Производная функции

- Производные высших порядков
- Производные от функций, заданных параметрически
- Дифференциал функции
- Геометрический смысл дифференциала
- Основные теоремы о дифференциалах
- Применение дифференциала в приближенных вычислениях
- Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях
- Правило Лопиталя

Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от ***x*** и называется ***производной первого порядка***.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается:

$$y''; \quad f''(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Итак: $y'' = (y')'$

Производная от производной второго порядка, если она существует называется ***производной третьего порядка*** и обозначается:

$$y'''; \quad f'''(x); \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

Итак: $y''' = (y'')'$

Производной n – ого порядка (или ***n*** – ой производной) называется производная от производной ***n -1*** - ого порядка.

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'}$$

Производные высших порядков

Начиная от производной 4 порядка , производные обозначаются римскими цифрами или цифрами в скобках:

$y^{(5)}$ или y^{V} - производная пятого порядка.

Вычислить производную ***n*** *– ого порядка от функции:* $y = \ln(x+1)$

$$y' = (\ln(x+1))' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$y'' = \left((x+1)^{-1}\right)' = -1\cdot(x+1)^{-2}; \quad y''' = \left(-(x+1)^{-2}\right)' = 1\cdot 2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(4)} = \left(1\cdot 2(x+1)^{-3}\right)' = -1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$y^{(5)} = \left(-1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}\right)' = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5}$$

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}}$$

Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция ***y = f(x)*** задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная первого порядка от этой функции находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Найдем производную второго порядка:

$$\boxed{y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}$$

Аналогично получаем:

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \qquad y^{(4)}_x = (y'''_x)'_x = \frac{(y'''_x)'_t}{x'_t}$$ и т. д.

Производные от функций, заданных параметрически

Вычислить производную ***3*** *– ого порядка от функции:*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases} \qquad y'_x = \frac{(1-t^3)'}{(t^2)'} = \frac{-3t^2}{2t} = -1.5t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-1.5t)'}{(t^2)'} = \frac{-1.5}{2t} = -0.75t^{-1}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-0.75t^{-1})'}{(t^2)'} = \frac{0.75t^{-2}}{2t} = \boxed{\frac{3}{4t^3}}$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x отличную от нуля производную, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x)\Rightarrow$$

$\left(\text{где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0\right)$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x)\Delta x$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых: $f'(x)\Delta x$ и $\alpha\cdot\Delta x$, являющимися бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$.

При этом первое слагаемое есть бесконечно – малая одного порядка с Δx, так как:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$$

Дифференциал функции

Второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка по сравнению с Δx , так как:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(x) = 0$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют ***главной частью приращения функции.***

Дифференциалом функции *y = f(x)* в точке *x* называется главная часть ее приращения:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Найдем дифференциал независимой переменной, то есть функции $y = x$:

$$y' = x' = 1 \implies dy = \boxed{dx = \Delta x}$$

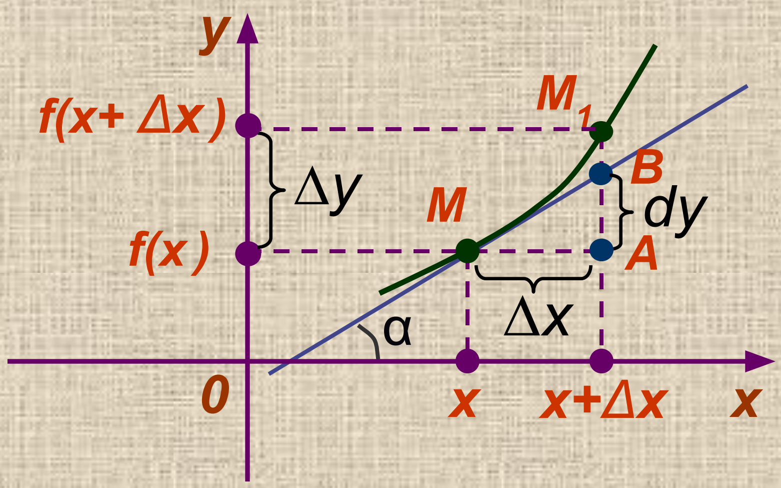
Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной

Поэтому: $\boxed{dy = f'(x)dx}$ $\implies f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной

Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции *y = f(x)* в точке **M(x, y)** касательную



Рассмотрим ординату касательной для точки ***x+Δx.***

Из прямоугольного треугольника ***ABM*** имеем:

$$tg\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$|AB| = tg\alpha \cdot \Delta x$$

Согласно геометрическому смыслу производной, $tg\alpha = f'(x) \Rightarrow$

$$|AB| = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Дифференциал функции *y = f(x)* в точке *x* равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда *x* получает приращение ***Δx.***

Основные теоремы о дифференциалах

Теорема 1 Дифференциал суммы, разности, произведения и частного двух дифференцируемых функций находится по формулам:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Теорема 2 Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \Rightarrow \underbrace{y'_x \cdot dx}_{dy} = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx}_{du} \Rightarrow$$

$$dy = y'_u \cdot du$$

*Это свойство дифференциала называют **инвариантностью** (неизменностью) формы дифференциала.*

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Как известно, приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x$$

Отбрасывая бесконечно малую $\alpha(x)\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получим приближенной равенство:

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

Это равенство позволяет с большой точностью вычислять приращение любой дифференцируемой функции.

Подставим в равенство выражения для приращения и дифференциала функции:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

Формула позволяет приближенно вычислять значение функции в точке $\boldsymbol{x_0+\Delta x}$, зная значение функции в точке $\boldsymbol{x_0}$.

Приложение дифференциала в приближенных вычислениях

Вычислить приближенно: $arctg 1.05$

Рассмотрим функцию: $y = arctg\ x$

$$arctg(x_0 + \Delta x) \approx arctg(x_0) + arctg'(x_0)\Delta x$$

Так как $x_0 + \Delta x = 1.05$ *то* $x_0 = 1$ $\Delta x = 0.05$

$$arctg\,1 = \frac{\pi}{4} \qquad (arctg\ x)' = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (arctg\ x)'\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$arctg(1.05) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0.05 \approx \boxed{0.81}$$

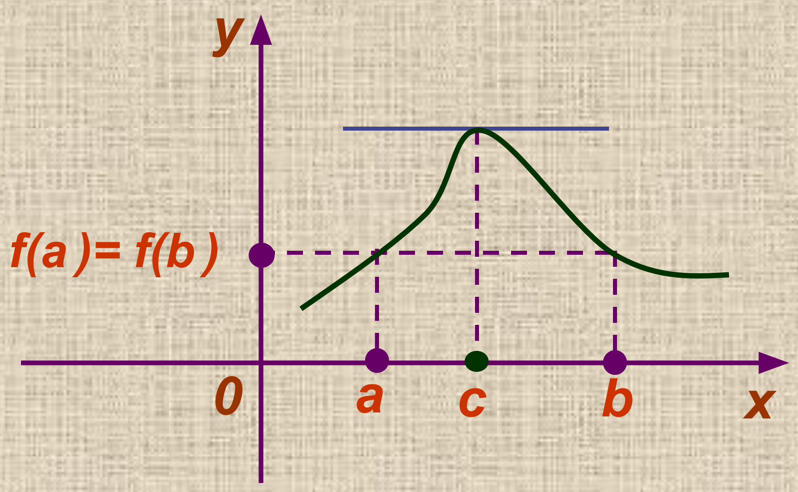
Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля (теорема о корнях производной)

Если функция ***f(x)*** непрерывна на отрезке **[*a; b*]**, дифференцируема на интервале ***(a; b)*** и на концах интервала принимает одинаковые значения ***f(a) = f(b)***, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная обращается в ноль.

$$f'(c) = 0$$

Геометрическая интерпретация:



Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то на графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси OX.

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Коши (теорема об отношении приращений)

Если функции ***f(x)*** и ***g(x)*** непрерывны на отрезке **[*a; b*],** дифференцируемы на интервале ***(a; b)***, причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$,то найдется холя бы одна точка $c \in (a;b)$, такая, что выполняется равенство:

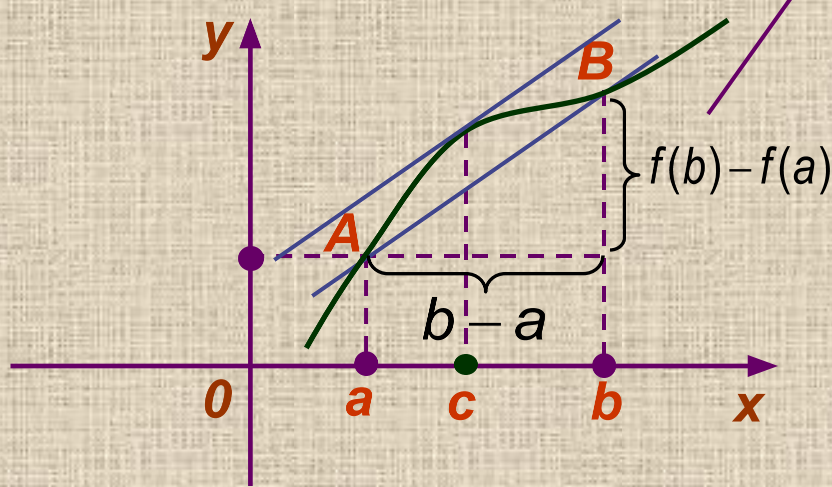
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

На графике функции найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна хорде AB

Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях)

Если функция ***f(x)*** непрерывна на отрезке **[*a; b*],** дифференцируема на интервале ***(a; b)*** ,то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой выполняется равенство:

$$f(b)-f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$$



Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, который основан на применении производной.

Теорема

Пусть функции ***f(x)*** и ***g(x)*** непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$ то $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A}$$

Теорема справедлива также в случае, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tg5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(tg3x)'}{(tg5x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5} =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty)$$

Обозначим: $A = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Прологарифмируем равенство: $\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \Rightarrow$

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos 2x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{2x} = -2$$

$$\ln A = -2 \Rightarrow A = \boxed{e^{-2}}$$