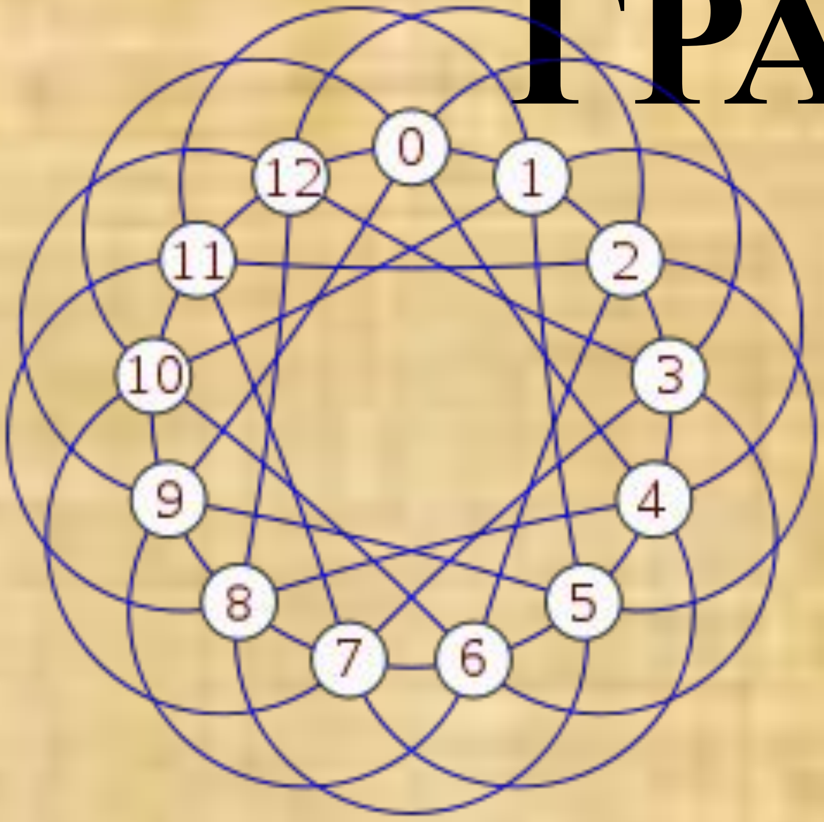
Учебно-исследовательский проект

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

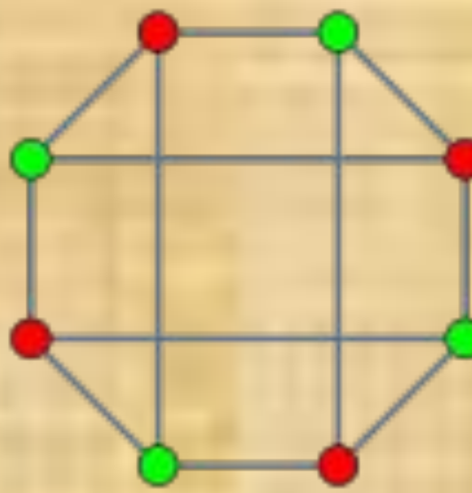


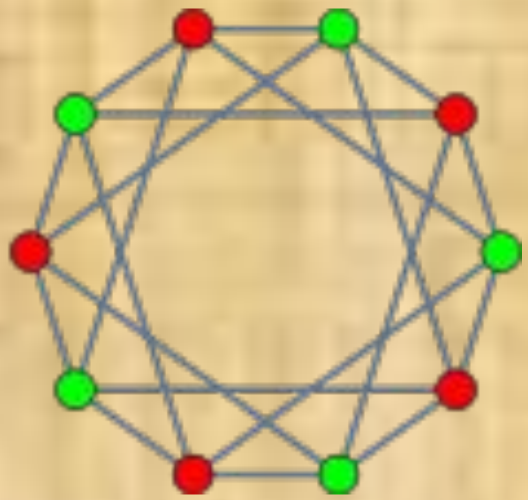
Автор: Терехова Анастасия Вячеславовна
ученица 6«А» класса
Муниципального бюджетного общеобразовательного
учреждения города Иркутска
средней общеобразовательной школы
с углубленным изучением отдельных предметов № 14

Руководитель проекта:
Полетаева Лариса Никитична
учитель математики
высшей категории
Муниципального бюджетного общеобразовательного
учреждения города Иркутска
средней общеобразовательной школы
с углубленным изучением отдельных предметов № 14

Если вы любите решать задачи на смекалку, логические, олимпиадного типа или головоломки, то наверное, не раз составляли таблицы, изображали объекты точками, соединяли их отрезками или стрелками, подмечали закономерности у полученных рисунков, выполняли над точками или отрезками операции, не похожие на арифметические, то есть вам приходилось строить математический аппарат специально для решения задачи. А это значит, что вы открывали для себя начала теории графов.

В математике существует класс задач, которые наиболее просто и понятно решаются с применением теории графов. Это замечательные математические объекты, применяя которые можно решать математические и логические задачи, а также упрощать условия задач.





Объект исследования:
Математические графы.

Предмет исследования:
Графы, как способ решения целого ряда задач практической направленности.

Цель моей работы:
Выяснить, что такое теория графов, и как применить ее при решении математических задач.

Задачи:
- познакомиться с историей возникновения теории графов;
- научиться применять теорию графов при решении задач;
- создать задачи и решить их с помощью теории графов.

Основные методы исследования:
1. Теоретический:
- анализ источников информации.

2. Эмпирический:
- создать задачи и решить их с помощью теории графов.

История возникновения теории графов

Математические графы с дворянским титулом "граф" связывает общее происхождение от лат. слова "графио" - пишу.

Впервые основы теории графов появились в работе члена Петербургской академии наук, выдающегося математика Леонардо Эйлера, где он описывал решение головоломок и математических развлекательных задач.

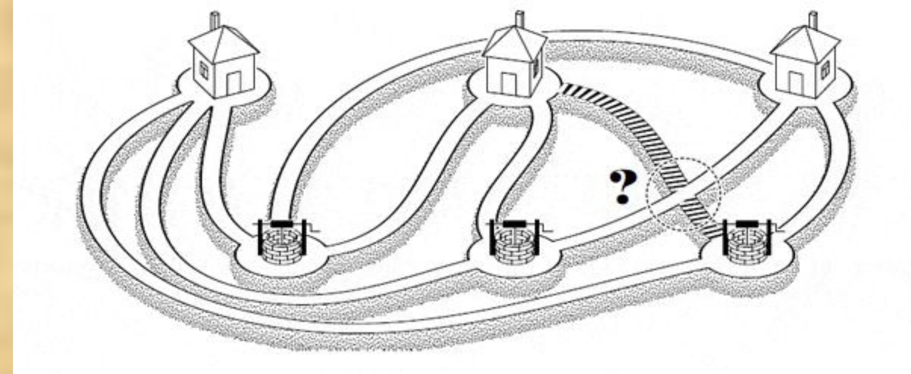
Среди них знаменитая задача о Кенигсбергских мостах. Философ Иммануил Кант, гуляя по городу Кенигсбергу (сейчас этот город называется Калининград), поставил задачу: можно ли пройти по всем семи мостам и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту пройти только один раз.

В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала Леонарда Эйлера. Он смог найти правило, пользуясь которым легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них.

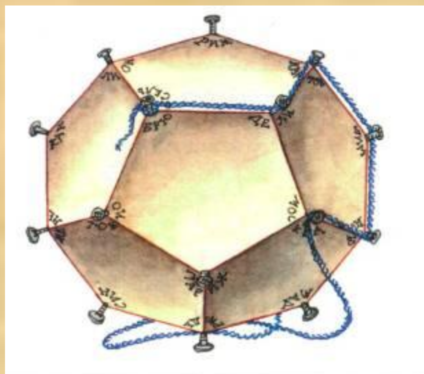
Если, внимательно рассмотреть географическую карту, можно заметить, что есть еще один – граф, состоящий из границ между странами (областями, районами).

В 1852 году английский студент Френсис Гутри раскрашивал карту Великобритании. Каждое графство он выделял цветом. Выбор красок у него был невелик, и приходилось их использовать повторно. Гутри старался, чтобы два графства, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета. Это заставило его задуматься о том, какого наименьшего числа красок достаточно для раскрашивания любой карты. Гутри считал, что четырех красок всегда хватит, но доказать это не мог.

Первые решения данной задачи появились в 1879 году. Доказательство опубликовал Альфред Кемпе- британский математик, а год спустя Питер Тэт - шотландский математик и физик.



Существует задача о трех домах и трех колодцах. Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Возможно ли провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались. Эта задача была решена польским математиком Куратовским в 1930 году.



В 1859 г. английский математик Уильям Гамильтон выпустил в продажу головоломку. Она представляла собой деревянный додекаэдр(12-гранник), в вершинах которого вбиты гвоздики. Каждая из 20 вершин была помечена названием одного из крупных городов мира – Дели, Брюссель и т.д. Требовалось найти замкнутый путь, проходящий по ребрам додекаэдра и позволяющий побывать в каждой его вершине по одному разу. Путь следовало отмечать с помощью шнура, зацепляя его за гвоздики.

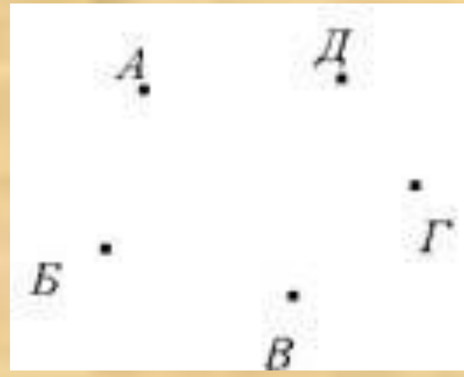
В 1975 году преподавателем архитектуры Будапешта Эрне Рубиком для развития пространственного воображения у студентов изобрел головоломку Кубик Рубика.

Решить все эти задачи или доказать, что они не имеют решений возможно с помощью теории графов!

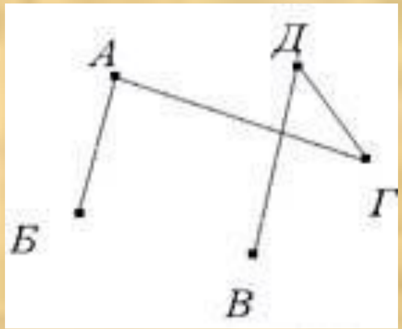
Основные понятия теории графов

Граф – это набор точек, каждые из которых соединены линиями. Точки – называются вершинами, а соединяющие их линии ребрами.

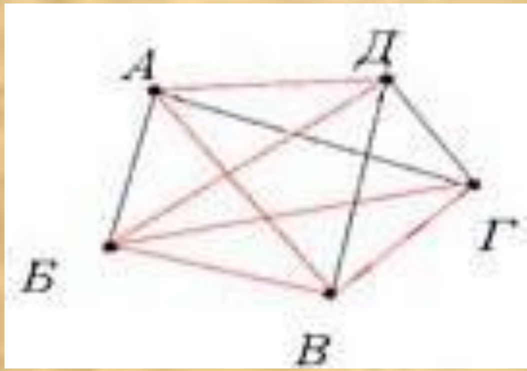
Схема графа, состоящая из «изолированных» вершин, называется нулевым графом



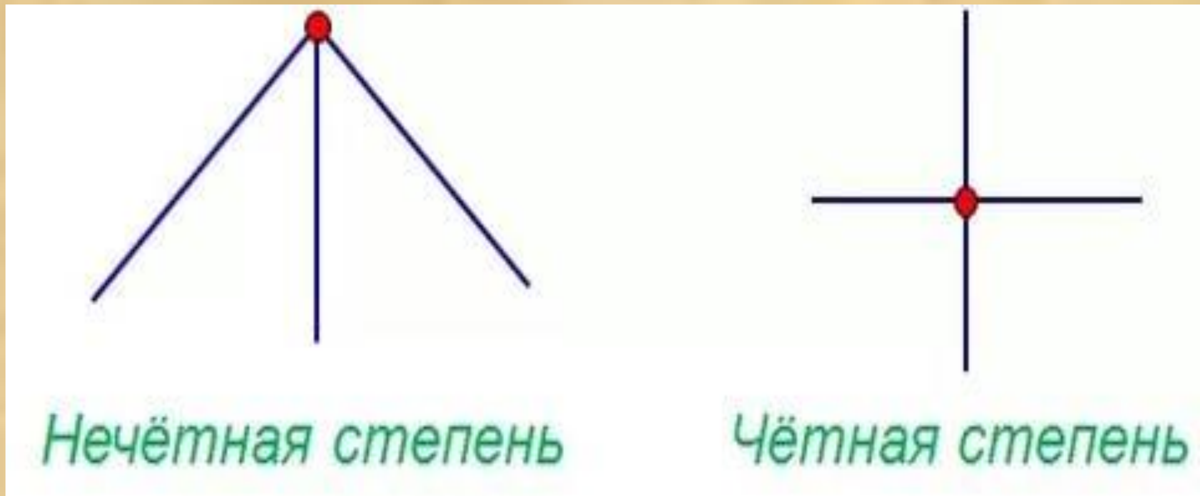
Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами



Графы, в которых построены все возможные ребра, называются полными графами



Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

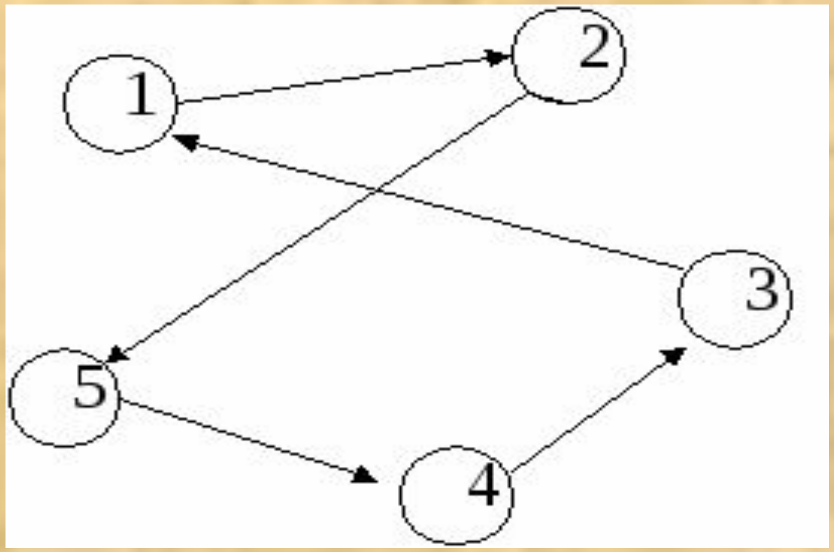


Маршрутом в графе называется последовательность рёбер, в которой соседние рёбра имеют общую вершину. Первая вершина называется началом маршрута, последняя — концом.

Путём (или цепью) в графе называется маршрут, в котором нет повторяющихся рёбер. Если в пути нет повторяющихся вершин, его называют простым путём. Длина маршрута равна количеству рёбер в порядке их прохождения. Расстоянием между вершинами в графе называют длину кратчайшего пути от одной вершины до другой.

Цикл — это путь, у которого совпадают начало и конец. Если в цикле все вершины разные, его называют простым циклом. Если в цикле все рёбра разные, то такой цикл называется эйлеровым. Маршрут, содержащий все рёбра или все вершины графа, называется обходом графа.

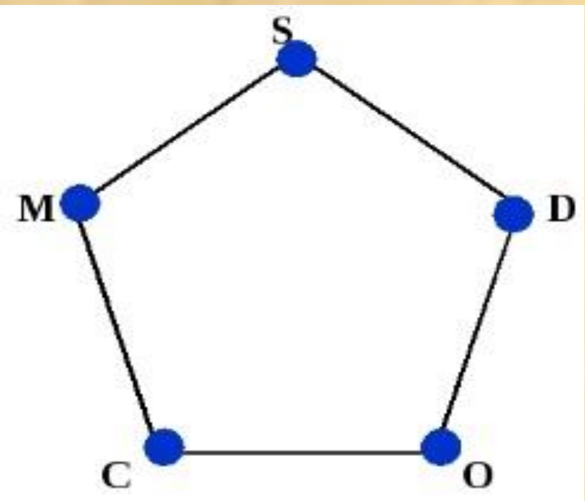
Граф-путь с 6 вершинами



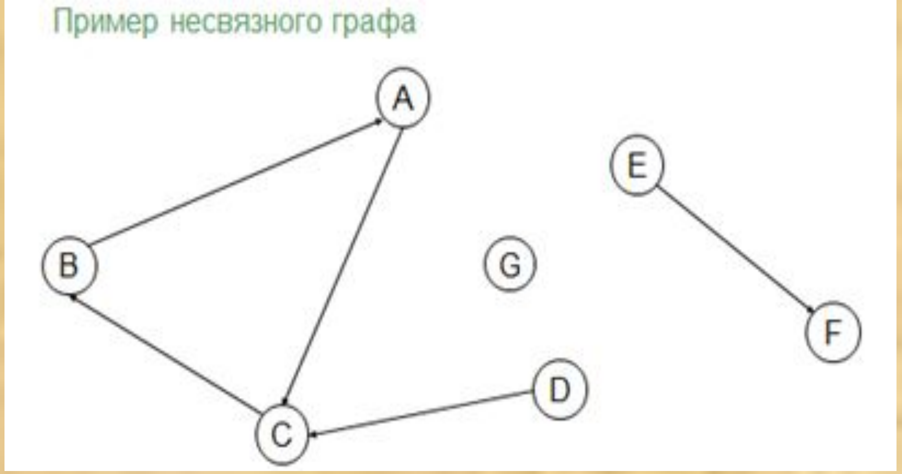
Цикл графа 1, 2, 5, 4, 3, 1

Виды графов

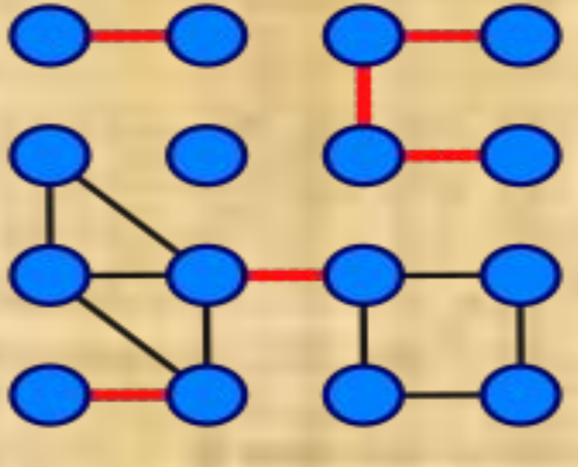
Связный граф – это граф, между любой парой которого существует хотя бы один путь.



Несвязный граф – это граф, в котором существует хотя бы одна пара вершин, между которыми нет пути. Такие вершины называются несвязными. Например, на показанном графе несвязными вершинами является G и любая другая вершина данного графа.



Если в связном графе после удаления ребра граф превратится в несвязный, такое ребро называют мостом. На рисунке граф с 6 мостами выделены красным.



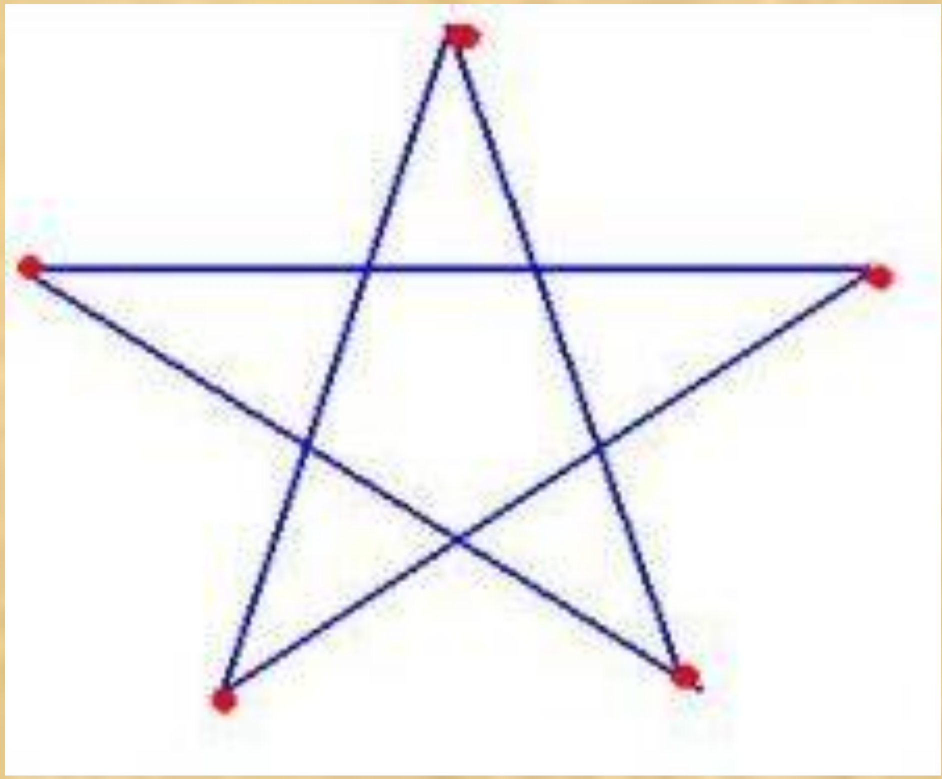
Граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, называется эйлеровым.

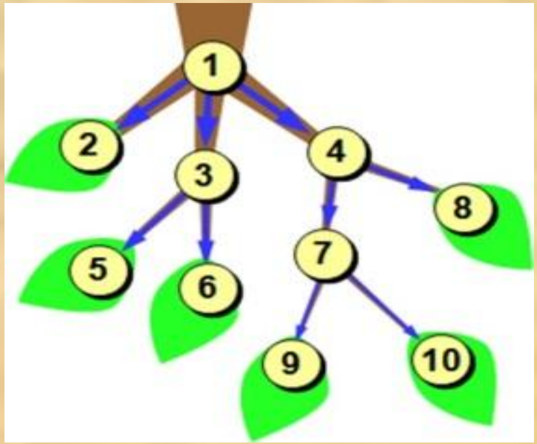
Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».

Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и имеет не более двух нечетных вершин.





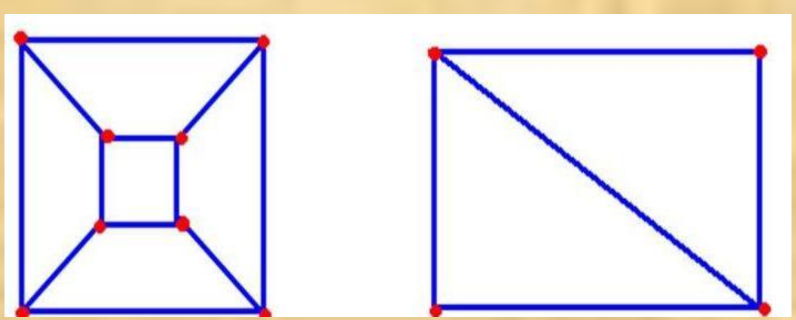
Особым видом графа является дерево. Деревом называется любой связный граф, не имеющий циклов.

В дереве нельзя вернуться в исходную вершину, двигаясь по рёбрам и проходя по одному ребру не более одного раза.

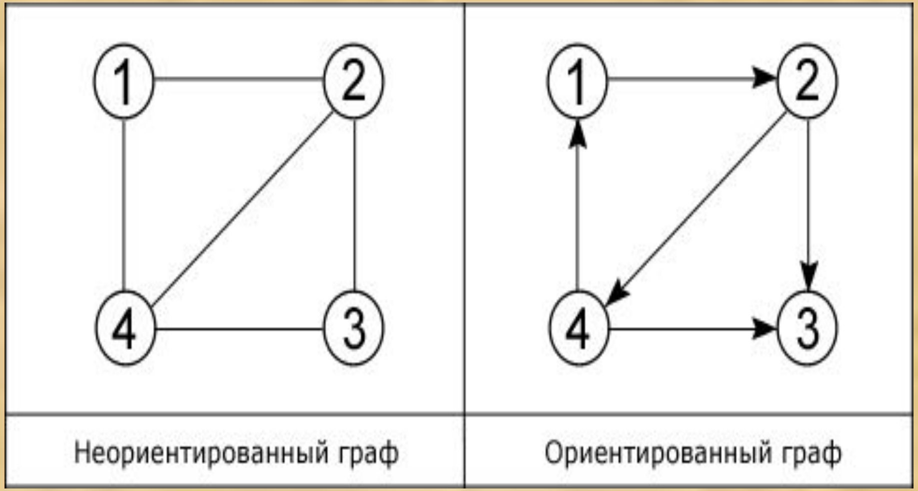
В дереве любые две вершины соединены ровно одним путём.

В дереве есть вершина, из которой выходит только одно ребро. Такая вершина называется висячей.

При удалении любого ребра из дерева граф становится несвязным.



Плоским графом называют такой граф, который можно нарисовать на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин.

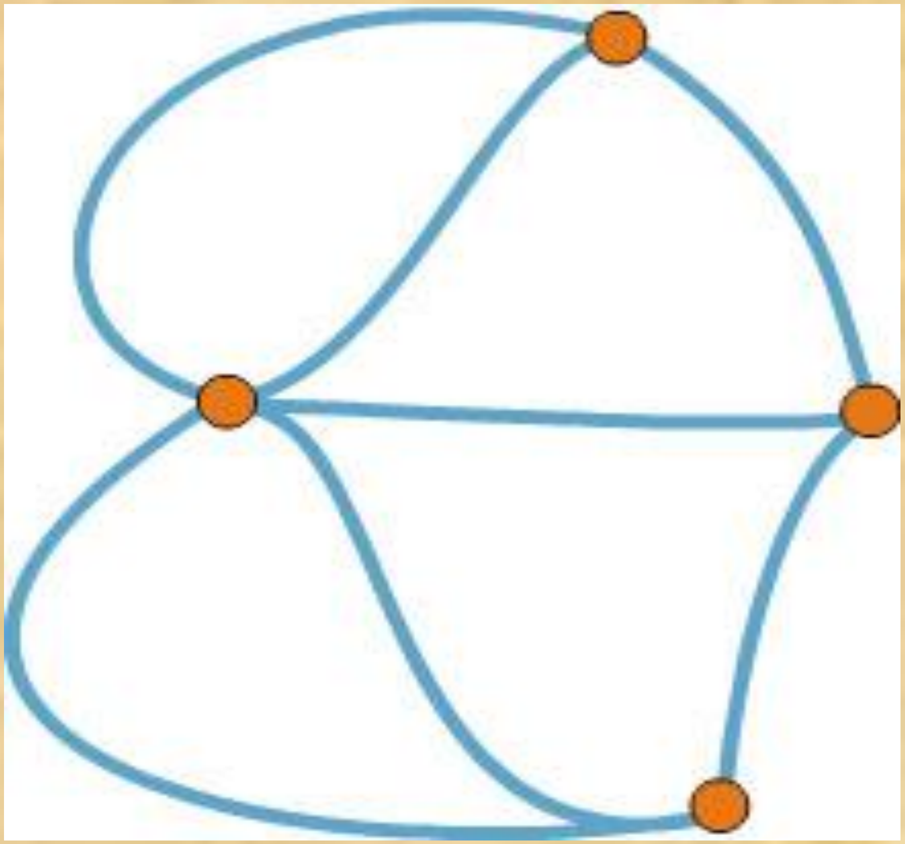


Ориентированный граф — это граф, рёбрам которого присвоено направление, т.е. нанесены стрелочки. Направленные рёбра именуются также дугами, а в некоторых источниках и просто рёбрами.

Неориентированный граф — это граф, в котором все ребра являются неупорядоченными парами вершин, т.е. возможно прохождение из вершины в вершину в обоих направлениях.

Известные задачи, решаемые с помощью графов

Если применить теорию графов к задачам, описанным в начале моей работы, то их решение становится очевидным.



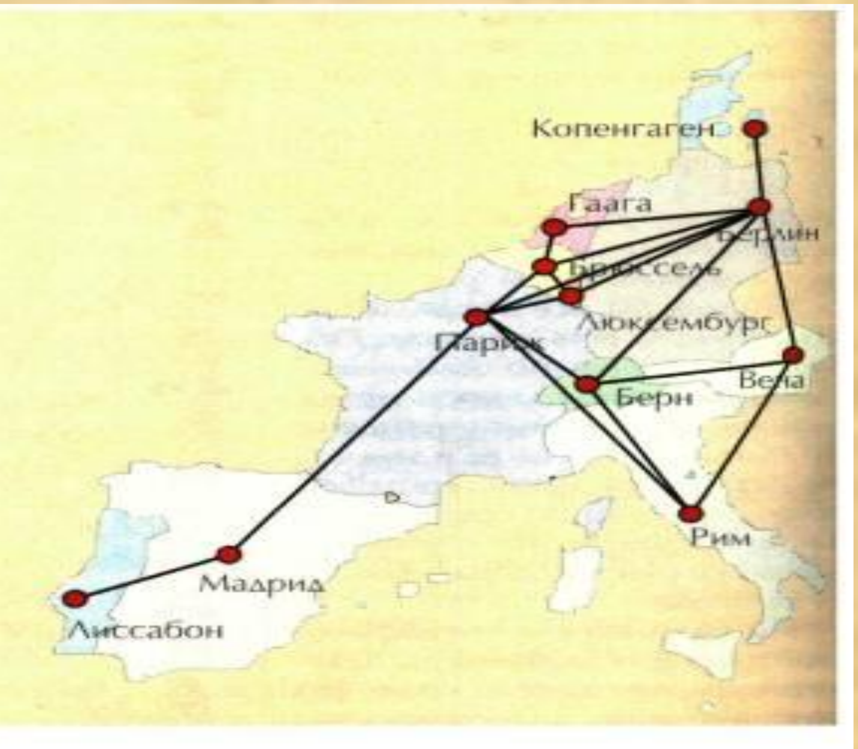
<u>Задача о Кенигсбергских мостах</u>

Предположим, что мосты – ребра, а части города – вершины графа.

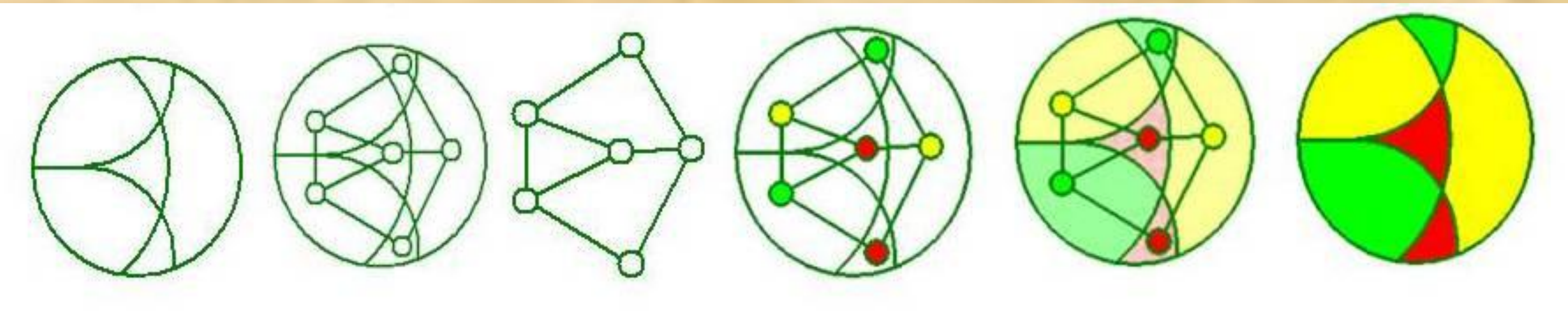
В получившемся графе четыре нечётные вершины (то есть все), следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

Задача о четырех красках

Рассмотрим для произвольной карты следующий граф: его вершины – столицы государств, а ребрами связаны те из них, чьи государства имеют общий участок границы.

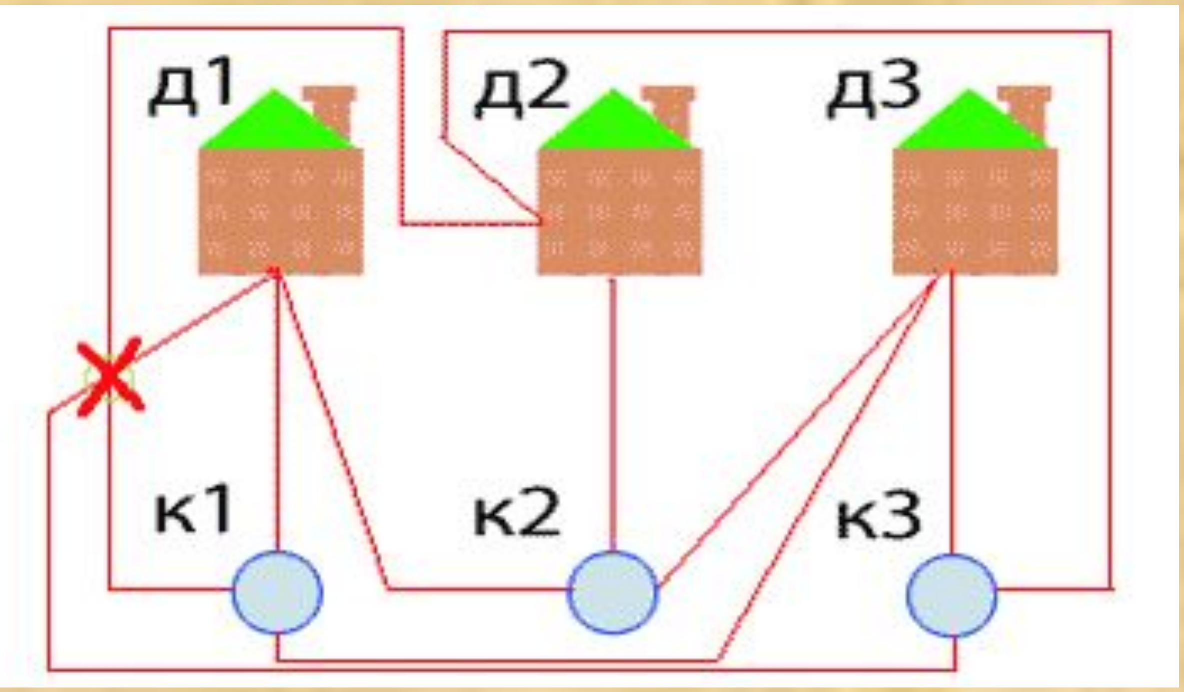


В каждой области карты берется по точке-вершине графа, дугами соединяются те точки, для которых области имеют общую границу- участок линии, но не точку. Далее, если раскрасить вершины графа так, чтобы соединенные ребром вершины были раскрашены по разному, то, раскрасив соответствующие области карты в цвета этих вершин, мы получим раскраску карты, в которой любые две области, имеющие границы-участки линий, но не точки, окрашены в разные цвета.



Задача о трех домах и трех колодцах

Если проложить 8 тропинок, то 9 никак не проложить, чтобы она не пересеклась. Решая задачу с помощью теоремы Эйлера, получили противоречие, которое показало, что ответ в задаче отрицателен: нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.



Предположим, что эти 9 тропинок можно проложить. Обозначим домики точками Д1, Д2, Д3, колодцы - точками К1, К2, К3. Каждую точку-дом соединим с каждой точкой-колодцем.

Как видно, нам удалось провести только восемь тропинок, а девятая должна пересечься хотя бы с одной.

Дело в том, что по мере проведения тропинок из двух домиков, будет получаться некоторый замкнутый контур, внутри которого будет стоять один из колодцев, при этом третий домик будет находиться снаружи от этого контура. Для того чтобы соединить этот домик с колодцем, обязательно потребуется пересечь новой тропинкой одну из уже проложенных.

Полученное доказывает, что ответ в задаче о 3-х колодцах отрицателен.

Создание и решение задач с помощью теории графов

Графы используются в самых разных областях науки и жизни. Каждому школьнику, решившему связать свою будущую профессию с математикой необходимо овладеть этим методом.

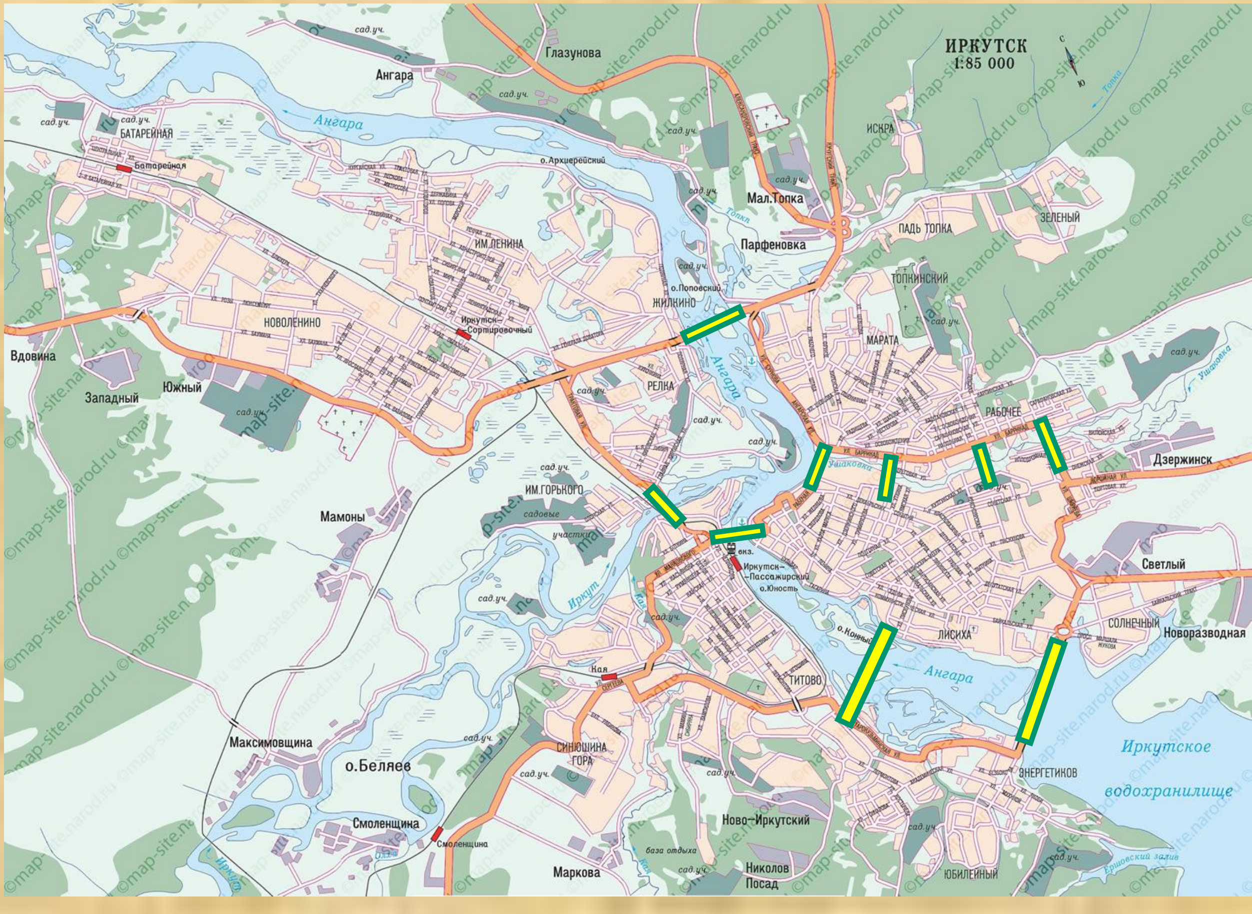
Используя дополнительную литературу и интернет ресурсы, мною были придуманы задачи, решаемые с помощью теории графов.

Итак, «Решаем задачи с помощью графов»!

Задача «Иркутские мосты»

В центральной части нашего родного города Иркутск построены плотина ГЭС и 8 мостов:

1. Академический ("Новейший")
2. Глазковский ("Старый")
3. Иннокентьевский ("Новый")
4. Иркутный (мост через реку Иркут)
5. Мост через реку Ушаковка по ул.Урожайной
6. Мост через реку Ушаковка по ул.Рабочая
7. Мост через реку Ушаковка по ул.Фридриха Энгельса
8. Ушаковский мост (предместье Рабочее)



Вопросы:

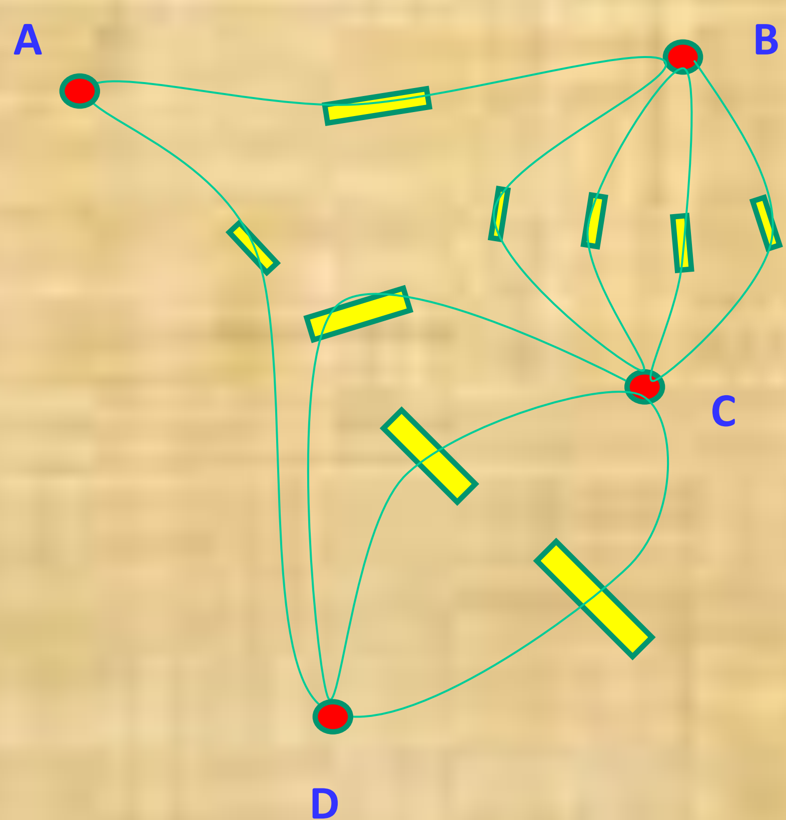
A. Возможно ли пройти по всем 8 мостам, включая плотину ГЭС так, чтобы по каждому мосту и плотине пройти только один раз.

B. Можно ли пройти по всем 8 мостам, включая плотину ГЭС и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту и плотине пройти только один раз.

Решение:

При решении данной задачи необходимо построить граф, где мосты буду ребра, а части города- вершины графа (A, B, C, D).

Граф является эйлеровым.



В получившемся графе 2 нечётные вершины (B, C) и 2 четные вершины (A, D).

Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.

Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф.

Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.

Ответ на вопрос А: Начиная свой путь из нечетной вершины В графа можно закончить свой путь в нечетной вершине С и наоборот. Следовательно, возможно пройти по всем 8 мостам, включая плотину ГЭС так, чтобы по каждому мосту и плотине пройти только один раз.

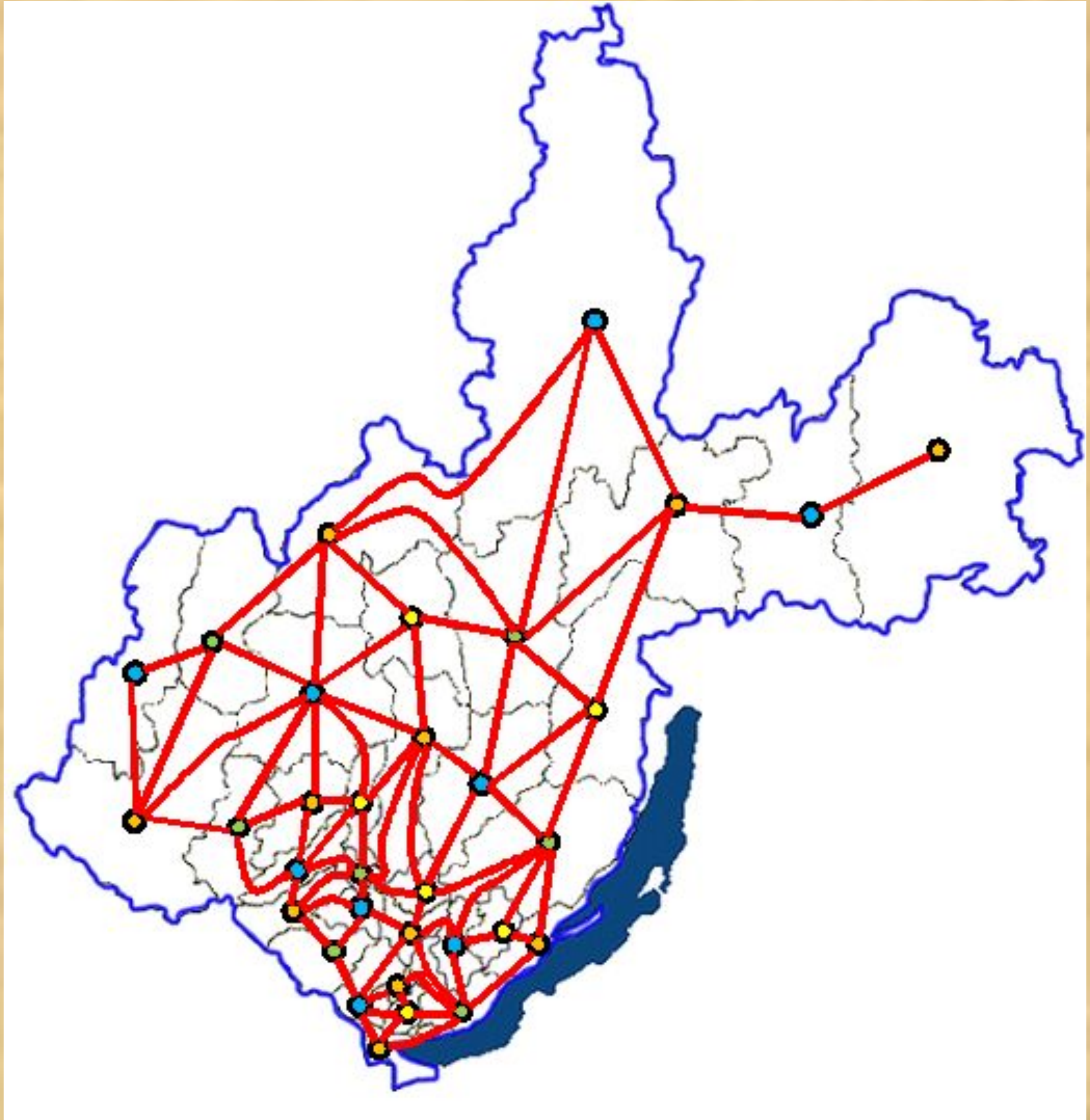
Ответ на вопрос В : Так как в данном графе не все четные вершины, следовательно, невозможно пройти по всем мостам и вернуться в исходную точку так, чтобы пройти только один раз по каждому мосту и плотине, не проходя ни по одному из них дважды.

<u>Задача о красках</u>

Рассмотрим карту Иркутской области.

Иркутская область состоит из 33 районов:

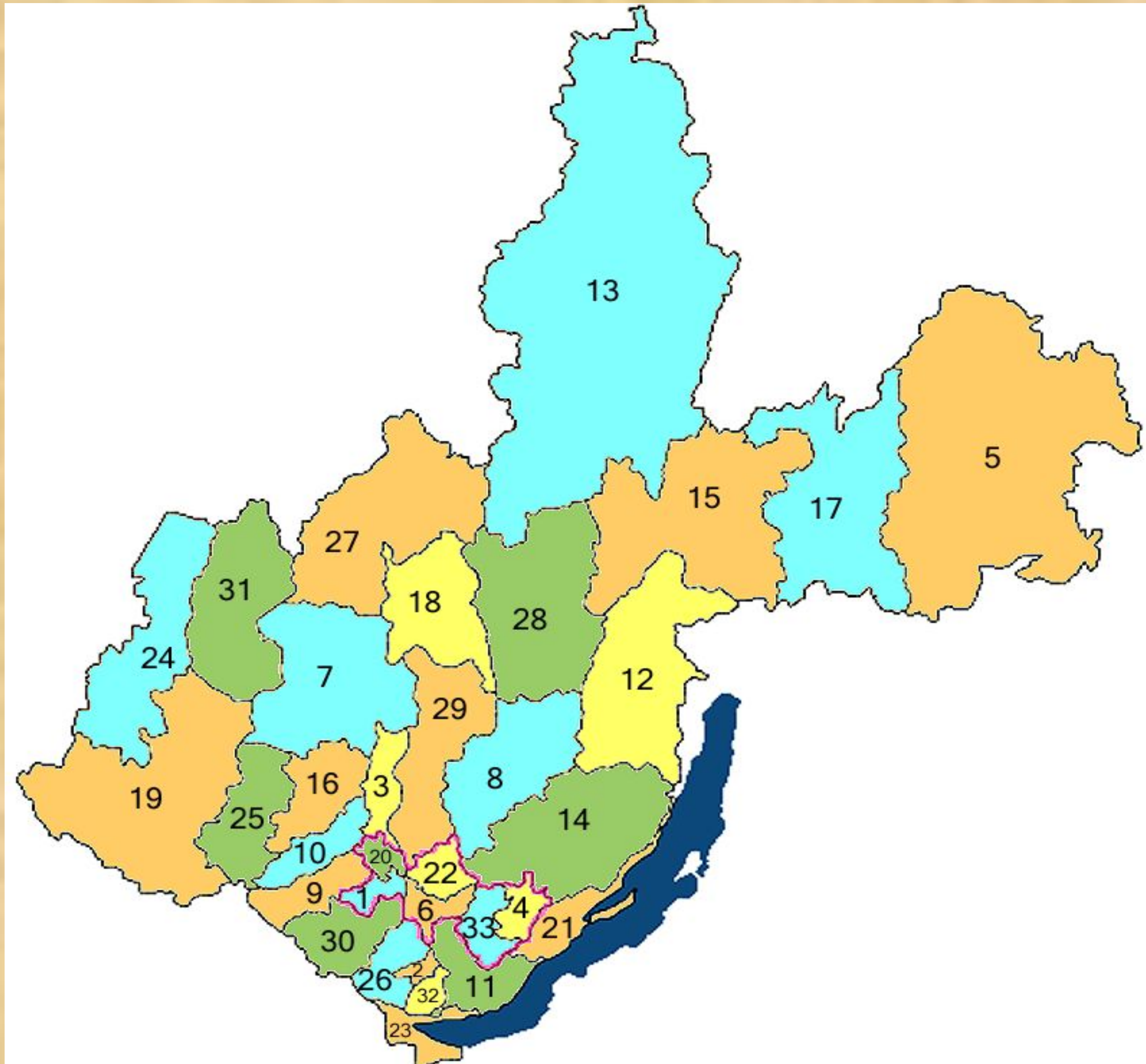
<u>Вопрос:</u> Возможно ли раскрасить Иркутскую область по районам, используя только четыре краски ( ), чтобы при этом любые две вершины, которые соединены ребром, были разного цвета.



Решение:

При решении данной задачи необходимо построить на плоскости граф, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин, т.е. плоский граф.

Для построения графа необходимо в каждом районе карты взять по точке- вершине графа и дугами соединить те точки, для которых районы имеют общую границу- участок линии, но не точку.



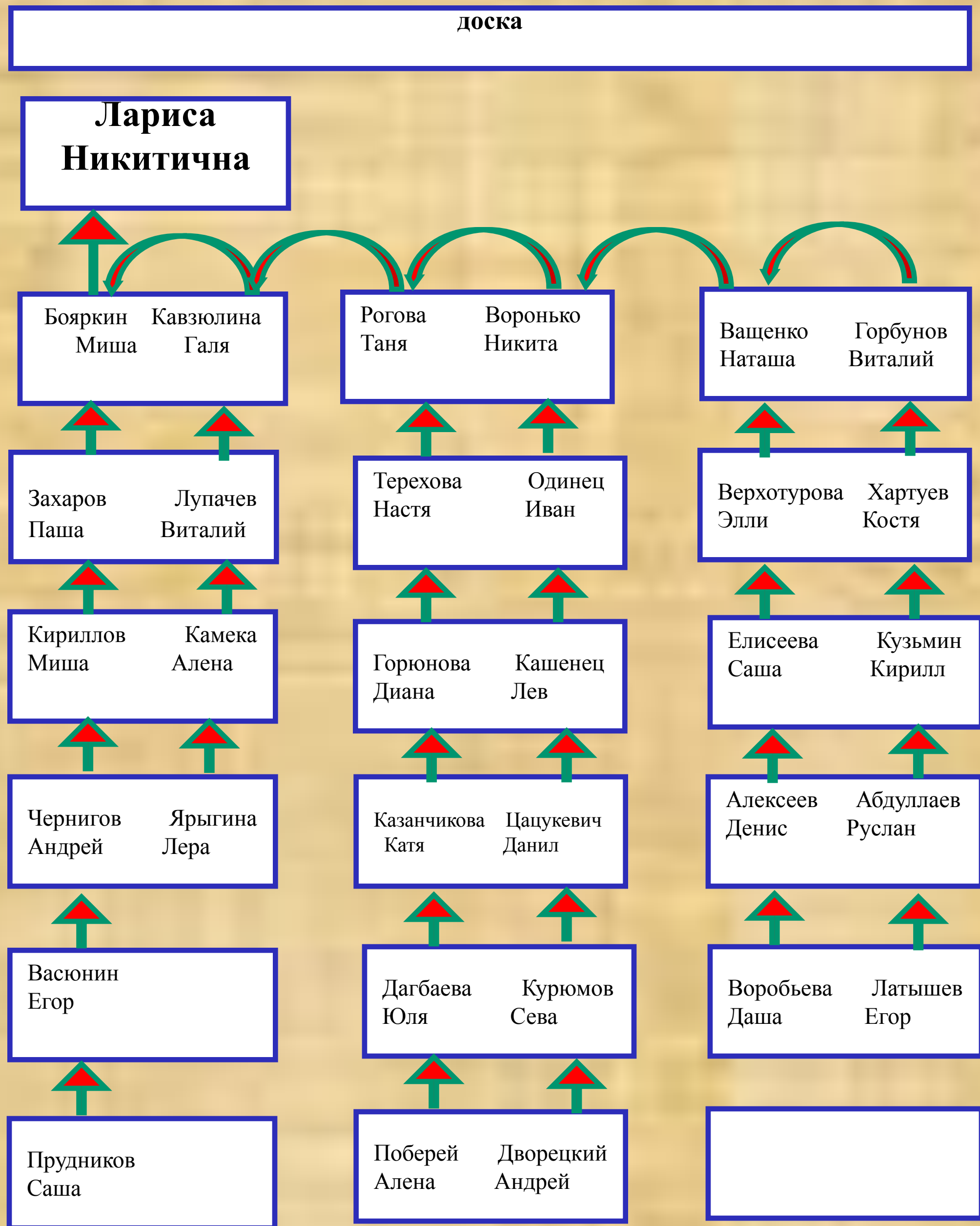
После построения графа, раскрасить вершины графа, чтобы соединенные ребром вершины были раскрашены в разные цвета.

Раскрасив районы карты в цвета этих вершин, мы получим раскраску карты, в которой любые две области, имеющие границы- участки линий, но не точки, окрашены в разные цвета.

<u>Ответ:</u>

Да, возможно раскрасить Иркутскую область по районам, используя только четыре краски ( ), чтобы при этом любые две вершины, которые соединены ребром, были разного цвета.

Класс 6 А (кабинет № 305)



<u>Задача «Урок математики»</u>

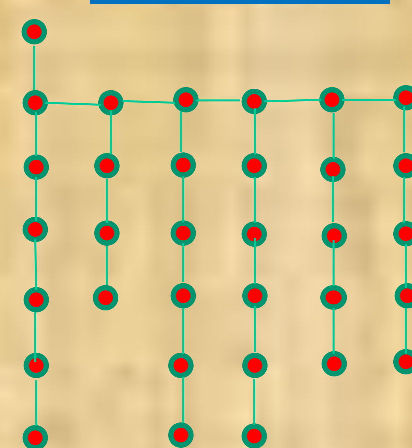
Во время урока математики ученики выполнили контрольную работу. Лариса Никитична попросила всех учеников класса сдать тетради по контрольным работам, не вставая со своих мест. Построить граф передачи тетрадей по контрольным работам.

<u>Решение:</u>

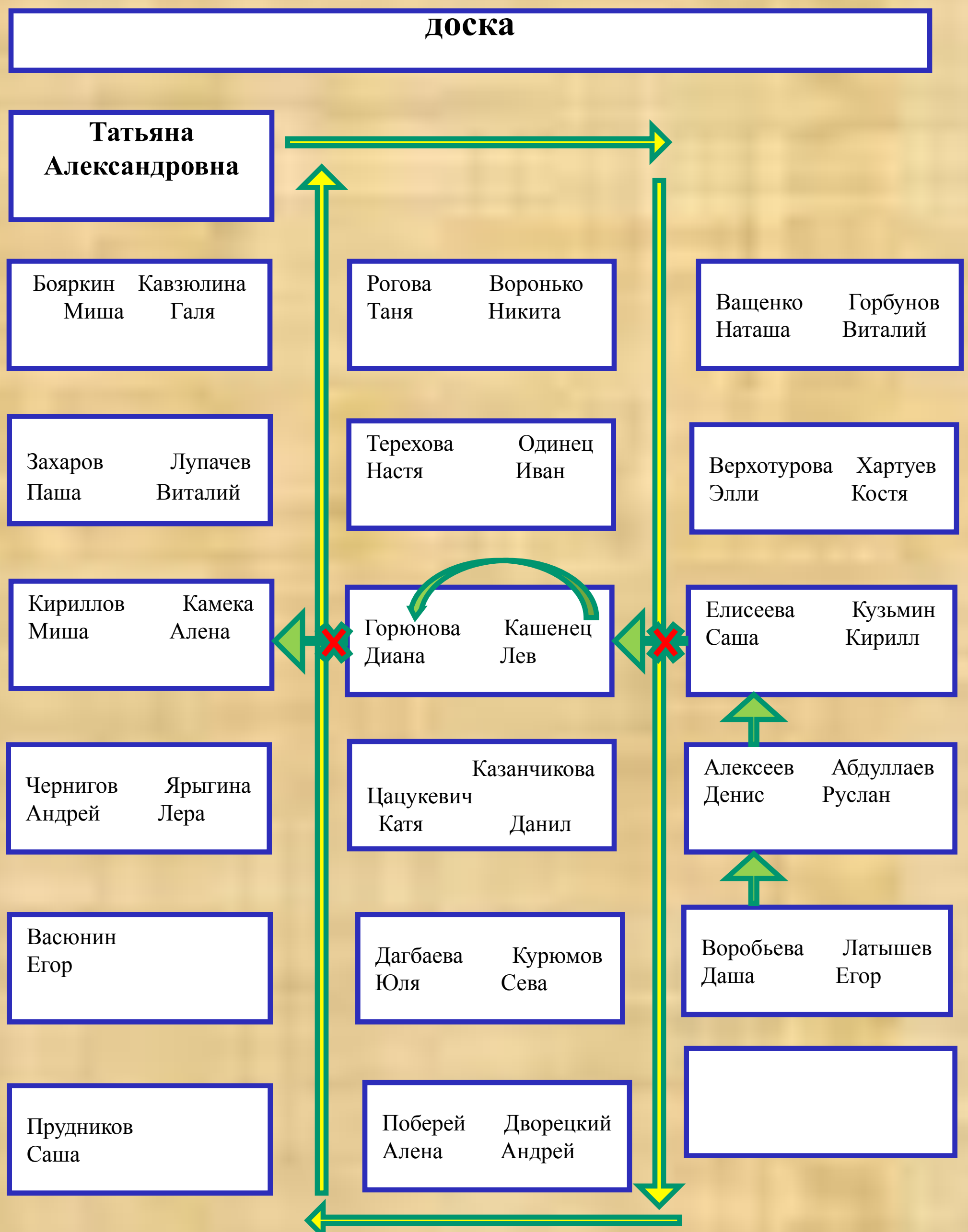
При решении данной задачи был построен граф дерево, в котором 33 вершины и 32 ребра, т.е. число вершин на одну больше числа ребер.

Граф-

дерево



Класс 6 А (кабинет № 209)



<u>Задача «Урок русского языка»</u>

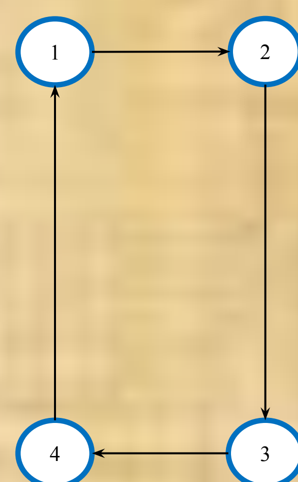
Во время урока русского языка ученица Воробьева Даша передала записку ученице Камека Алене.

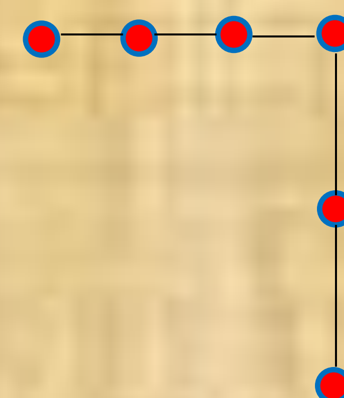
<u>Вопрос:</u> Возможно ли составить маршрут (граф), чтобы записка дошла до Камека Алены. При условиях, что нельзя передавать записку по диагонали, и чтобы граф не пересекался с маршрутом (графом) учительницы Татьяны Александровны.

<u>Решение:</u>

Путь Татьяны Александровны- ориентированный граф

Путь передачи записки- неполный граф





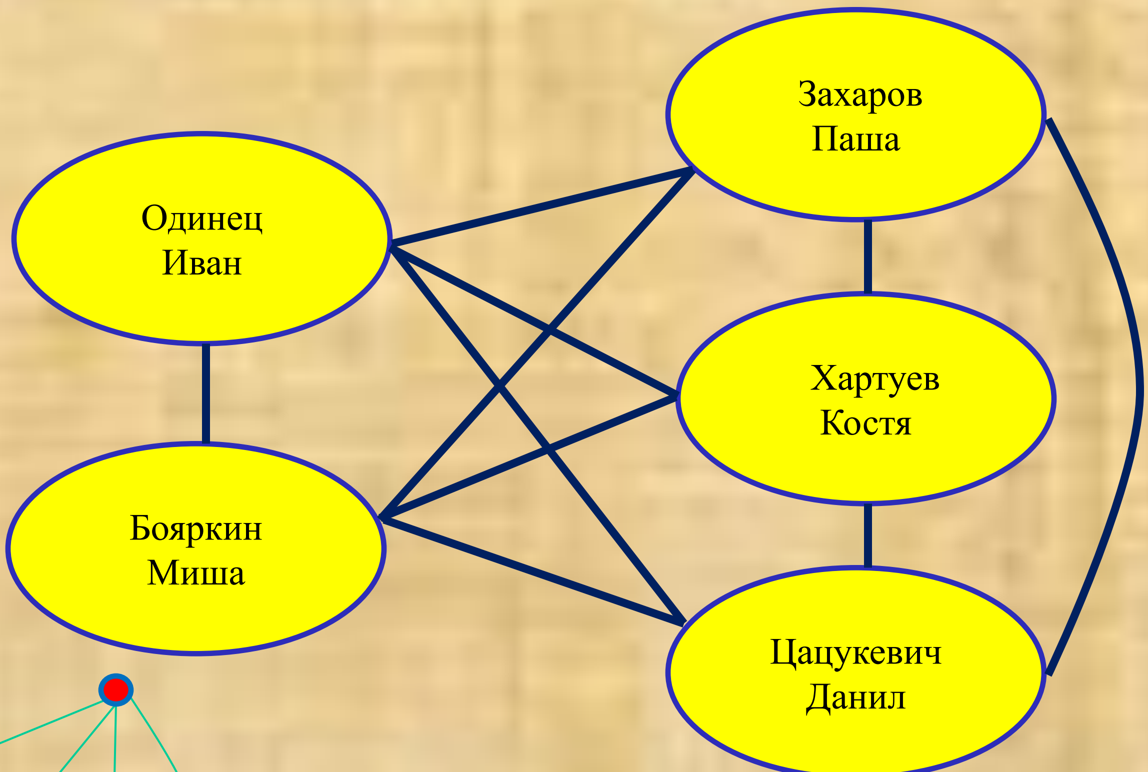
<u>Ответ:</u> Невозможно составить маршрут (граф), чтобы записка дошла до Камека Алены.

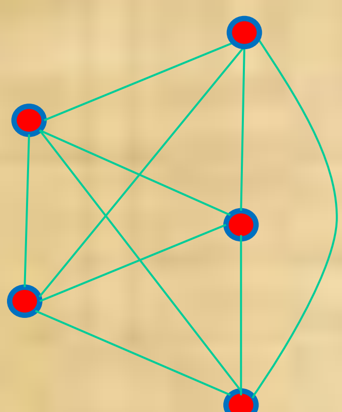
<u>Задача о рукопожатиях друзей</u>

Одинец Иван, Бояркин Миша, Захаров Паша, Хартуев Костя и Цацукевич Данил при встрече в школе обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу).

<u>Вопрос:</u> Сколько всего рукопожатий было сделано?

<u>Решение</u>: В данном случае применяется построение полного графа.





<u>Ответ:</u> Всего 10 рукопожатий было сделано.

Заключение

Цель моей работы достигнута.
Задачи, поставленные в работе, выполнены:
- изучила научную литературу по теме исследования;
- научилась применять теорию графов при решении задач;
- создала задачи и решила их с помощью теории графов.

В результате работы над проектом «Теория графов» я узнала, что решение многих математических задач упрощается, если удается использовать графы. Представление данных в виде графа придает им наглядность. Многие доказательства также упрощаются, приобретают убедительность, если воспользоваться графами.

С большим интересом я не только решала задачи различной степени сложности, но и попробовала себя в их составлении.

Кроме того, закончив свой проект, я сама научилась собирать кубик Рубика, используя теорию графов и комбинаторику, и могу помочь тем, кто еще не овладел алгоритмом сборки, но очень хочет научиться собирать кубик Рубика.

Я думаю мой учебно-исследовательский проект можно считать небольшим пособием для изучения «теории графов» непосредственно на уроках математики, так как в нем затронуты основные понятия «теории графов».

К сожалению, объём моей работы не даёт возможность рассмотреть другие задачи применения «теории графов», но еще есть над чем работать и в дальнейшем я продолжу изучение данной темы.

Список литературы

1. БерезинаЛ.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. –М.: Просвещение, 1979. -143с. С ил.
2. Гуровиц В.М., Ховрина В.В. Графы. –М.: МЦНМО, 2008
3. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд.3-е, испр. и доп. –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009
4. Харари Ф. Теория графов. Перевод с английского В.П.Козырева. Под редакцией Г.П.Гаврилова. –М.: Мир, 1973

Источники информации

5. https://ru.wikipedia.org/wiki/
6. http://dic.academic.ru/
7. http://irkipedia.ru/node/2105/talk
8. http://www.turkey-visit.com/map/russia/irkutsk-map.asp

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!