

# Логические основы компьютеров

## § 18. Логика и компьютер

# Логика, высказывания

**Логика** (др.греч. *λογικός*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

**Формальная логика** отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель  
(384-322 до н.э.)

**Логическое высказывание** – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

## Высказывание или нет?

---

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

# Логика и компьютер

**Двоичное кодирование** – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

**Задача** – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

**Почему «логика»?**

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

**Джордж Буль** разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



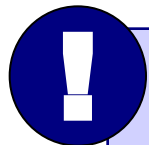
# Логические основы компьютеров

## § 19. Логические операции

# Обозначение высказываний

**A** – Сейчас идет дождь. }  
**B** – Форточка открыта. }

простые высказывания  
(элементарные)



**Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

**Составные высказывания** строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

**A и B** Сейчас идет дождь и открыта форточка.

**A или не B** Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

**если A, то B** Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

**A тогда и только тогда, когда B** Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

## Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

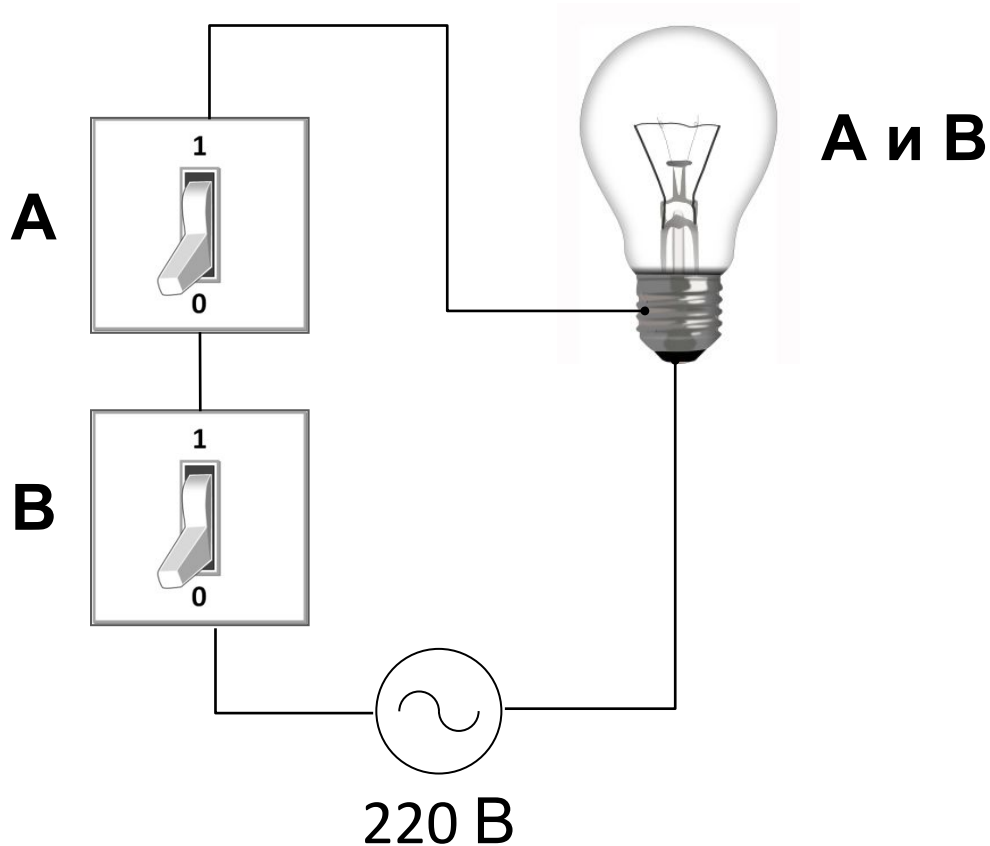
также  $\bar{A}$ ,  $\neg A$ ,  
**not A** (Паскаль),  
**! A** (Си)

**таблица  
истинности  
операции НЕ**

**Таблица истинности логического выражения X** – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

# Операция И

Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.

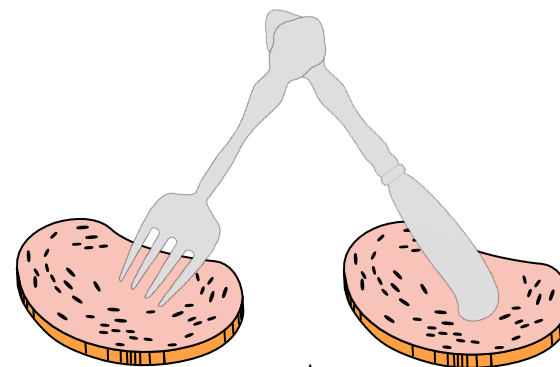




# Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также:  $A \cdot B$ ,  $A \wedge B$ ,  
 A and B (Паскаль),  
 A && B (Си)

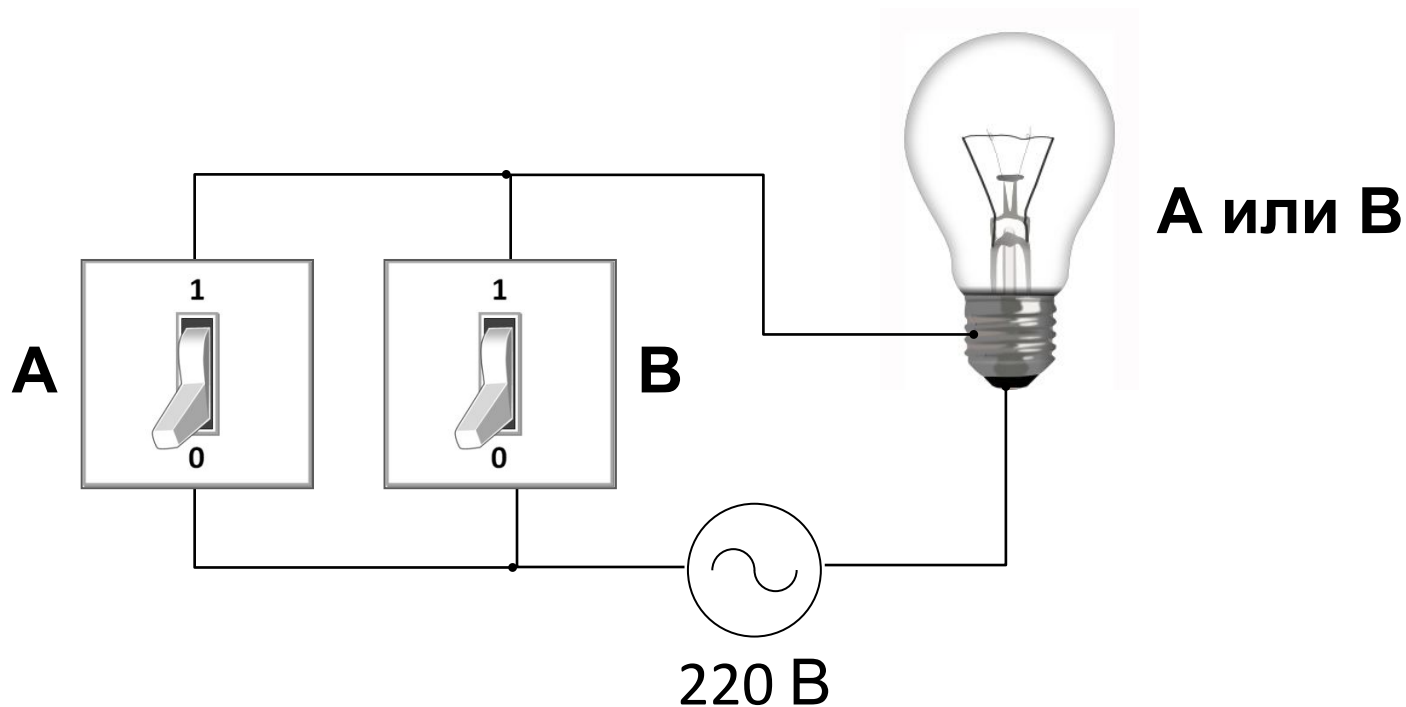


A  $\wedge$   
 B

**КОНЪЮНКЦИЯ** – от лат. *conjunctio* — соединение

# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



# Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также:  $A+B$ ,  $A \vee B$ ,  
 $A \text{ or } B$  (Паскаль),  
 $A \parallel B$  (Си)

**ДИЗЪЮНКЦИЯ** – от лат. *disjunctio* — разъединение

## Задачи

*В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

- 1) **принтеры & сканеры & продажа**
- 2) **принтеры & продажа**
- 3) **принтеры | продажа**
- 4) **принтеры | сканеры | продажа**

**1 2 3 4**

## Импликация («если ..., то ...»)

Высказывание « $A \rightarrow B$ » истинно, если не исключено, что из  $A$  следует  $B$ .

$A$  – «Работник хорошо работает».

$B$  – «У работника хорошая зарплата».

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

## Импликация («если ..., то ...»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

**A** – «Вася идет гулять».

**B** – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Маша может пойти гулять ( $B=0$ ), а может и не пойти ( $B=1$ )!

## Эквивалентность («тогда и только тогда, ...»)

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

## Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?



## Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	A·B	$\bar{A} \cdot B$	$\bar{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

# Составление таблиц истинности

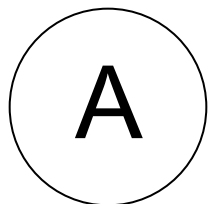
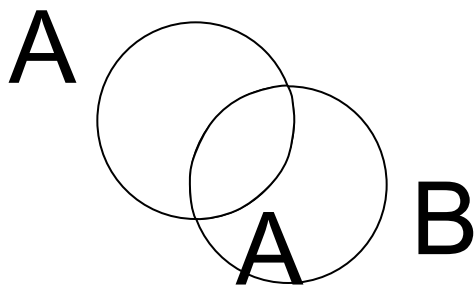
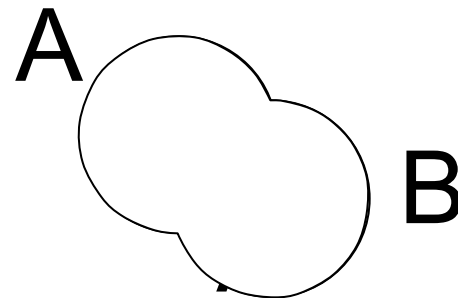
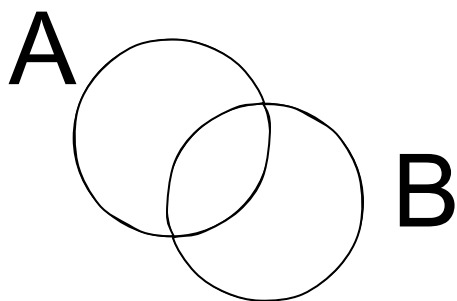
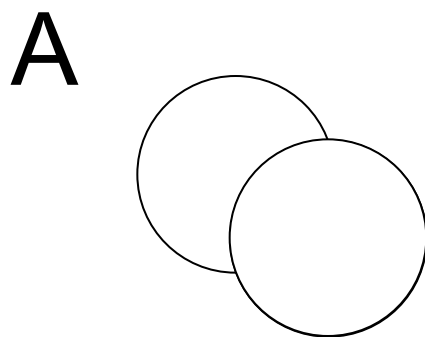
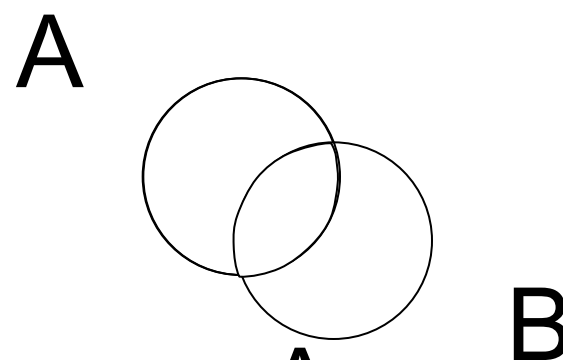
$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

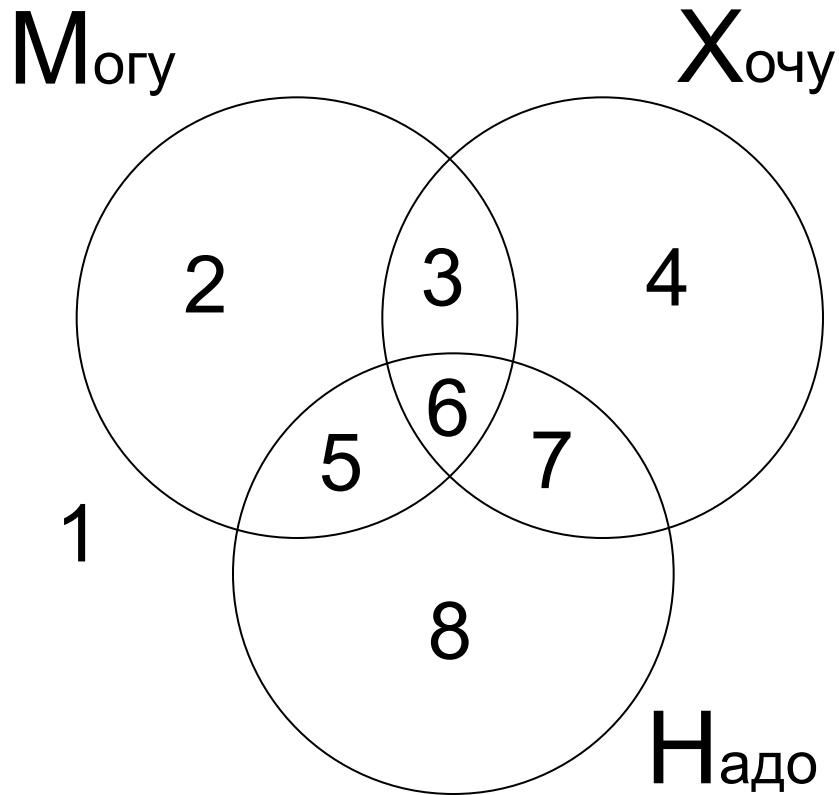
# Логические основы компьютеров

## § 20. Диаграммы

# Диаграммы Венна (круги Эйлера)


 $\bar{A}$ 

 $\cdot$ 
 $B$ 

 $+$ 
 $B$ 

 $A$ 
 $\oplus$ 
 $B$ 

 $B$ 
 $\dashv$ 
 $\rightarrow$ 
 $B$ 

 $A$ 
 $\leftrightarrow$ 
 $B$

# Диаграмма с тремя переменными



$$\begin{array}{ll}
 1 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} & 5 = M \cdot \bar{X} \cdot H \\
 2 = M \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} & 6 = M \cdot X \cdot H \\
 3 = M \cdot X \cdot \bar{H} & 7 = \bar{M} \cdot X \cdot H \\
 4 = \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} & 8 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot H
 \end{array}$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H}$$

$$3 + 4 = X \cdot \bar{H}$$



Логические выражения можно упростить!

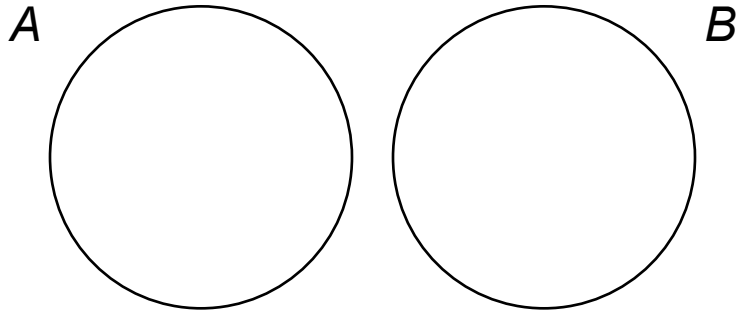
## Задачи

*Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :*

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>огурцы</i>	<i>100</i>
<i>помидоры</i>	<i>200</i>
<i>огурцы &amp; помидоры</i>	<i>50</i>

*Сколько сайтов будет найдено по запросу*  
**огурцы | помидоры**

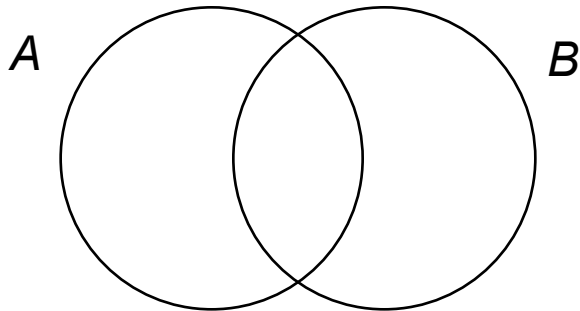
# Задачи



$$N_{A|B} =$$

50

огурцы & помидоры



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

## Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
Динамо & Рубин	320
Спартак & Рубин	280
(Динамо   Спартак) & Рубин	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
Динамо & Спартак & Рубин



Общее условие с & можно отбросить !



## Задачи

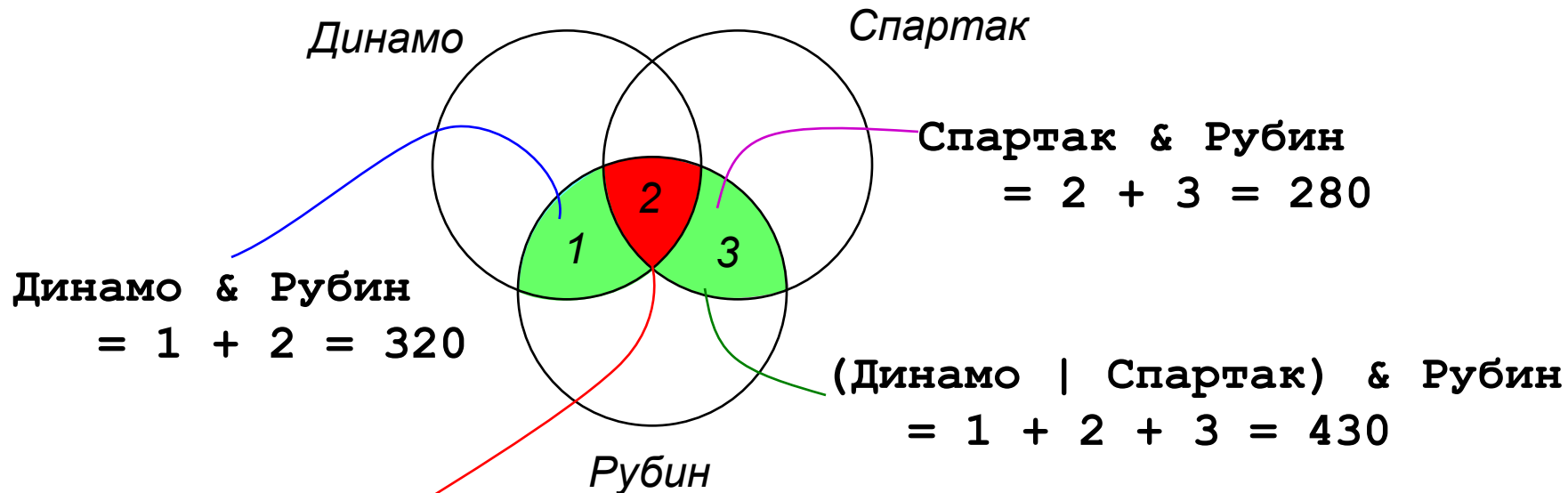
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>Динамо</i>	320
<i>Спартак</i>	280
<i>Динамо   Спартак</i>	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**Динамо & Спартак**

Ответ:  $320 + 280 - 430 =$  **170**

# Задачи



Динамо & Спартак & Рубин

= 2

= (320 + 280) - 430 = **170**

## Задачи

Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот ее фрагмент:

<b>Ключевое слово</b>	<b>Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым</b>
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**(принтер | сканер) & монитор**  
 если по трем следующим запросам найдено:

**принтер | сканер** – 450 сайтов,

**принтер & монитор** – 40 сайтов

**сканер & монитор** – 50 сайтов.

# Задачи

(принтер | сканер) & монитор = ?

A (сканер)

B (принтер)

450

принтер | сканер

0

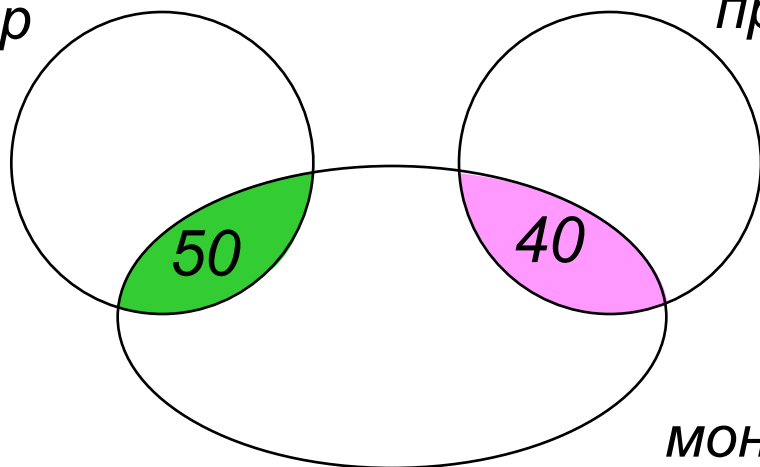
$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

сканер 200

принтер 250

сканер

принтер



принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

$$40 + 50 = 90$$

## Сложная задача

Ниже приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

мезозой	500
кроманьонец	600
неандерталец	700
мезозой   кроманьонец	800
мезозой   неандерталец	1000
неандерталец & (мезозой   кроманьонец)	200

Сколько страниц будет найдено по запросу

кроманьонец & (мезозой | неандерталец)

# Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$