Муниципальное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение
Москаленского Муниципального района Омской области
«Гимназия имени Горького А.М.»

Открытый банк заданий ОГЭ на подобие треугольников

Методическое пособие

Оглавление

Раздел 1

Теоритический справочник

Теоритический справочник

Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т.е.

$$\frac{AB}{CD}$$

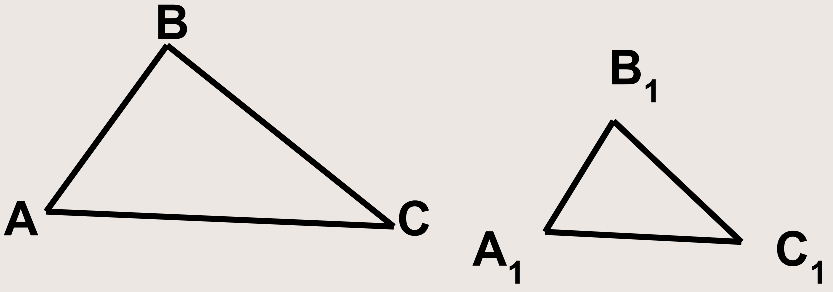
Отрезки AB и CD *пропорциональны* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

Теоритический справочник

Два треугольника называются *подобными,* если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



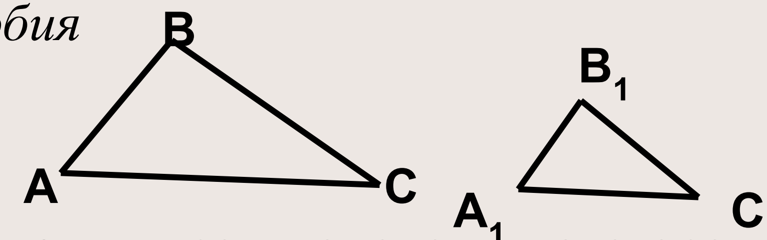
Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия*

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Теоритический справочник

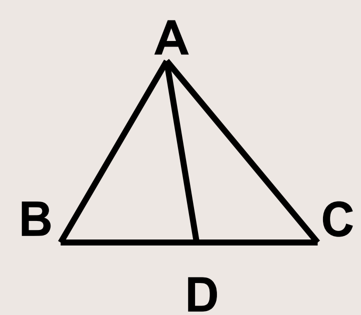
Отношением площадей двух подобных треугольников равно *квадрату коэффициента подобия*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$



Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ или } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$



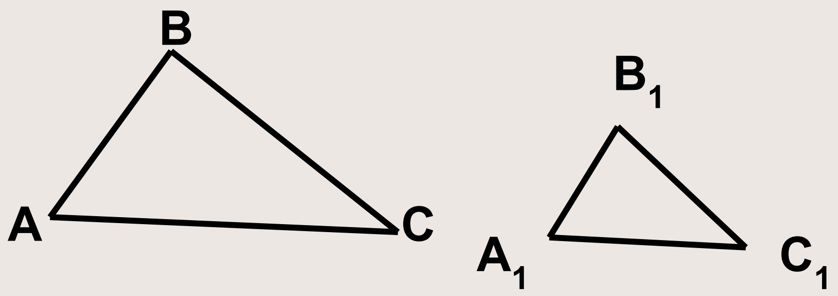
Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

I признак подобия треугольников

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,
Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

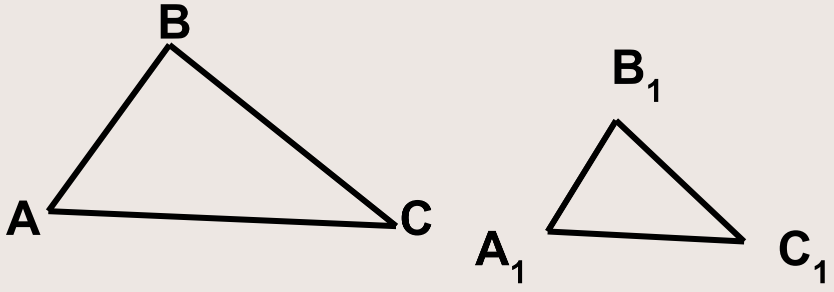
II признак подобия треугольников

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

Если $\angle A = \angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Признаки подобия треугольников

III признак подобия треугольников

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

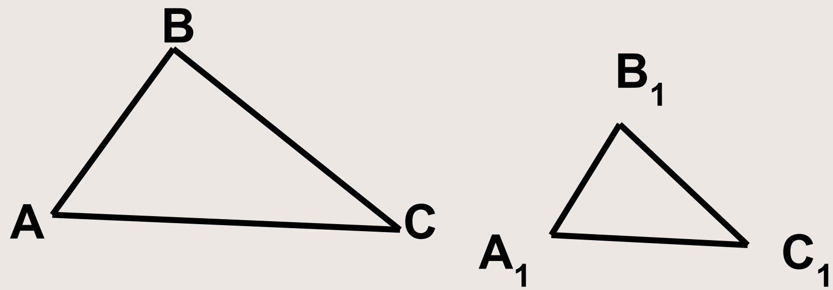
Дано:

ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

Если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

То $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



Теоритический справочник

Свойства подобных треугольников.

- Если треугольники подобны, то сходственные стороны пропорциональны.
- Если треугольники подобны, то соответственные углы (лежащие против сходственных сторон) равны.
- Если треугольники подобны, то элементы треугольников(высоты, медианы, биссектрисы) соответственно пропорциональны коэффициенту подобия.

Раздел 2

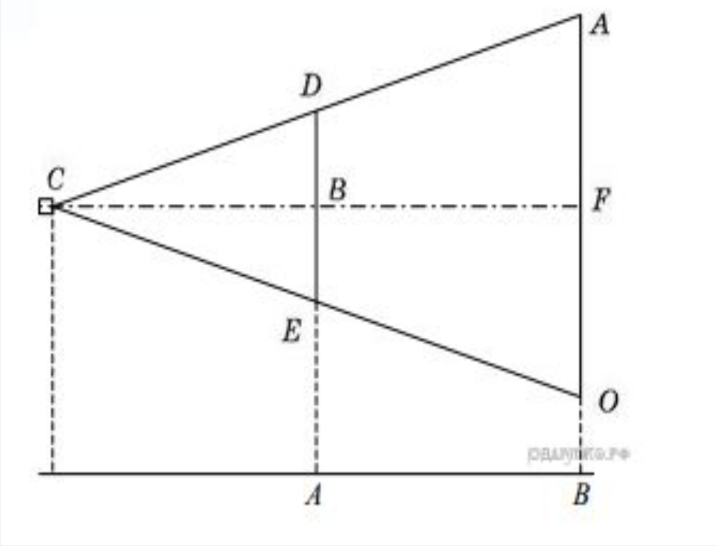
Типы и решение задач 1 Части ОГЭ

Алгоритм решения задач на подобие треугольников

1. Находим пару предполагаемо подобных треугольников.
2. Доказываем, что эти треугольники подобны, используя признаки подобия треугольников.
3. Определяем сходственные стороны треугольников и составляем соответствующую пропорцию.
4. Находим неизвестные члены этой пропорции.

Задачи про проектор.

Проектор полностью осве
щает экран *A* высотой 80
см, расположенный на рас
стоянии 250 см от проекто
ра. На каком наименьшем
расстоянии (в сантимет
рах) от проектора нужно
расположить экран *B* высо
той 160 см, чтобы он был
полностью освещён, если
настройки проектора оста
ются неизменными?



Задачи про проектор.

Дано: ДЕ=80 см, АО=160см, СВ=250см

Найти : CF

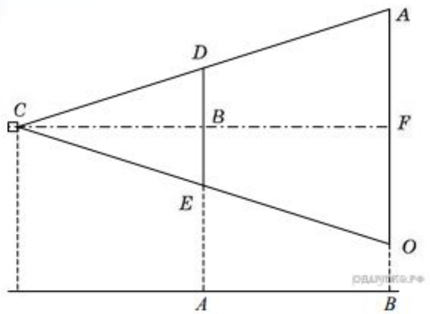
Решение :

Пусть x — искомое расстояние

$$\Delta СДЕ \sim \Delta\ САО \text{ (по двум углам)т. к.}$$

$$\angle C - \text{общий}, \angle Д = \angle A \text{(угол падения луча)}$$

Значит соответственные элементы (высоты) пропорциональны $\frac{АО}{ДЕ} = \frac{CF}{CB}$, $\frac{160}{80} = \frac{x}{250}$ x=$\frac{160\cdot250}{80}$=500 см Ответ: 500 см



Задачи про проектор.

Задачи для самостоятельного решения

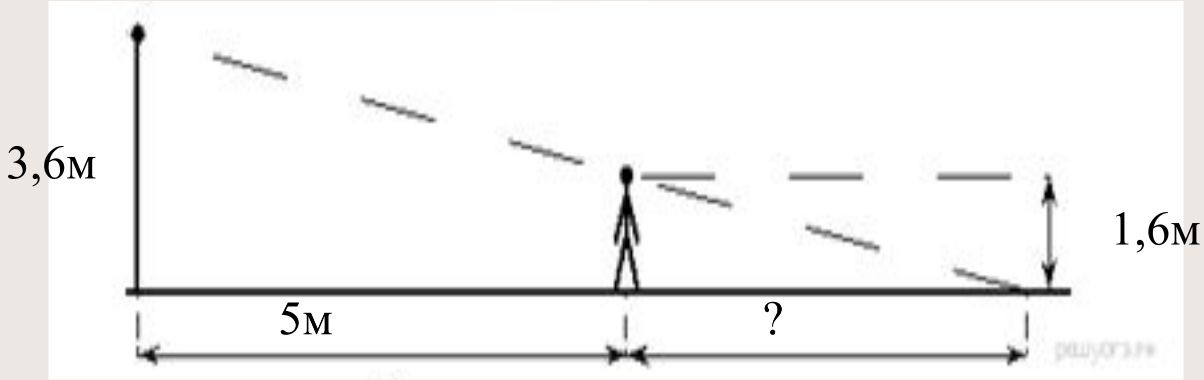
1.Проектор полностью освещает экран *A* высотой 80 см, располо женный на расстоянии 120 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран *B* высотой 330 см, чтобы он был полностью освещён, если на стройки проектора остаются неизменными?

2. Проектор полностью освещает экран *A* высотой 160 см, располо женный на расстоянии 300 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран В высотой 80 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

3. Проектор полностью освещает экран А высотой 50 см, располо женный на расстоянии 110 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран В высотой 360 см, чтобы он был полностью освещён, если на стройки проектора остаются неизменными?

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 1)Человек ростом 1,6 м стоит на расстоянии 5 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 3,6 м. Найдите длину тени человека (в метрах).



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- Решение: По сути, в задаче нужно найти величину из двух подобных прямоугольных треугольников (по двум углам).

Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение для их сторон: $\frac{3,6}{1,6} = \frac{5+x}{x}$ откуда

3.6x=1.6(5+x)

3.6x=1.6x+8

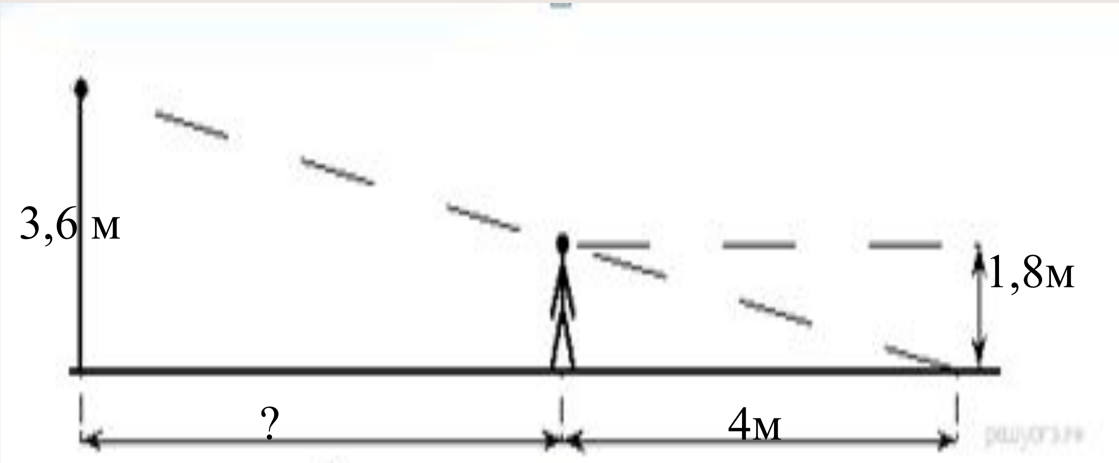
3.6x-1.6x=8

2x=8/2

x=4

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 2) На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 4 м, высота фонаря 3,6 м?



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- Решение: Обозначим человека как AB (от головы до земли) , фонарь как CD (от лампочки до земли) , конец тени человека обозначим точкой O.

Тогда будем иметь два подобных прямоугольных треугольника: OBA и ODC (подобие по двум углам)

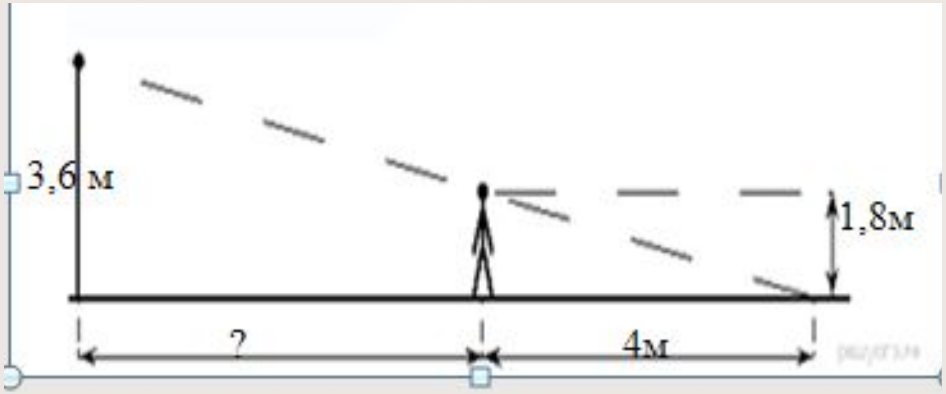
Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение их сторон: $\frac{3,6}{1,8}=\frac{x+4}{x}$

Откуда:

$x=\frac{1.8(x+4)}{3.6}$

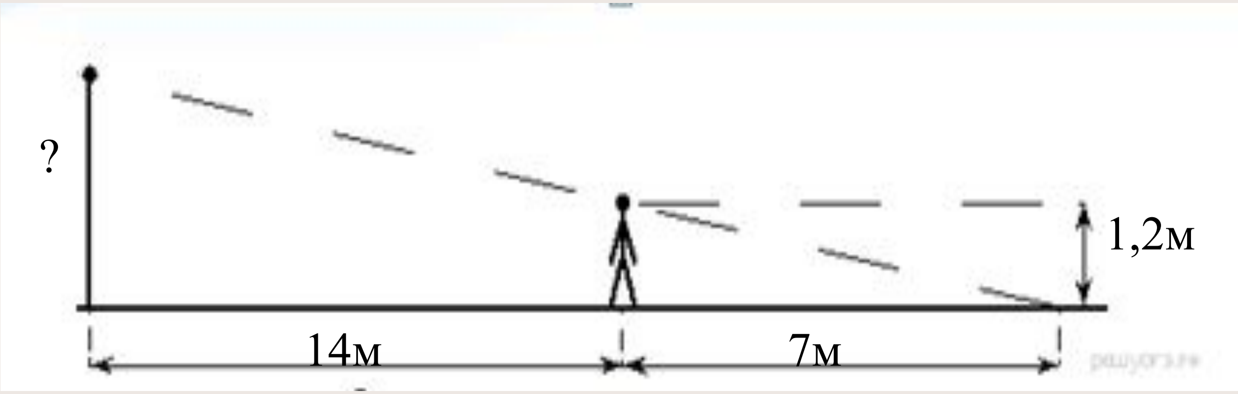
$x=\frac{1.8x+7.2}{3.6}$

$x=1.8x+2$



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

- 3) Человек, рост которого равен 1.2 м, стоит на расстоянии 14 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 7 м. Определите высоту фонаря (в метрах).



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

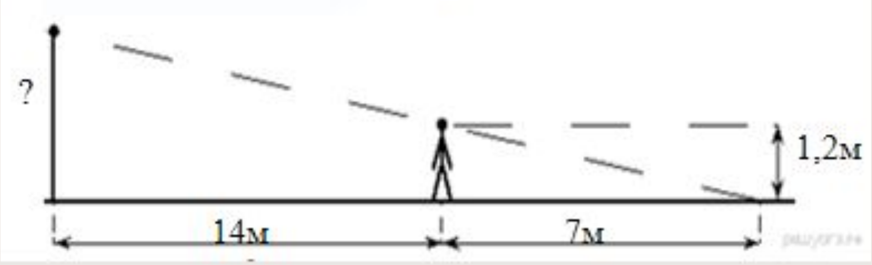
Решение: Обозначим человека как AB (от головы до земли) , фонарь как CD (от лампочки до земли) , конец тени человека обозначим точкой O.

Тогда будем иметь два подобных прямоугольных треугольника: OBA и ODC (подобие по двум углам).

Так как треугольники подобны, то можно записать соотношение их

сторон: $\frac{x}{1.2} = \frac{14+7}{7}$ откуда $x = \frac{1.2\cdot(14+7)}{7} = \frac{25.2}{7} = 3.6$

Ответ:3.6 метра.



Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Задачи для самостоятельного решения

1. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 7,2 м. Найдите длину тени человека в метрах.

2. Человек ростом 1,5 м стоит на расстоянии 12 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 3,5 м. Найдите длину тени человека в метрах.

3. Человек ростом 1,5 м стоит на расстоянии 13 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 5,4 м. Найдите длину тени человека в метрах.

4. Человек ростом 1,9 м стоит на расстоянии 6 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 7,6 м. Найдите длину тени человека в метрах.

5 Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 9 м от столба, на котором висит фонарь на высоте 6,8 м. Найдите длину тени человека в метрах.

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Задачи для самостоятельного решения

- 6.На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 5 м?
- 7.На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 4 м?

Задачи про столб, расстояние, тень человека.

Задачи для самостоятельного решения

7.На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,8 м, если длина его тени равна 9 м, высота фонаря 4 м?

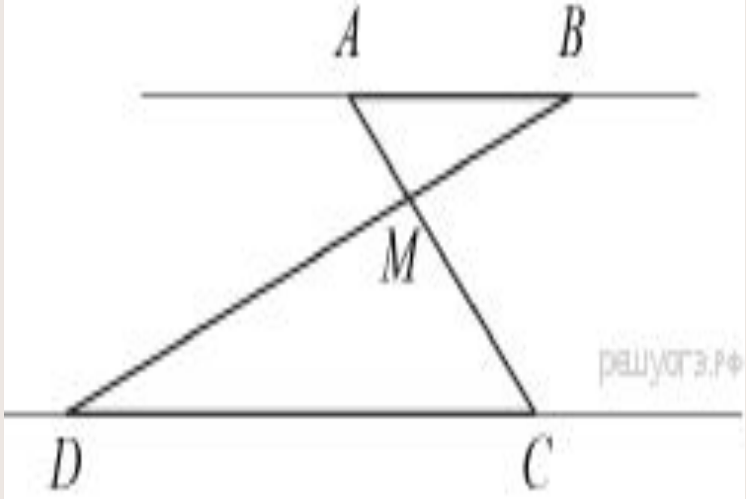
8. Человек, рост которого равен 1,6 м, стоит на расстоянии 17 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 8 м. Определите высоту фонаря (в метрах).

Раздел 3

Типы и решение задач 2 Части ОГЭ.

Задачи на вычисление

- Задача1Отрезки AB и DC лежат на па раллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.



Задачи на вычисление

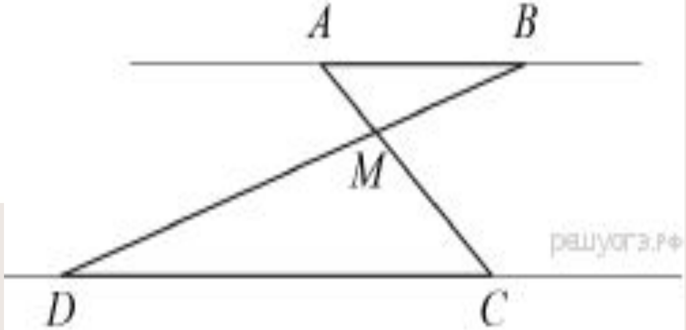
Решение.
Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.

Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC.$$

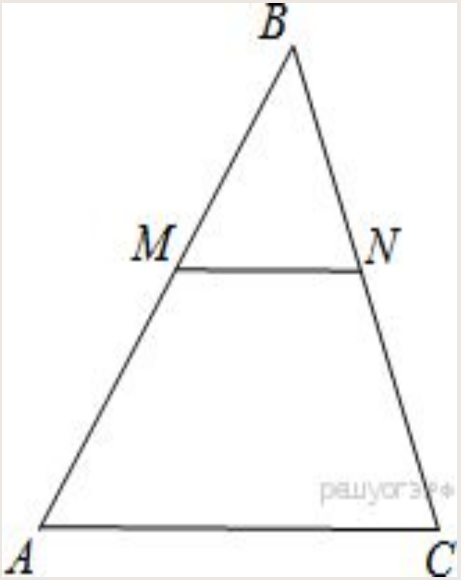
Откуда $MC = \frac{AC}{5} \cdot 3 = \frac{25}{5} \cdot 3 = 15.$

Ответ: 15.



Задачи на вычисление

- <u>Задача </u>2 Прямая, параллельная стороне *AC* треугольника *ABC*, пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите *BN*, если *MN* = 13, *AC* = 65, *NC* = 28.

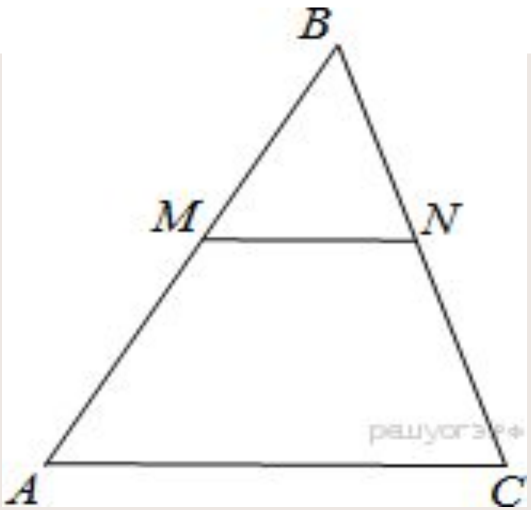


Задачи на вычисление

Решение.
Рассмотри треугольники ABC и BMN, углы BMN и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, угол B — общий, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\frac{BC}{BN} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MN}$. Найдём BN:

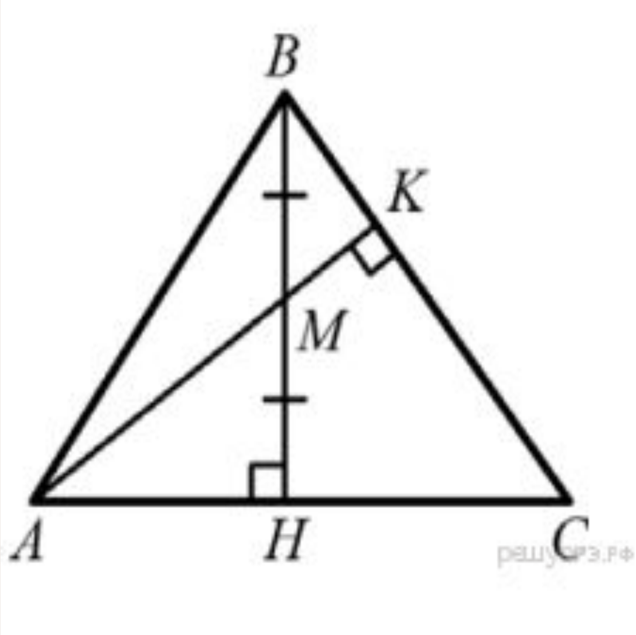
$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} \Leftrightarrow \frac{BN+NC}{BN} = \frac{65}{13} \Leftrightarrow 5BN = BN + 28 \Leftrightarrow BN = 7.$$

Ответ: 7.



Задачи на вычисление

- Задача 3 Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.



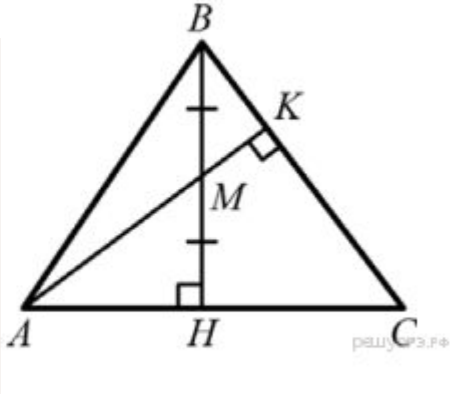
Задачи на вычисление

Решение.

Пусть высота BH треугольника ABC разбивает основание AC на отрезки $AH = 8$ и $CH = 9$, высота AK пересекает высоту BH в точке M, причем $BM = MH = x$. Треугольники AHM, BKM и BHC подобны, поскольку они прямоугольные и первые два имеют равные углы (углы AMH и BMK равны как вертикальные), а вторые два имеют общий угол. Получаем пропорцию

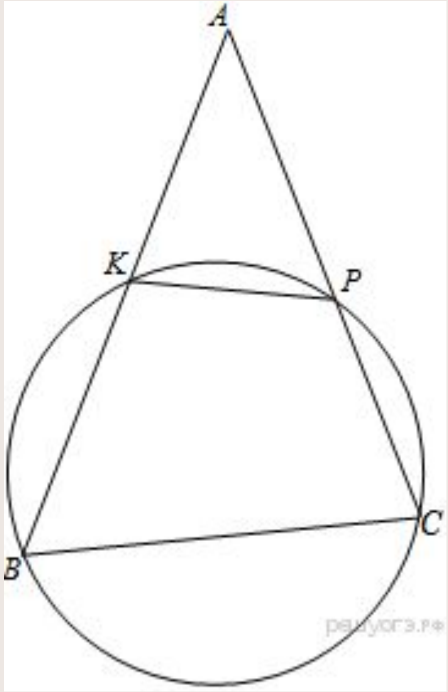
$$\frac{MH}{AH} = \frac{CH}{BH}, \text{ то есть } \frac{x}{8} = \frac{9}{2x}, \text{ откуда } x^2 = 36.$$

Следовательно, $BM = 6$ и $BH = 12$.



Задачи на вычисление

- <u>Задача 4</u> Окружность пересекает стороны *AB* и *AC* треугольника *ABC* в точках *K* и *P* со ответственно и прохо дит через вершины *B* и *C*. Найдите длину отрезка *KP*, если *AP* = 18, а сторона *BC* в 1,2 раза меньше сто роны *AB*.

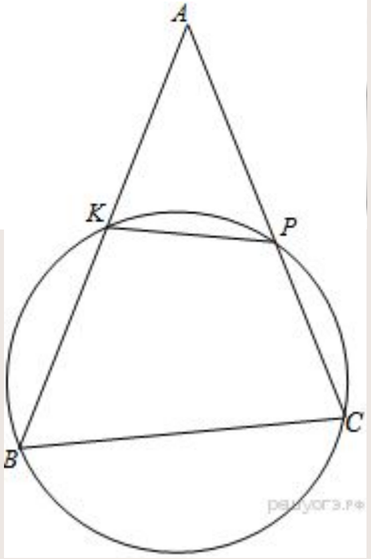


Задачи на вычисление

Решение.
Поскольку четырёхугольник $KPCB$ вписан в окружность, сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$. Углы APK и KPC — смежные, следовательно, $\angle APK + \angle KPC = 180^\circ$. Из приведённых равенств, получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. Рассмотрим треугольники ABC и AKP, угол A — общий, углы APK и KBC равны, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB}$. Используя равенство $\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$, найдём KP:

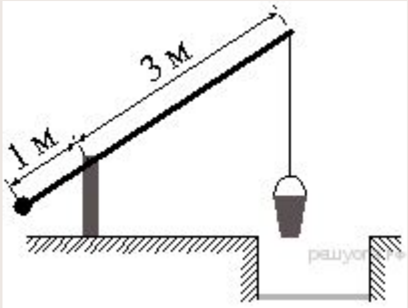
$$\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{1,2BC} \Leftrightarrow KP = \frac{AP}{1,2} \Leftrightarrow KP = 15.$$

Ответ: 15.

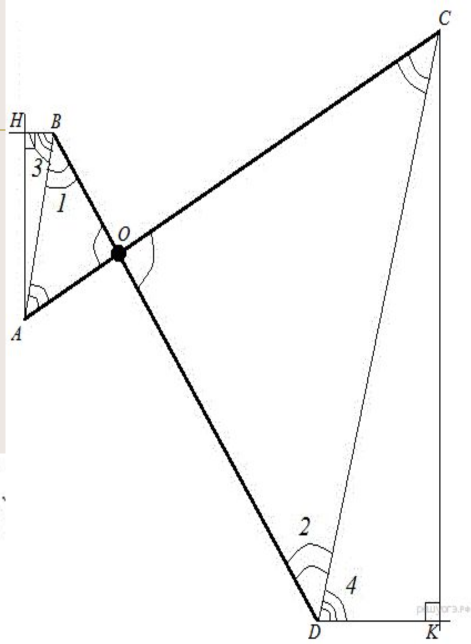


Задачи на вычисление

Задача5 На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 1 м, а длинное плечо — 3 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 0,5 м?



Задачи на вычисление



Решение.

Введём обозначения, приведённые на рисунке. Здесь AC — плечи "журавля" до опускания, BD — после, AH — высота, на которую поднялся конец короткого плеча, CK — высота, на которую опустился конец длинного. Рассмотрим треугольники AOB и COD, углы AOB и COD равны, как вертикальные, следовательно равны и углы при основаниях:

$$\angle ABO = \angle OAB = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = \angle OCD = \angle CDO.$$

Следовательно, треугольники AOB и COD подобны по двум углам, то есть $\frac{OC}{AO} = \frac{OD}{BO} = \frac{CD}{AB} = 3.$

Рассмотри прямые AB и CD, их пересекает секущая BD углы, обозначенные на рисунке 1 и 2 накрест лежащие и равны друг другу, следовательно прямые AB и CD параллельны. Стороны углов 3 и 4 параллельны друг другу, следовательно они равны.

Рассмотрим треугольники AHB и CDK, они прямоугольные, имеют равные углы, следовательно они подобны, значит:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CK}{AH} \Leftrightarrow CK = AH\frac{CD}{AB} \Leftrightarrow CK = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5.$$

Задачи на вычисление

Задачи для самостоятельного решения

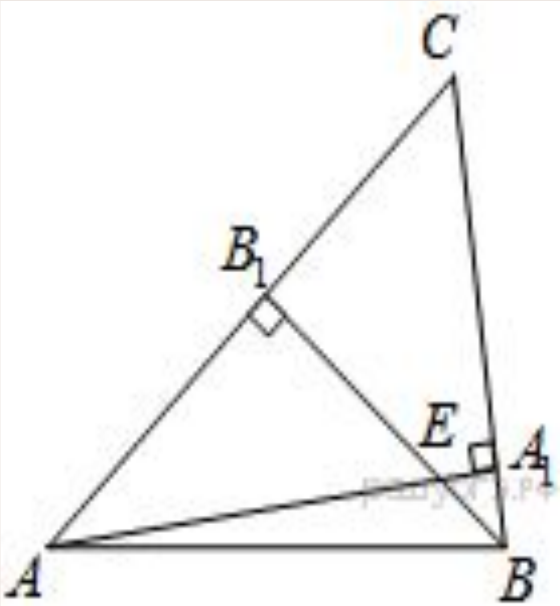
- 1)Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 18$, $DC = 54$, $AC = 48$
- 2)Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 12$, $DC = 48$, $AC = 35$.
- 3)Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 15$, $DC = 30$, $AC = 39$.

Задачи на вычисление

- **Задачи для самостоятельного решения**
- 4)Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N со ответственно. Найдите BN, если $MN = 12$, $AC = 42$, $NC = 25$.
- 5)Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N со ответственно. Найдите BN, если $MN = 17$, $AC = 51$, $NC = 32$.
- 6)Окружность пересекает стороны AB и AC треуголь ника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 16$, а сторона BC в 1,6 раза меньше стороны AB.

Задачи на доказательство

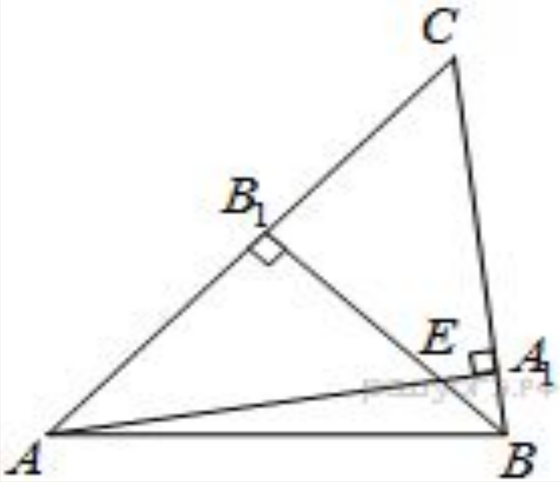
Задача 1Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пе ресекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



Задачи на доказательство

Решение.

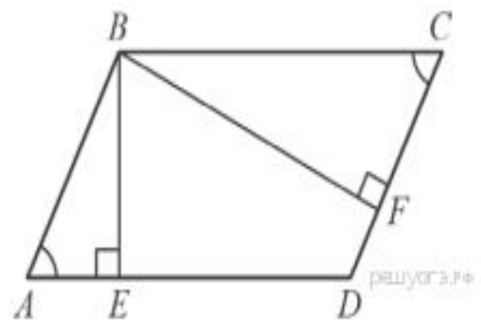
Рассмотрим треугольники AEB_1 и BEA_1, они прямоугольные, углы AEB_1 и BEA_1 равны как вертикальные, следовательно, треугольники подобны, откуда $\frac{EB_1}{EA_1} = \frac{AE}{EB}$. Рассмотрим треугольники EB_1A_1 и AEB, углы AEB и B_1EA_1 равны как вертикальные, $\frac{EB_1}{AE} = \frac{EA_1}{EB}$, следовательно, эти треугольники подобны, откуда $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.



Задачи на доказательство

<u>Задача 2</u>

В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BE и BF. Докажите, что ΔABE подобен ΔCBF.



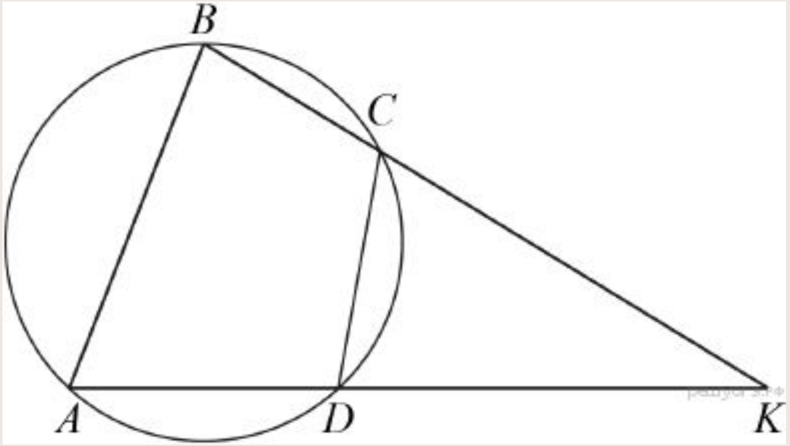
Задание 25 № 311663

Решение.

В треугольниках ABE и CBF имеем $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма, $\angle BEA = \angle CFB$ как прямые углы, значит треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников.

Задачи на доказательство

<u>Задача 3</u> Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны



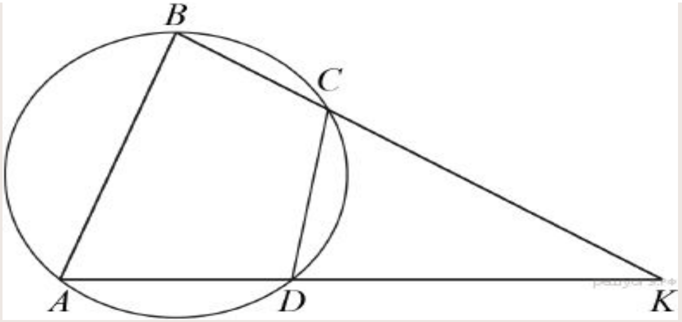
Задачи на доказательство

Решение.
Поскольку четырёхугольник $ABCD$ вписанный, сумма углов ABC и ADC равна $180°$.

Следовательно,

$$\angle KDC = 180° - \angle ADC = \angle ABC.$$

Получаем, что в треугольниках KAB и KCD углы ABK и CDK равны, угол K общий, следовательно, эти треугольники подобны.



Задачи на доказательство

- **Задачи для самостоятельного решения**
- 1)Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.
- 2)В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.
- 3)Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.