ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

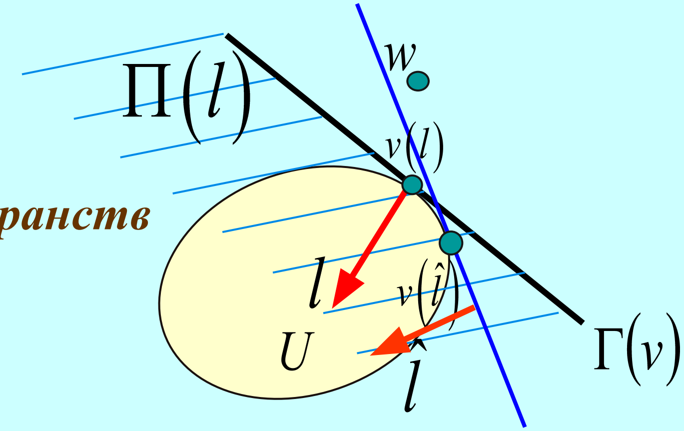
ЛЕКЦИЯ 18

6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

6. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

6.4. Некоторые следствия из теорем об отделимости выпуклых множеств.

6.4. Некоторые следствия из теорем об отделимости выпуклых множеств. Всякое выпуклое множество полностью определяется своими опорными полупространствами. Именно, справедлива следующая теорема.



Теорема 5. ***Выпуклое компактное множество*** U ***совпадает с пересечением всех своих опорных полупространств (перебор производится по всем*** $l\in S(0,1)$ ***).***

Доказательство. Требуется доказать, что

$$U = \bigcap_{l\in S(0,1)} \Pi(l),$$

где $\Pi(l)-$ опорное полупространство в направлении вектора $l \in S(0,1)$. Вложение $U \subset \bigcap\limits_{l\in S(0,1)} \Pi(l)$ очевидно. Действительно, для всех $u\; l\in US \quad \in \quad (0,1)$ из равенства (2.3) $\Pi(l)=\left\{u\in R^n \middle| \overset{u\in U}{\langle l,u\rangle} \geq \min\limits_{v\in U}\langle l,\ v\rangle\right\}$ (2.3) выводим $u\in\Pi(l)$.

Пусть теперь нашлась точка $w\in \bigcap\limits_{l\in S(0,1)} \Pi(l)$ такая, что $w\notin U=\bar{U}$.

Тогда по **теореме 2** найдется вектор $\hat{l}\in S(0,1)$, удовлетворяющий условию

Теорема 2

$$\left\langle \hat{l},\ u\right\rangle \ge \left\langle \hat{l},\ w\right\rangle + \left\|\hat{l}\right\|^2,\ \forall\ \ u\in U \Rightarrow \left\langle \hat{l},\ \overset{v(\hat{l})}{u}\right\rangle > \left\langle \hat{l},\ w\right\rangle,\ \forall\ \ u\in U.$$

В частности, при

опорное в направлении $\hat{l}$ множество

$$u = v\left(\hat{l}\right)\in V\left(\hat{l}\right) = \left\{ v\left(\hat{l}\right)\in U \,\middle|\, \left\langle l,\ v\left(\hat{l}\right)\right\rangle = \min_{v\in U}\left\langle \hat{l},\ v\right\rangle \right\}$$

отсюда следует

$$\left\langle \hat{l},\ v\left(\hat{l}\right)\right\rangle > \left\langle \hat{l}, w\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle \hat{l}, w\right\rangle < \left\langle \hat{l},\ v\left(\hat{l}\right)\right\rangle \overset{\substack{\text{определение}\\ v(\hat{l})}}{=} \min_{v\in U}\left\langle \hat{l},\ v\right\rangle.$$

Последнее неравенство противоречит включению

сделанное предположение

$$w \in \bigcap_{l\in S(0,1)} \Pi(l) \subset \Pi\left(\hat{l}\right) = \left\{ u\in R^n \,\middle|\, \left\langle \hat{l}, u\right\rangle \ge \min_{v\in U}\left\langle \hat{l},\ v\right\rangle \right\} \Rightarrow \left\langle \hat{l}, w\right\rangle \ge \min_{v\in U}\left\langle \hat{l},\ v\right\rangle.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***- выпуклый компакт. Тогда***

$$w\in U \Leftrightarrow \left\langle l, w\right\rangle \le \chi_U(l), \forall l\in S(0,1). \qquad \chi_U(l) = \max_{u\in U}\left\langle u, l\right\rangle$$

Необходимость очевидна.

Проверим ***достаточность***.

$$\langle w,l\rangle \le \chi_U(l) = \max_{u\in U}\langle u,l\rangle = -\min_{u\in U}\left(-\langle u,l\rangle\right) = -\min_{u\in U}\langle u,-l\rangle \ \forall l \in S(0,1) \Rightarrow$$

$$\langle w,l\rangle \le -\min_{u\in U}\langle u,-l\rangle \ \forall l \in S(0,1).$$

Умножим полученное неравенство на (-1). Тогда

$$\langle w,-l\rangle \ge \min_{u\in U}\langle u,-l\rangle \ \forall l \in S(0,1).$$

В последнем неравенстве заменим $-l$ на $l.$ В результате получим

$$\langle w,l\rangle \ge \min_{u\in U}\langle u,l\rangle \ \forall l \in S(0,1).$$

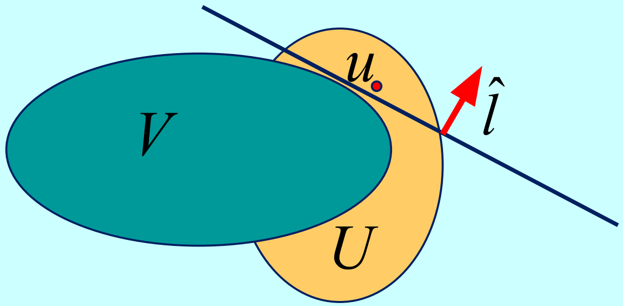
$$\Pi(l) = \left\{u \in R^n \,\middle|\, \langle l,u\rangle \ge \min_{v\in U}\langle v,l\rangle\right\} \quad (2.3)$$

Последнее означает, что точка w принадлежит всем опорным полупространствам множества U и, по **теореме 5**, самому множеству U. Теорема доказана.

Теорема 7. ***Пусть*** $U,V \subset R^n$ ***- выпуклые компакты. Вложение*** $U \subset V$ ***имеет место тогда и только тогда, когда***

$$\chi_U(l) \le \chi_V(l), \forall l \in S(0,1). \qquad (1)$$

Необходимость очевидна. Проверим **достаточность.** От противного приходим к существованию точки $u \in U,$ для которой $u \notin V.$ По **теореме 6** найдется вектор



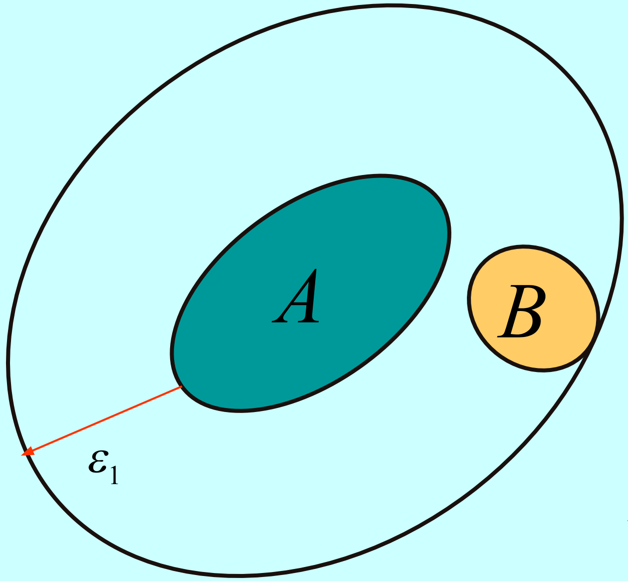
$\hat{l} \in S(0,1),$ что $\langle u, \hat{l} \rangle > \chi_V(\hat{l}).$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств

$$\chi_U(\hat{l}) = \max_{u \in U} \langle u, \hat{l} \rangle \geq \langle u, \hat{l} \rangle > \chi_V(\hat{l}),$$

что противоречит (1). $\chi_U(l) \leq \chi_V(l), \forall l \in S(0,1). \quad (1)$ Теорема доказана.

Упражнение. Пусть $A, B \subset R^n, \quad A \cap B = \varnothing.$ Вывести формулу для вычисления величины $\varepsilon_1 = \min \left\{ \alpha \middle| B \subset \overline{A^\alpha} \neq \varnothing \right\}.$



Решение.

Величина ε_1 – наименьшее из положительных чисел $\varepsilon,$ удовлетворяющих неравенству

$$\chi_B(l) \leq \chi_{\overline{A^\varepsilon}}(l), \forall l \in S(0,1) \Rightarrow$$

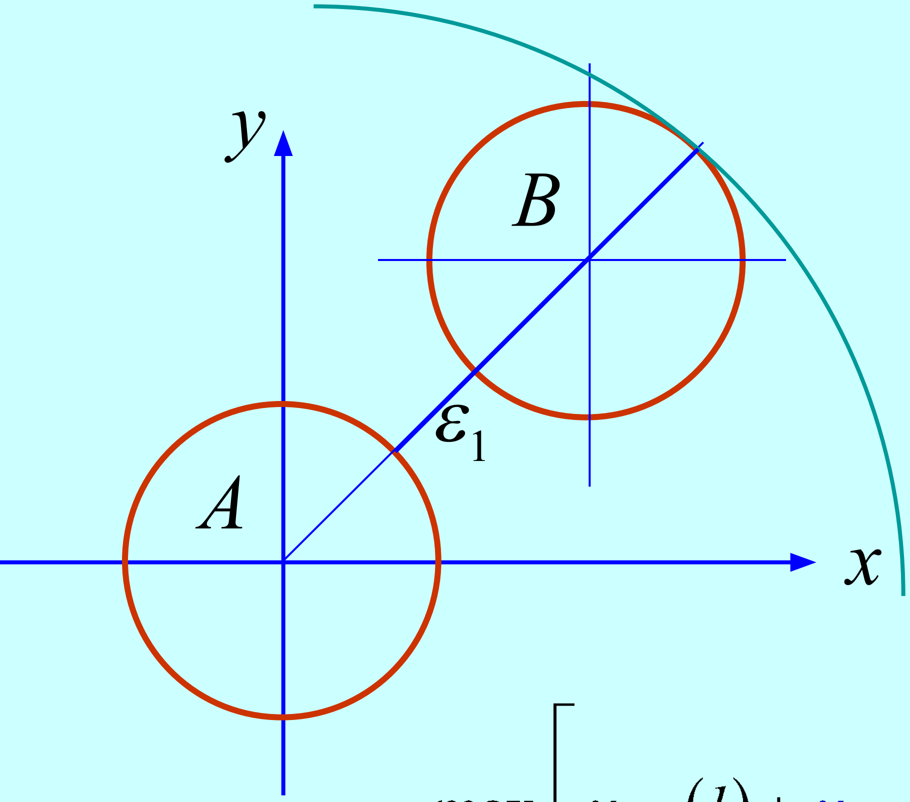
$$\chi_B(l) \leq \chi_{A+\bar{O}(0,\varepsilon)}(l) = \chi_A(l) + \chi_{\bar{O}(0,\varepsilon)}(l) \Rightarrow$$

$$\chi_B(l) \leq \chi_A(l) + \varepsilon \Rightarrow \ \varepsilon \geq \chi_B(l) - \chi_A(l) \ \forall l \in S(0,1).$$

$$\varepsilon \ge \chi_B(l) - \chi_A(l)\ \forall l \in S(0,1) \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \max_{\|l\|=1}\left[\chi_B(l) - \chi_A(l)\right].$$

Упражнение. Проверить полученную формулу для множеств

$$A = \bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right) \in R^2, \quad B = \bar{O}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},1\right) \in R^2$$



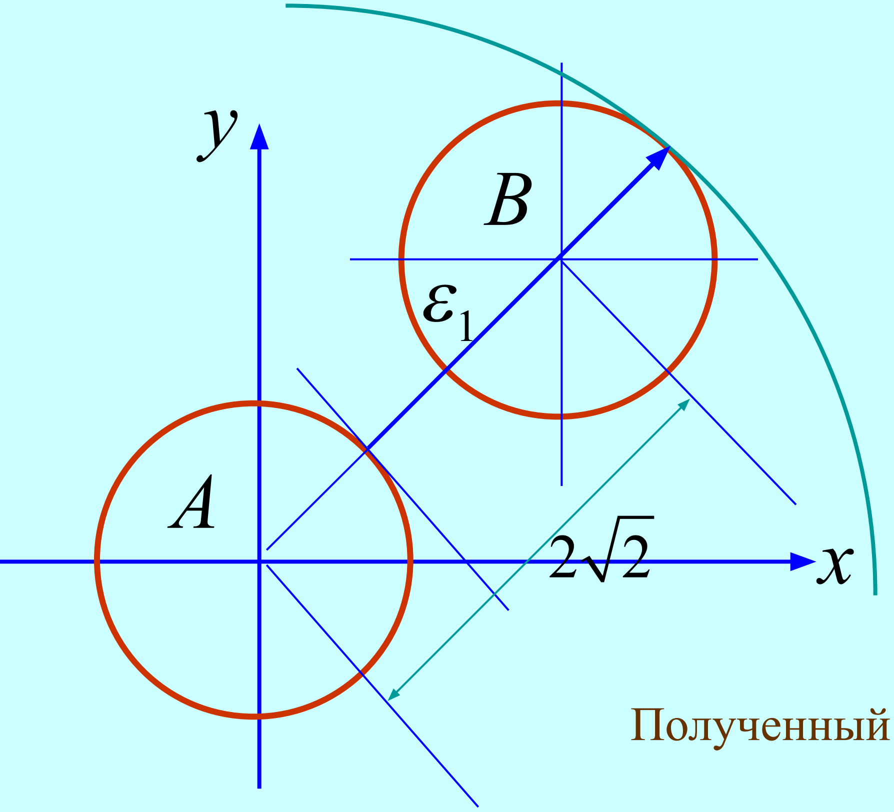
Решение.

$$\varepsilon_1 = \max_{\|l\|=1}\left[\chi_B(l) - \chi_A(l)\right] =$$

$$= \max_{l_1^2+l_2^2=1}\left[\chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},1\right)}(l) - \chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)}(l)\right] =$$

$$= \max_{l_1^2+l_2^2=1}\left[\chi_{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)}(l) - \chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)}(l)\right] =$$

$$= \max_{l_1^2+l_2^2=1}\left[\chi_{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}(l) + \chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)}(l) - \chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)}(l)\right] = \max_{l_1^2+l_2^2=1}\chi_{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}(l) =$$



$$= \max_{l_1^2+l_2^2=1} \chi_{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}(l) =$$

$$\max_{l_1^2+l_2^2=1} \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 2\max_{l_1^2+l_2^2=1} \left[l_1 + l_2 \right] = 2\sqrt{2}.$$

Полученный результат полностью согласуется с рисунком.

Следствие 1. ***Пусть*** $U, V \subset R^n$ ***- выпуклые компакты. Равенство*** $U = V$ ***имеет место тогда и только тогда, когда***

$$\chi_U(l) = \chi_V(l), \forall l \in S(0,1).$$

Доказательство. Вытекает из утверждения

$$U = V \Leftrightarrow (U \subset V) \overset{\text{логическое}}{\wedge} (V \subset U).$$

Следствие 2. ***Пусть*** $U, V \subset R^n$ ***- выпуклые компакты. Тогда***

$$\rho(U,V) = \max_{l \in S(0,1)} \left| \chi_U(l) - \chi_V(l) \right|. \qquad (2)$$

Доказательство. По определению расстояния Хаусдорфа выводим

$$\rho(U,V) = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определяются из условия

$$\varepsilon_1 = \min_{\varepsilon>0}\left\{U^\varepsilon \supset V\right\} = \min_{\varepsilon>0}\left\{\chi_{U^\varepsilon}(l) \geq \chi_V(l)\right\} =$$

$$= \min_{\varepsilon>0}\left\{\chi_U(l) + \varepsilon \geq \chi_V(l)\right\} = \min_{\varepsilon>0}\left\{\varepsilon \geq \chi_V(l) - \chi_U(l)\right\}, \quad \forall l \in S(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = \max_{l \in S(0,1)}\left\{\chi_V(l) - \chi_U(l)\right\},$$

$$\varepsilon_2 = \min_{\varepsilon>0}\left\{V^\varepsilon \supset U\right\} = \min_{\varepsilon>0}\left\{\chi_{V^\varepsilon}(l) \geq \chi_U(l)\right\} =$$

$$= \min_{\varepsilon>0}\left\{\chi_V(l) + \varepsilon \geq \chi_U(l)\right\} = \min_{\varepsilon>0}\left\{\varepsilon \geq \chi_U(l) - \chi_V(l)\right\}, \quad \forall l \in S(0,1) \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_2 = \max_{l \in S(0,1)}\left\{\chi_U(l) - \chi_V(l)\right\}.$$

$$\varepsilon_1=\max_{l\in S(0,1)}\left\{\chi_V(l)-\chi_U(l)\right\},\quad \varepsilon_2=\max_{l\in S(0,1)}\left\{\chi_U(l)-\chi_V(l)\right\}.$$

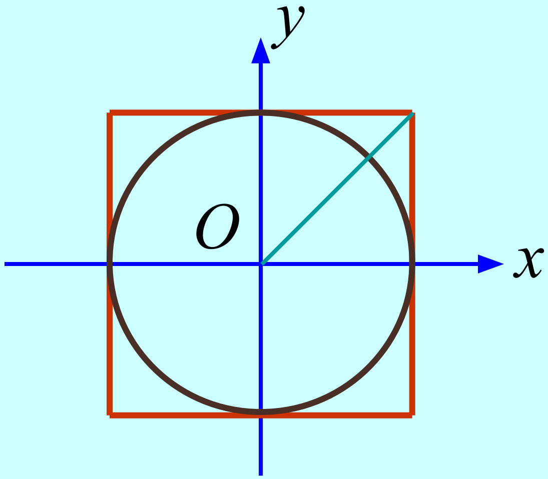
Тогда

$$\rho(U,V)=\max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}=\max\left\{\max_{l\in S(0,1)}\left\{\chi_V(l)-\chi_U(l)\right\},\ \max_{l\in S(0,1)}\left\{\chi_U(l)-\chi_V(l)\right\}\right\}=$$

$$=\max_{l\in S(0,1)}\left\{\max\left[\chi_V(l)-\chi_U(l),\,\chi_U(l)-\chi_V(l)\right]\right\}=\max_{l\in S(0,1)}\left|\chi_U(l)-\chi_V(l)\right|.$$

Теорема доказана.

Упражнение. Вычислить расстояние Хаусдорфа между множествами

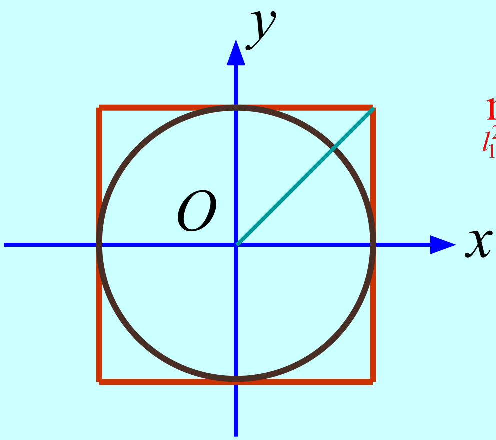


$$\bar{O}(0,1)=\left\{u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\ \middle|\ x^2+y^2\le 1\right\}$$ и

$$K(0,1)=\left\{u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R^2\ \middle|\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\right\}$$

Решение.

$$\rho\left(K(0,1),\bar{O}(0,1)\right)=\max_{l\in S(0,1)}\left|\overbrace{\chi_{K(0,1)}(l)}^{|l_1|+|l_2|}-\overbrace{\chi_{\bar{O}(0,1)}(l)}^{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}\right|=\max_{l_1^2+l_2^2=1}\left|\,\overbrace{|\overbrace{l_1}^{\cos\alpha}|+|\overbrace{l_2}^{\sin\alpha}|-\sqrt{l_1^2+l_2^2}}^{1}\,\right|=$$



$$\max_{l_1^2+l_2^2=1}\left|\overbrace{|l_1|}^{\cos\alpha\ge 0}+\overbrace{|l_2|}^{\sin\alpha\ge 0}-\overbrace{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}^{1}\right| = \max_{\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left|\overbrace{\cos\alpha+\sin\alpha-1}^{\ge 0}\right| =$$

$$= \max_{\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)-1 = \sqrt{2}-1$$

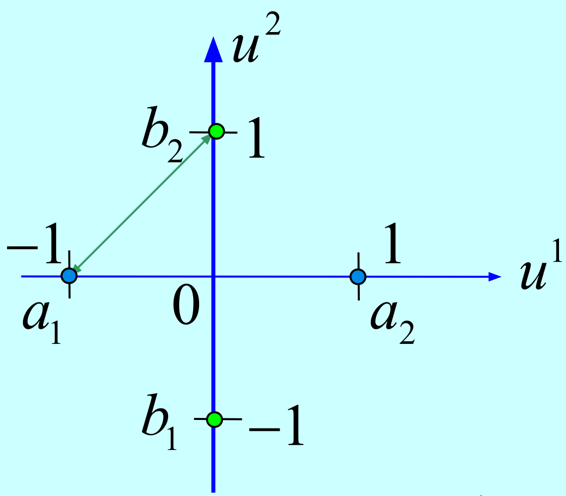
Этот же результат может быть получен из анализа рисунка.

В случае, если множества $U,V\subset R^n$ не являются выпуклыми, то равенство (2)

$$\rho\left(U,V\right)=\max_{l\in S(0,1)}\left|\chi_U\left(l\right)-\chi_V\left(l\right)\right| \quad (2)$$

может не выполняться.

Пример 1. Пусть $n=2$ и $U=\left\{a_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $V=\left\{b_1=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.



Тогда $\rho\left(U,V\right)=\sqrt{2}$. С другой стороны

$$\chi_U\left(l\right)=\max_{i\in\{1,2\}}\left\langle a_i,l\right\rangle=\max\left\{-l_1,l_1\right\}=\left|l_1\right|,$$

$$\chi_V\left(l\right)=\max_{i\in\{1,2\}}\left\langle b_i,l\right\rangle=\max\left\{-l_2,l_2\right\}=\left|l_2\right|,$$

$$l\in S\left(0,1\right).$$

Таким образом, $\max_{l\in S(0,1)}\left|\chi_U\left(l\right)-\chi_V\left(l\right)\right| = \max_{(l_1)^2+(l_2)^2=1}\left|\left|l_1\right|-\left|l_2\right|\right|=1<\sqrt{2}=\rho\left(U,V\right).$

Теорема 8. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***компактное множество и*** $u \in \operatorname{int} U$. ***Тогда***

$$\langle u,\ l \rangle < \chi_U(l),\ \forall l \in S(0,\ 1). \qquad (3)$$

Обратно, если выполнено условие (3), то $u \in \operatorname{int} U$.

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{int} U$. Тогда $\bar{O}(u,\varepsilon) \subset U$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Для всех $l \in S(0,\ 1)$ имеем

$$\overbrace{\chi_{\bar{O}(u,\varepsilon)}(l)}^{\langle u,l\rangle + \chi_{\bar{O}(0,\varepsilon)}(l)} \le \chi_U(l) \Rightarrow \langle u,\ l \rangle + \overbrace{\chi_{\bar{O}(0,\varepsilon)}(l)}^{\varepsilon\|l\|} \le \chi_U(l) \Rightarrow$$

$$\langle u,\ l \rangle + \varepsilon \cdot \overbrace{\|l\|}^{1} \le \chi_U(l) \Rightarrow \langle u,\ l \rangle < \chi_U(l),\ \forall l \in S(0,\ 1).$$

Обратно, пусть

$$\langle u, l \rangle < \chi_U(l), \forall l \in S(0,1).$$

Непрерывная функция $\varphi(l) = \chi_U(l) - \langle u, l \rangle$ строго положительна на компакте $S(0,1)$, поэтому ее минимум на $S(0,1)$ строго положителен. Обозначим его через

$$\varepsilon = \min_{l \in S(0,1)} \varphi(l) = \min_{l \in S(0,1)} \left[\chi_U(l) - \langle u, l \rangle \right] > 0.$$

Тогда

$$\chi_U(l) - \langle u,\ l\rangle \ge \min_{l\in S(0,1)}\left[\chi_U(l) - \langle u, l\rangle\right] = \varepsilon \Rightarrow$$

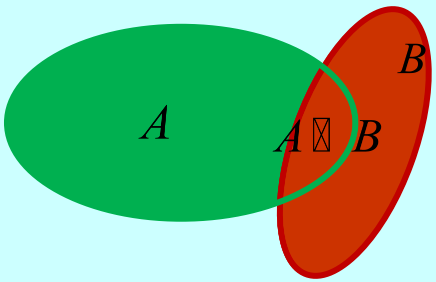
$$\chi_U(l) - \langle u,\ l\rangle \ge \varepsilon \Rightarrow \ \langle u,\ l\rangle + \varepsilon\cdot \overset{\|l\|}{1} \le \chi_U(l),\ \forall l \in S(0,\ 1) \Rightarrow$$

$$\overbrace{\langle u,\ l\rangle + \varepsilon\|l\|}^{\chi_{\overline{O}(u,\varepsilon)}(l)} \le \chi_U(l),\ \forall l\in S(0,\ 1) \Rightarrow$$

$$\chi_{\overline{O}(u,\varepsilon)}(l) \le \chi_U(l),\ \forall l\in S(0,\ 1) \Rightarrow \overline{O}(u,\varepsilon) \subset U,$$

и точка u внутренняя для U.

Теорема 9. ***Для любых выпуклых компактов*** $A, B \subset R^n$ ***условие*** $A \cap B \neq \varnothing$ ***имеет место тогда и только тогда, когда выполнено неравенство***



$$\min_{a\in A}\langle l, a\rangle \le \chi_B(l), \forall l \in S(0,1). \qquad (4)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\min_{a\in A}\langle l, a\rangle \overset{A\supset A\cap B}{\le} \min_{q\in A\cap B}\langle l, q\rangle \le \max_{q\in A\cap B}\langle q, l\rangle \overset{A\cap B\subset B}{\le} \overbrace{\max_{q\in B}\langle q, l\rangle}^{\chi_B(l)} = \chi_B(l), \forall l\in S(0,1),$$

что и доказывает необходимость.

Достаточность. От противного по **теореме 4** (о сильной отделимости выпуклых множеств) приходим к существованию вектора $l^* \in S(0,1)$, для которого

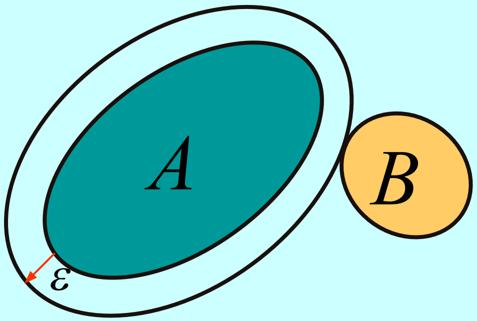
$$\min_{a\in A}\left\langle l^*, a\right\rangle > \max_{b\in B}\left\langle l^*, b\right\rangle = \chi_B(l^*).$$

Последнее соотношение противоречит (4). $\min_{a\in A}\left\langle l, a\right\rangle \le \chi_B(l), \forall l \in S(0,1). \quad (4)$

Теорема доказана.

Упражнение. Пусть $A, B \subset R^n, \quad A \cap B = \varnothing.$ Вывести формулу для вычисления величины

$$\varepsilon = \min\left\{\alpha \middle| \overline{A^\alpha} \cap B \ne \varnothing\right\},$$



Решение.

В силу **теоремы 9** величина $\varepsilon -$ наименьшее из положительных чисел α, удовлетворяющих неравенству

$$\min_{\hat a\in A^\alpha}\left\langle l, \hat a\right\rangle \le \chi_B(l), \forall l \in S(0,1). \qquad (*)$$

$$\min_{\hat{a}\in A^{\alpha}} \langle l, \hat{a} \rangle \le \chi_B(l), \forall l \in S(0,1). \qquad (*)$$

Заметим, что

$$\min_{\hat{a}\in A^{\alpha}} \langle l, \hat{a} \rangle = \min_{\hat{a}\in A+O(0,\alpha)} \langle l, \hat{a} \rangle = \min_{\substack{a\in A,\\ s\in O(0,\alpha)}} \langle l, a+s \rangle =$$

$$= \min_{a\in A} \langle l, a \rangle + \min_{s\in O(0,\alpha)} \langle l, s \rangle = \min_{a\in A} \langle l, a \rangle - \alpha.$$

Подставим полученное выражение в (*). Имеем

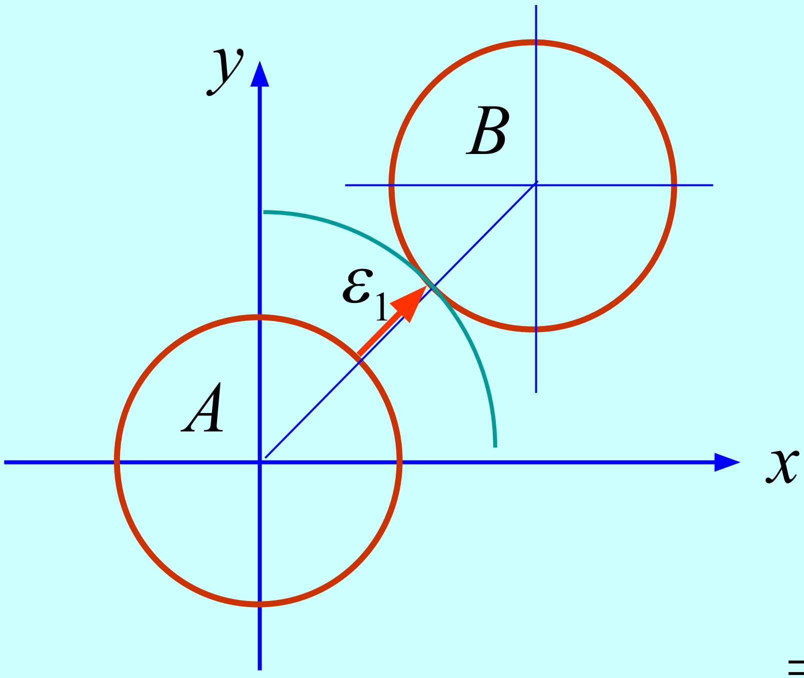
$$\min_{a\in A} \langle l, a \rangle - \alpha \le \max_{b\in B} \langle l, b \rangle, \forall l \in S(0,1) \Rightarrow$$

$$\alpha \ge \min_{a\in A} \langle l, a \rangle - \max_{b\in B} \langle l, b \rangle, \forall l \in S(0,1) \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \max_{l\in S(0,1)} \left[\min_{a\in A} \langle l, a \rangle - \max_{b\in B} \langle l, b \rangle \right].$$

Упражнение. Проверить полученную формулу для множеств

$$A = \bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1\right) \in R^2, \quad B = \bar{O}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, 1\right) \in R^2$$



Решение.

$$\varepsilon_1 = \max_{l \in S(0,1)} \left[\min_{a \in A} \langle l, a \rangle - \max_{b \in B} \langle l, b \rangle \right].$$

$$= \max_{l_1^2 + l_2^2 = 1} \left[\min_{a \in \bar{O}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},1\right)} \langle l, a \rangle - \chi_{\bar{O}\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},1\right)}(l) \right] =$$

$$= \max_{l_1^2 + l_2^2 = 1} \left[-\sqrt{l_1^2 + l_2^2} - \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \right\rangle - \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right] =$$

$$= \max_{l_1^2 + l_2^2 = 1} \left[-\left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \right\rangle - 2 \right] = \max_{l_1^2 + l_2^2 = 1} \left[\left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \right\rangle \right] - 2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Результат согласуется с рисунком.

Теорема 10. ***Для любых компактных множеств*** $U, W \subset R^n$, ***матриц*** $A \div n \times n$ ***и чисел*** λ ***выполняются равенства***

$$1.\, co(U+W) = co(U) + co(W);$$

$$2.\, co(\lambda U) = \lambda\, co(U);$$

$$3.\, co(AU) = A co(U).$$

Доказательство. Множества в правых и левых частях этих соотношений выпуклы и компактны, их опорные функции совпадают, следовательно, совпадают и сами множества.

Приведем подробное доказательство для первого равенства. Пусть $v \in R^n$. Имеем

$$\chi_{co(U+W)}(v) = \chi_{(U+W)}(v) = \chi_U(v) + \chi_W(v) =$$

$$= \chi_{coU}(v) + \chi_{coW}(v) = \chi_{(coU+coW)}(v).$$