

Математический анализ

ЛЕКЦИИ № 11-12

**ФУНКЦИИ
ПЕРЕМЕННЫХ**

НЕСКОЛЬКИХ

§ 1. Основные понятия о функциях нескольких переменных

До сих пор мы изучали функцию одной переменной, т.е. когда значение одной переменной зависит от значения другой независимой переменной. Можно привести много примеров, когда независимых переменных оказывается несколько. Так площадь прямоугольника $S = a \cdot b$ изменяется с изменением длин его сторон a и b , объем цилиндра $V = \pi r^2 h$ изменяется с радиусом основания r и высотой цилиндра h , объем прямоугольного параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$ изменяется с изменениями трех его измерений a , b , c и т.д.

Пусть дано некоторое множество D упорядоченных пар чисел (x, y) .

Величина z называется функцией двух переменных x и y , если существует правило или закон, по которому каждой паре чисел $(x, y) \in D$ соответствует вполне определенное значение z .

Переменные x и y называются независимыми переменными или аргументами. Область D называется областью определения функции. Обозначение функции двух переменных:

$$z = f(x, y), \quad z = z(x, y), \quad z = F(x, y) \quad \text{и т.д.}$$

Функцию $z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$ плоскости OXY и обозначить $z = f(M)$.



Переменная величина U называется функцией нескольких независимых переменных, если каждой системе значений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этих переменных из данной области их значения соответствует единственное значение величины U .

Обозначение:

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1, x_2, \dots, x_n - \text{аргументы функции.}$$

Областью определения D функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ может быть вся плоскость или ее часть, ограниченная некоторыми линиями – границами области. Точки области, не лежащие на границе, называются внутренними.

Область называется открытой, если она состоит только из внутренних точек.

Область с присоединенной к ней границей называется замкнутой и обозначается $\bar{D}$.

Область называется ограниченной, если существует такое число $C > 0$, что расстояние любой точки M области от начала координат меньше C , т.е. $|OM| < C$.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение.

Для того, чтобы значения функции z были действительными числами, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т.е.

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1.$$



Уравнением границы области является окружность $x^2 + y^2 = 1$.
 $\bar{D}$ - замкнутая, ограниченная область (рис.1).

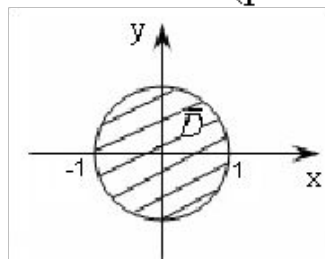


Рисунок 1

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y) плоскости OXY , в которых функция принимает одно и то же значение C . При различных C получаются различные линии уровня для данной функции (рис.2).

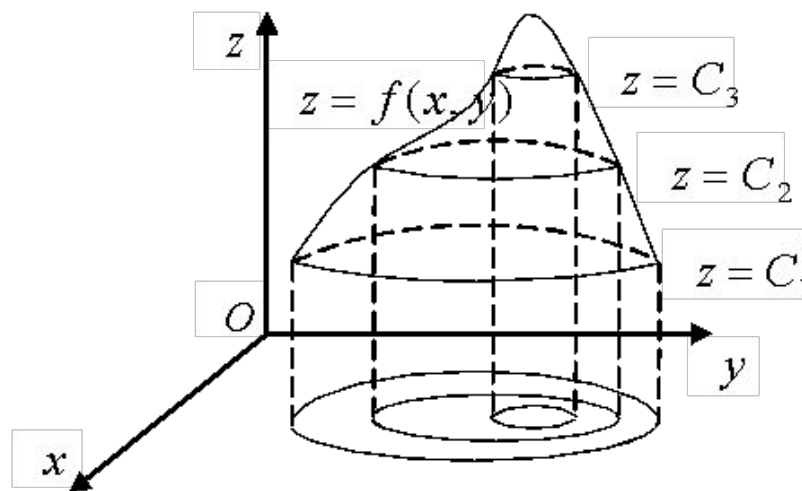


Рисунок 2

§ 2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

δ -о к р е с т н о с т ь ю точки $M_0(x_0, y_0)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

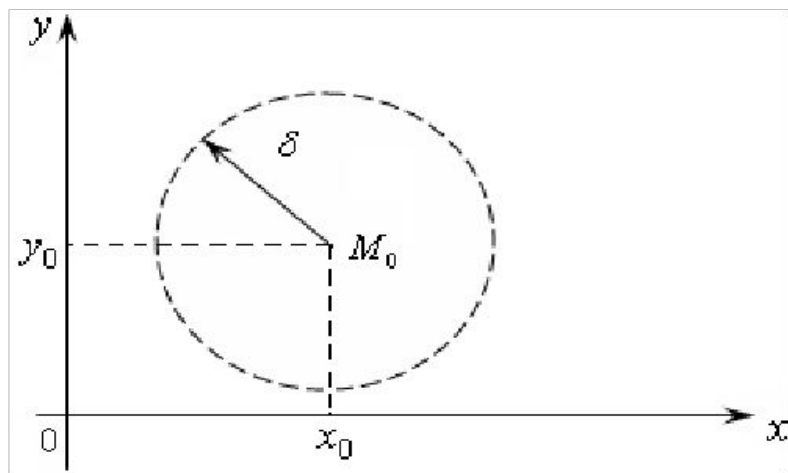


Рисунок 3

Пусть $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме быть может, самой этой точки.

Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ (т.е. при $M(x, y) \rightarrow M(x_0, y_0)$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ или $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$.

Основные свойства предела функции двух переменных аналогичны свойствам предела функции одной переменной.

Примеры. Найти пределы:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y - 2)^2} &= \left| M(x, y) \rightarrow M_0(0; 2) \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1)(\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \left| M(x, y) \rightarrow O(0;0) \right|_{y=kx, k=const} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Т.к. при различных значениях k предел функции различный, следовательно, данная функция в точке $O(0;0)$ предела не имеет.

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) если выполняется три условия:

1) существует $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

2) существует значение функции в точке (x_0, y_0)

3) эти два числа равны между собой, т.е. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$

Практически исследовать непрерывность функции можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Любая элементарная функция $z = f(x, y)$ непрерывна во всех внутренних (т.е. не граничных) точках своей области определения.



§ 3 Частные производные

3.1 Частные производные от функции в явном виде

Считая $y = \text{const}$, дадим x приращение Δx ($x + \Delta x \in D$). Получим частное приращение функции z по x , т.е.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично частное приращение z по y

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если дать x и y соответственно приращения Δx и Δy , то получим полное приращение функции z

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \quad (1)$$

Следует отметить, что в общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке

$M(x, y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x .



Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная от функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M(x, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные функции $z = f(x, y)$ находят по формулам вычисления производных функции одной переменной, при этом другая переменная считается постоянной.

Примеры. Для указанных функций найти частные производные.

1) $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x^2y + 3xy^2 + x^3)'_x = \left| y = const \right| = 4xy + 3y^2 + 3x^2,$$

Рассматривая x как постоянную величину, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x^2y + 3xy^2 + x)'_y = \left| x = const \right| = 2x^2 + 6xy.$$



2) $z = \arctg \frac{y}{x}$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{x(1 + (y/x)^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

3) $z = xe^{-xy}$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xe^{-xy})'_x = (x)'_x e^{-xy} + x(e^{-xy})'_x = e^{-xy} - xye^{-xy} = e^{-xy}(1 - xy),$$

Рассматривая x как постоянную величину, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xe^{-xy})'_y = -x^2 e^{-xy}.$$



3.2 Дифференцирование неявной функции $F(x, y, z) = 0$

Функция $z = f(x, y)$ называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, неразрешимым относительно z .

При условии существования и непрерывности F, F'_x, F'_y, F'_z имеем

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad F'_z \neq 0.$$

Для функции двух переменных $F(x, y) = 0$, $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Пример.

а) $x^2 y^3 - \cos y = 0$.

$$F'_x = 2xy^3, \quad F'_y = 3x^2 y^2 + \sin y \Rightarrow y'_x = -\frac{2xy^3}{3x^2 y^2 + \sin y}$$

б) $x^2 y - e^{xz} = 0$

$$F'_x = 2xy - e^{xz} z, \quad F'_y = x^2, \quad F'_z = -e^{xz} x \Rightarrow z'_x = \frac{2xy - e^{xz} z}{xe^{xz}}; \quad z'_y = \frac{x}{e^{xz}}.$$



3.3 Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y) \in D$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$ - дифференцируемые функции независимой переменной t , то производная сложной функции $z = f(x(t), y(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

В частности, если $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Общий случай: $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда $z = f(x(u, v), y(u, v))$ - сложная функция независимых переменных u и v .

Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$



§ 4 Понятие дифференцируемости функции. Полный дифференциал функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, тогда полное приращение этой функции в точке M имеет вид:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x, y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции).

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$,

причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.



Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке, то она дифференцируема в этой точке.

Известно, если функция дифференцируема в точке $M(x, y)$, то имеет место соотношение

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где α, β - бесконечно малые функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Главная линейная часть относительно Δx и Δy полного приращения функции Δz в точке $M(x, y)$ называется **полным дифференциалом** функции $z = f(x, y)$ и обозначается:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Теорема. Если $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то её полный дифференциал равен:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$



§ 5 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой области D имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Будем называть их частными производными первого порядка.

Частные производные первого порядка можно рассматривать как функции от двух переменных x и y . Если эти функции дифференцируемы в точке (x, y) области D , то их частные производные называются частными производными второго порядка и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y),$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y).$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются смешанными частными производными.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x, y)$ и ее окрестности непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то они в этой точке равны, т.е. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференциалы второго, третьего и т.д. порядков от функции $z = f(x, y)$ определяются формулами $d^2 z = d(dz)$, $d^3 z = d(d^2 z)$ и т.д.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

