

# Логические законы и правила преобразования логических выражений



# Основные законы формальной логики

- Закон тождества

$$A = A$$

- Закон  
непротиворечия

$$A \& \neg A = 0$$

- Закон исключения  
третьего

$$A \vee \neg A = 1$$

- Закон двойного  
отрицания

$$\neg \neg A = A$$

- В процессе рассуждения нельзя подменять одно понятие другим
- Не могут быть одновременно истинными суждение и его отрицание
- Высказывание может быть либо истинным либо ложным, третьего не дано
- Если отрицать дважды некоторое суждение, то получается исходное суждение

# Свойства констант

---

- $\neg 0 = 1$        $\neg 1 = 0$
- $A \vee 0 = A$        $A \& 0 = 0$
- $A \vee 1 = 1$        $A \& 1 = A$

# Законы алгебры логики

---

- Идемпотентность

$$A \vee A = A \quad A \& A = A$$

- Коммутативность

$$A \vee B = B \vee A \quad A \& B = B \& A$$

- Ассоциативность

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$$

---

# Законы алгебры логики

---

- **Дистрибутивность**

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

- **Поглощение**

$$A \vee (A \& B) = A \quad A \& (A \vee B) = A$$

- **Законы де Моргана**

$$\neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B \quad \neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$$

---

# Огастес де МОРГАН



Морган Огастес (Августус) де (27.6.1806-18.3. 1871) - шотландский математик и логик. Секретарь Королевского астрономического общества (1847г.), член Лондонского королевского общества. Первый президент Лондонского математического общества. Родился в Мадуре (Индия). Учился в Тринити-колледж (в Кембридже). Профессор математики в университетском колледже в Лондоне. Основные труды по алгебре, математическому анализу и математической логике. В теории рядов описал логарифмическую шкалу для критериев сходимости; занимался теорией расходящихся рядов. Один из основателей формальной алгебры. Продолжая работы Дж. Пикока, Морган в 1841-1847 гг. опубликовал ряд работ по основам алгебры. В трактате "Формальная логика или исчисление выводов необходимых и возможных" (1847г.), Морган некоторыми своими положениями опередил Дж. Буля. Позднее Морган успешно изучал логику отношений - область, не охваченную исследованиями предшественников. Написал много исторических работ, в частности книгу "Бюджет парадоксов" (1872г.). Большой вклад внес также в дедуктивную логику вообще и математическую в частности. Лондонское математическое общество учредило медаль им. О. Моргана.

# Правила замены операций

- Импликации

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee B \quad A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow A$$

- Эквивалентности

$$A \Leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$$

# Упрощение сложных высказываний

---

- - это замена их на **равносильные** на основе **законов** алгебры высказываний с целью получения высказываний более **простой формы**
-



# Основные приемы замены

---

- $X = X \wedge 1$  ] - По свойствам констант
- $X = X \vee 0$  ]
- $1 = A \vee \neg A$  - По закону исключения третьего
- $0 = B \wedge \neg B$  - По закону непротиворечия
- $Z = Z \vee Z \vee Z$  - По закону
- $C = C \wedge C \wedge C$  идемпотентности
- $E = \neg \neg E$  - По закону двойного отрицания

# Пример

Упростить:  $A \wedge B \vee A \wedge \neg B$

По закону дистрибутивности вынесем  $A$  за скобки

$$A \wedge B \vee A \wedge \neg B = A \wedge (B \vee \neg B) = A \wedge 1 = A$$

Упростить:  $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

Упростить:  $\neg(\neg X \vee \neg Y)$

## Задание 2. Упростите логическое выражение

$$F = (A \vee B) \rightarrow \overline{(B \vee C)}.$$

- Избавимся от импликации и отрицания. Воспользуемся ( $\overline{(A \rightarrow B)} = A \& \neg B$ ). Получится:  $\neg((A \vee B) \rightarrow \neg(B \vee C)) = (A \vee B) \& \neg(\neg(B \vee C))$ .
- Применим закон двойного отрицания, получим:  $(A \vee B) \& \neg(\neg(B \vee C)) = (A \vee B) \& (B \vee C)$ .
- Применим правило дистрибутивности ( $(A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$ ). Получим:  $(A \vee B) \& (B \vee C) = (A \vee B) \& B \vee (A \vee B) \& C$
- Применим закон коммутативности ( $A \& B = B \& A$ ) и дистрибутивности (16). Получим:  $(A \vee B) \& B \vee (A \vee B) \& C = A \& B \vee B \& B \vee A \& C \vee B \& C$ .
- Применим ( $A \& A = A$ ) и получим:  $A \& B \vee B \& B \vee A \& C \vee B \& C = A \& B \vee B \vee A \& C \vee B \& C$
- Применим ( $(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$ ), т.е. вынесем за скобки B. Получим:  $A \& B \vee B \vee A \& C \vee B \& C = B \& (A \vee 1) \vee A \& C \vee B \& C$ .
- Применим ( $A \vee 1 = 1$ ). Получим:  $B \& (A \vee 1) \vee A \& C \vee B \& C = B \vee A \& C \vee B \& C$ .
- Переставим местами слагаемые, сгруппируем и вынесем B за скобки. Получим:  $B \vee A \& C \vee B \& C = B \& (1 \vee C) \vee A \& C$ .
- Применим ( $A \vee 1 = 1$ ) и получим ответ:  $B \& (1 \vee C) \vee A \& C = B \vee A \& C$ .

# Закрепление изученного

## №1 №1.

Упростите выражение:

1.  $F = \neg(A \& B) \vee \neg(B \vee C)$ .
2.  $F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ .
3.  $F = A \& C \vee \bar{A} \& C$ .
4.  $F = \square A \vee \square B \vee \square C \vee A \vee B \vee C$

## №2

Упростите выражение:

1.  $F = \neg(X \& Y \vee \neg(X \& Y))$ .
2.  $F = \square X \& \neg(\square Y \vee X)$ .
3.  $F = (X \vee Z) \& (X \vee \square Z) \& (\square Y \vee Z)$ .

*Ответы к № 1:*

1.  $F = \neg (A \& B) \vee \neg (B \vee C) = \square A \vee \square B.$
2.  $F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) = 1.$
3.  $F = A \& C \vee \bar{A} \& C = C.$
4.  $F = \square A \vee \square B \vee \square C \vee A \vee B \vee C = 1.$

*Ответы к № 2:*

1.  $F = \neg (X \& Y \vee \neg (X \& Y)) = 0.$
2.  $F = \square X \& \neg (\square Y \vee X) = \square X \& Y.$
3.  $F = (X \vee Z) \& (X \vee \square Z) \& (\square Y \vee Z)$   
 $= X \& (\square Y \vee Z).$

# ДОМАШНЯЯ РАБОТА

Упростите логические выражения:

- $X \& X \& 1$
- $F = \text{не } (X \text{ и } (\text{не } X \text{ и } \text{не } Y))$
- $F = B \& (A \vee A \& B)$
- $0 \& X \vee 0$
- $F = \text{не } X \text{ или } (\text{не } (X \text{ и } Y \text{ и } \text{не } Y))$
- $F = (A \vee C) \& (A \vee C) \& (B \vee C)$
- $0 \vee X \& 1$
- $F = \text{не } X \text{ и } (\text{не}(\text{не}Y \text{ или } X))$
- $F = A \& B \vee A \& B \vee A \& B \vee B \& C$

# РЕФЛЕКСИЯ

---

: - ) - радостное лицо

: - ( - грустное лицо

; - ) - подмигивающая улыбка

: 0 ) - клоун

8:-) - маленькая девочка

---

- Если вы считаете, что хорошо поработали, справились с заданием и урок вам понравился, то нарисуйте улыбающийся смайлик

: - ))

- Если вы довольны результатами вашей работы, но урок вам не понравился, то нарисуйте

: - )

- Если урок вам понравился, но вы не успели справиться со всеми заданиями, то нарисуйте

: - |

- Если урок вам не понравился и вы недовольны результатами своей работы на уроке, то нарисуйте

: - (