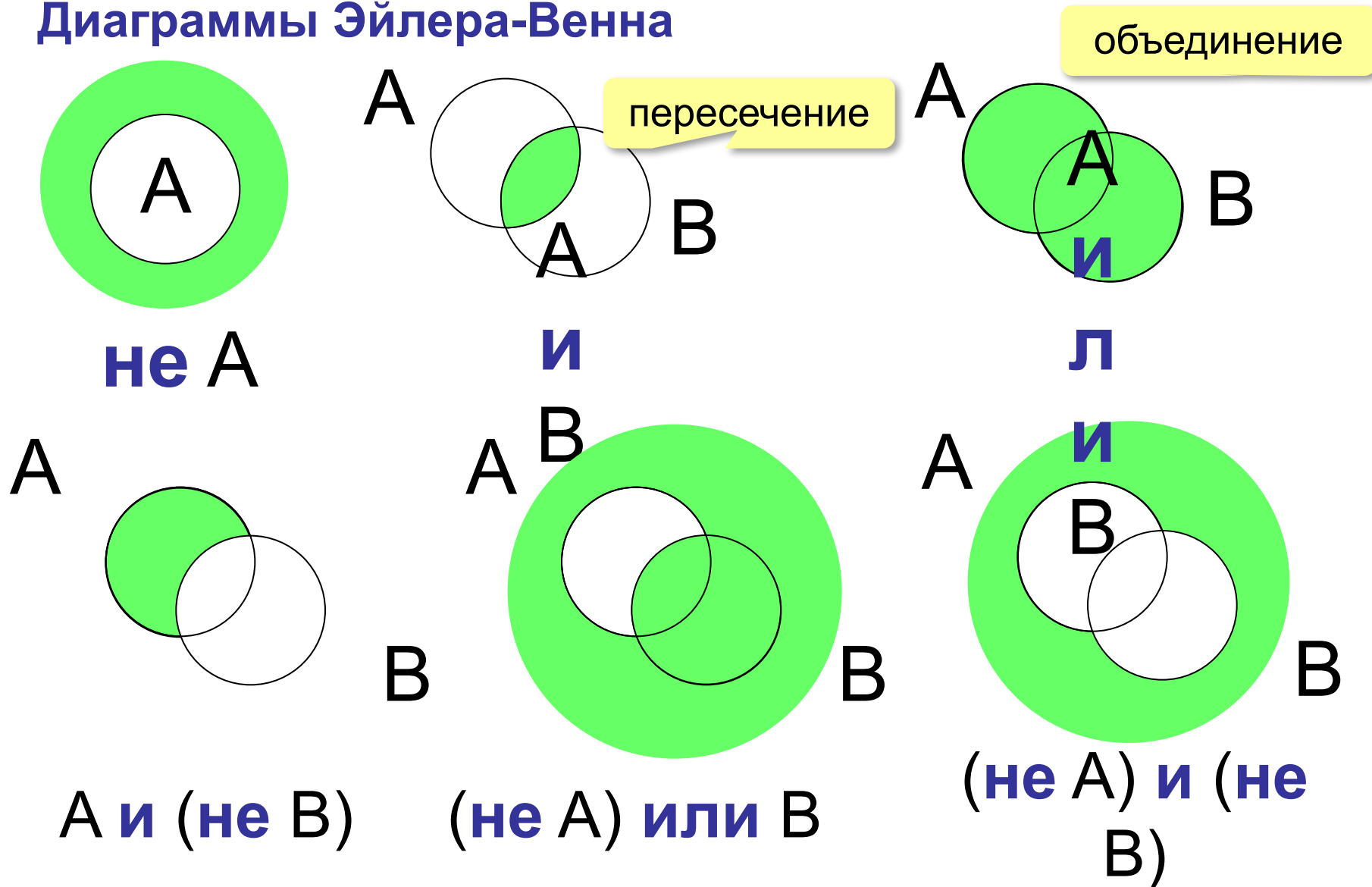
**{Вася, Петя, Коля}**

- логическим выражением:

**$\{x: x > 0\}$**

# Изображение множеств

## Диаграммы Эйлера-Венна





# Количество элементов множеств

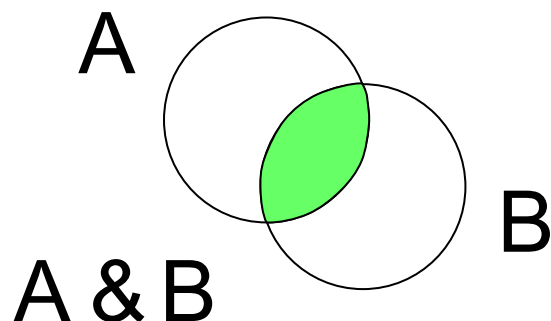
Поисковые запросы в Интернете:

**&** = **и** (and)      **|** = **или** (or)

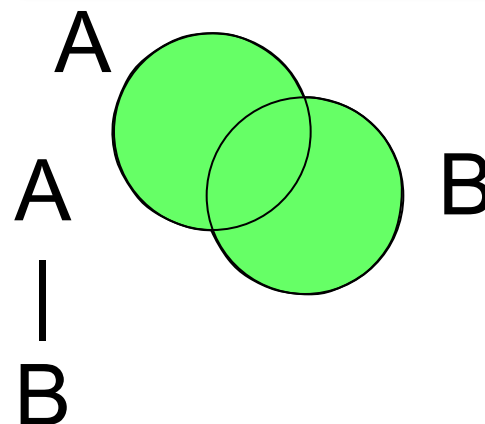
$N_A$  – количество элементов множества A

**?** Что больше?

$$N_A \stackrel{?}{\geq} N_{A \& B}$$



$$N_A \stackrel{?}{\leq} N_{A|B}$$



**!** **&** всегда сужает область, **|** - расширяет!

# Задачи

---

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: принтеры & сканеры & продажа

Б: принтеры | продажа

В: принтеры & продажа

Г: принтеры | сканеры | продажа

**АВБГ**

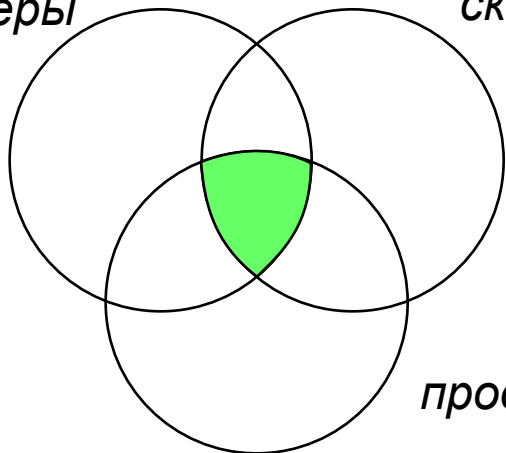
# Использование диаграмм

**принтеры & сканеры & продажа**

*принтеры*

*сканеры*

*продажа*

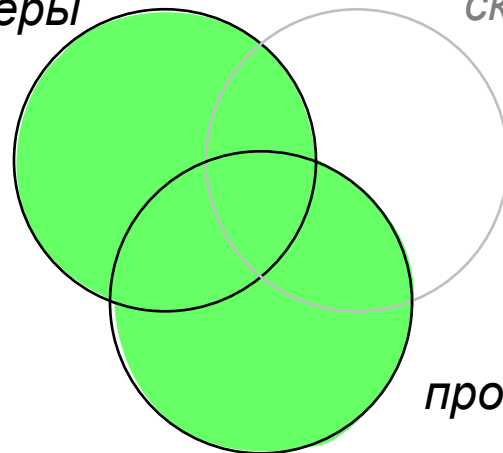


**принтеры | продажа**

*принтеры*

*сканеры*

*продажа*

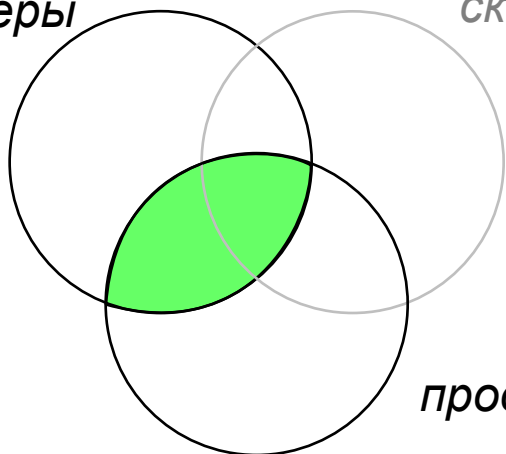


**принтеры & продажа**

*принтеры*

*сканеры*

*продажа*

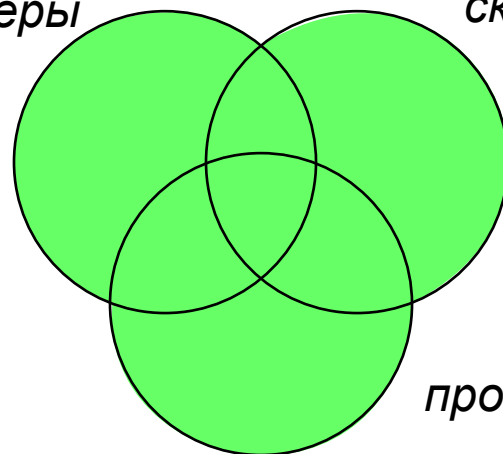


**принтеры | сканеры | продажа**

*принтеры*

*сканеры*

*продажа*



# Задачи

---

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу.

А: **принтеры & сканеры & продажа**

Б: **(принтеры & сканеры) | продажа**

В: **(принтеры | сканеры) & продажа**

Г: **принтеры | сканеры | продажа**

**ГБВА**

# Количество элементов множеств

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сай	$N_A$
огурцы	100	
помидоры	200	$N_B$
огурцы & помидоры	50	$N_{A \& B}$

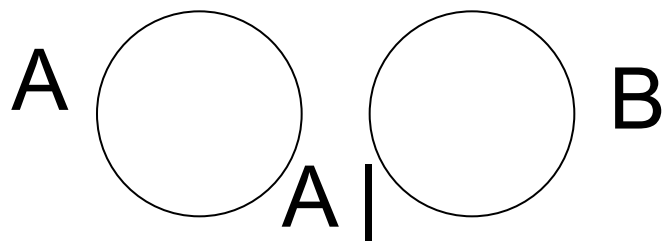
Сколько сайтов будет найдено по запросу

огурцы | помидоры

$N_{A|B}$

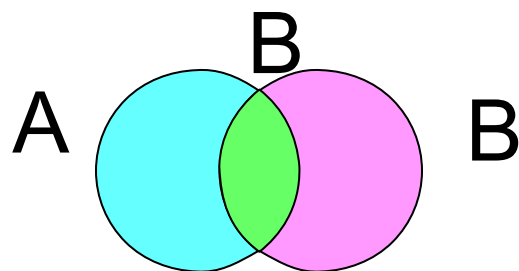
# Количество элементов множеств

В общем виде:



$$N_{A \& B} = 0$$

$$N_{A | B} = N_A + N_B$$



$$N_{A \& B} = \text{green lens}$$

$$N_{A | B} = \text{cyan crescent} + \text{green lens} + \text{magenta crescent}$$

$$N_A + N_B = \text{cyan circle with green crescent} + \text{magenta circle with green crescent} = N_{A | B} + \text{green lens}$$

$$N_{A | B} = N_A + N_B - N_{A \& B}$$

Формула включений  
и исключений

## Задачи с тремя областями

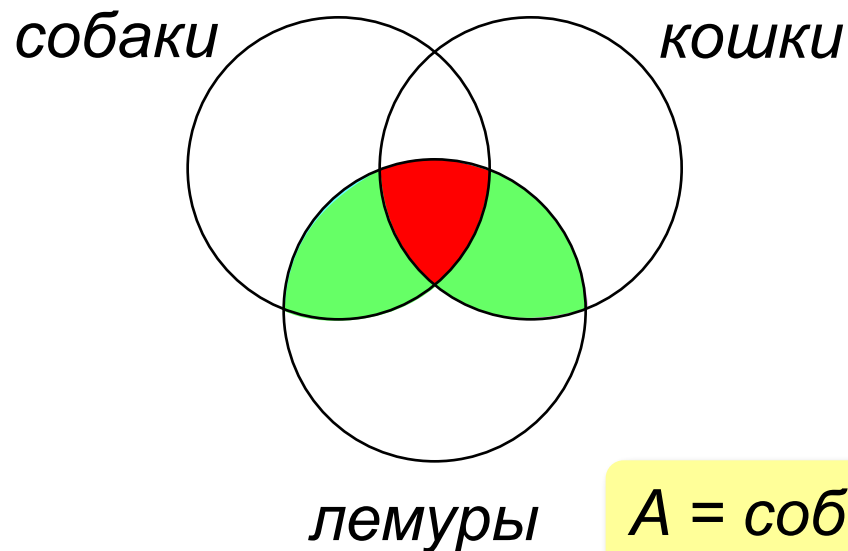
---

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

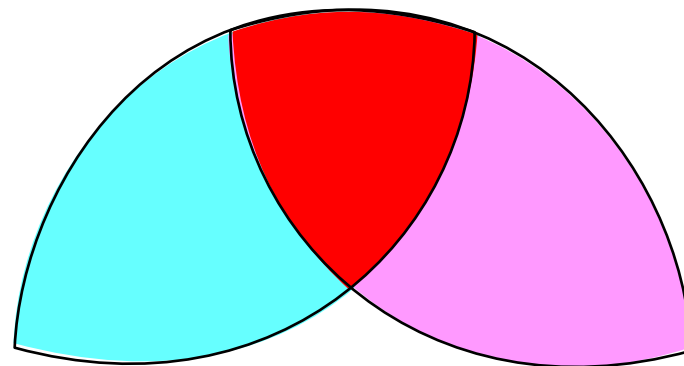
<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<b>собаки &amp; лемуры</b>	<b>320</b>
<b>кошки &amp; лемуры</b>	<b>280</b>
<b>(кошки   собаки) &amp; лемуры</b>	<b>430</b>

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**собаки & кошки & лемуры**

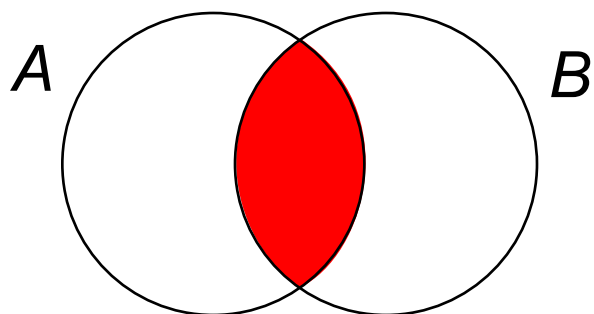
# Задача с тремя областями



$A = \text{собаки \& лемуры}$



$B = \text{кошки \& лемуры}$



$$N_{A\&B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$



## Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	Количество сайтов
<del>собаки &amp; лемуры</del> <b>A</b>	320
<del>кошки &amp; лемуры</del> <b>B</b>	280
<del>(кошки   собаки) &amp; лемуры</del> <b>A   B</b>	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу **A & B**

~~собаки & кошки & лемуры~~



Общее условие с & можно отбросить !

$$N_{A \& B} = N_A + N_B - N_{A|B} = 320 + 280 - 430 = 170$$

## Задачи с тремя областями

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
сканер	200
принтер	250
монитор	450
принтер   сканер	450
принтер & монитор	40
сканер & монитор	50

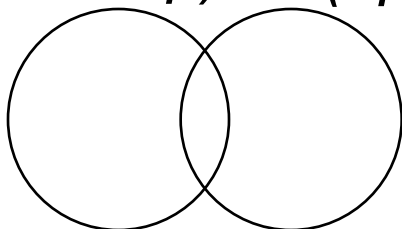
Сколько сайтов будет найдено по запросу  
(принтер | сканер) & монитор



Обычно две области не пересекаются!

# Задачи с тремя областями

A (сканер) B (принтер) 450



принтер | сканер

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A \& B}$$

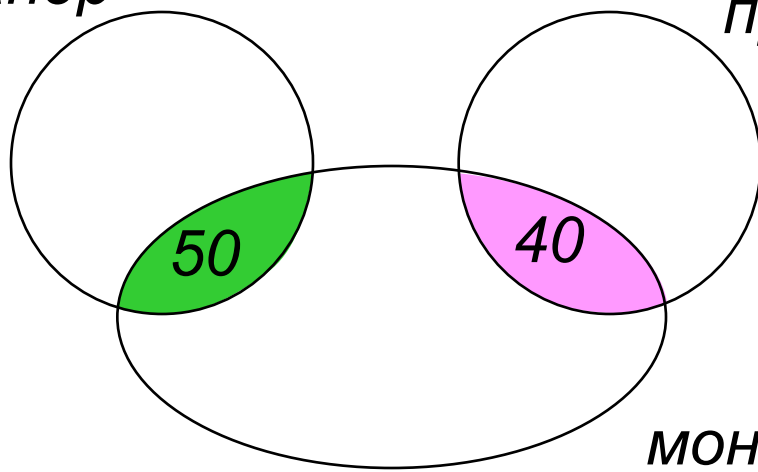
0

сканер 200

принтер 250

сканер

принтер



принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

(принтер | сканер) & монитор

$$40 + 50 = 90$$

# Конец фильма

---

**ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич**

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

[kpolyakov@mail.ru](mailto:kpolyakov@mail.ru)

**ЕРЕМИН Евгений Александрович**

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

[eremin@pspu.ac.ru](mailto:eremin@pspu.ac.ru)

# Источники иллюстраций

---

1. иллюстрации художников издательства «Бином»
2. авторские материалы