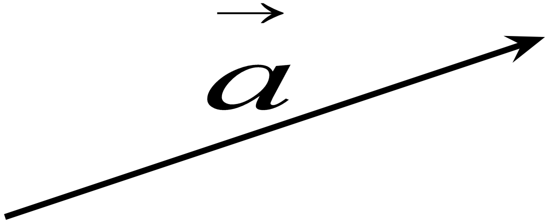
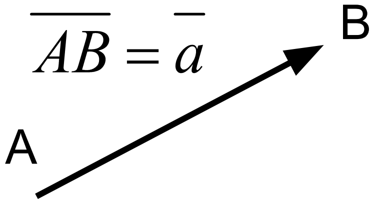
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

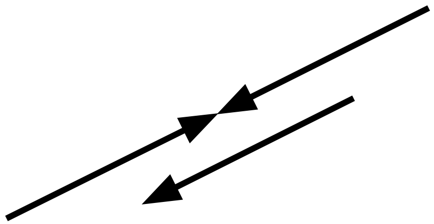
Вектор – направленный отрезок.



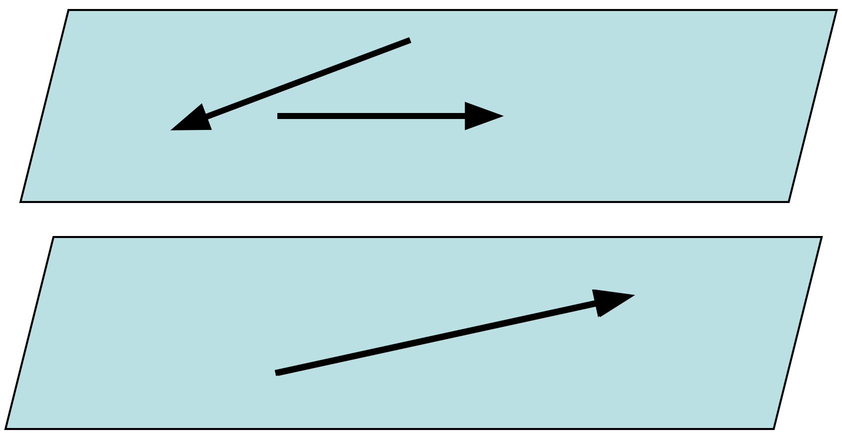
$$\overline{AB} = \overline{a}$$



Модуль вектора –
длина направленного отрезка $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{a}\right|.$

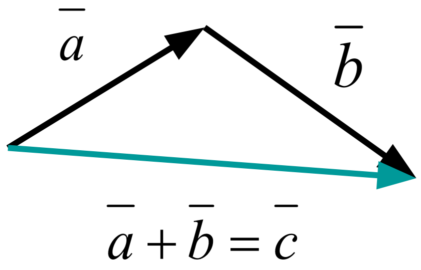


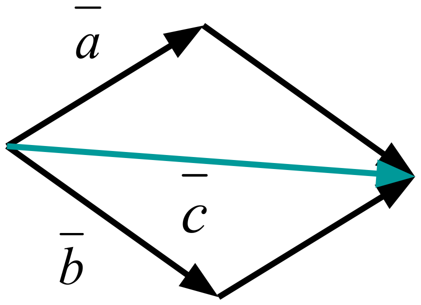
Векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых называются *коллинеарными*.

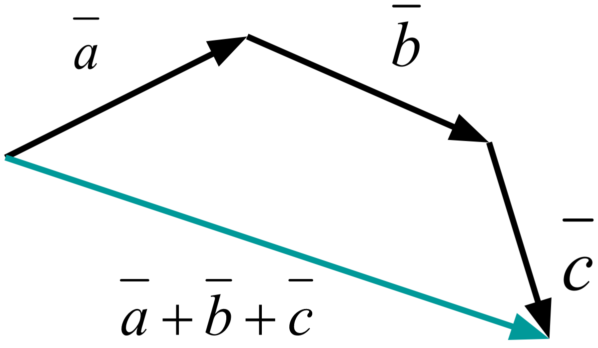


Векторы, лежащие
в одной или параллельных плоскостях
называются *компланарными*.

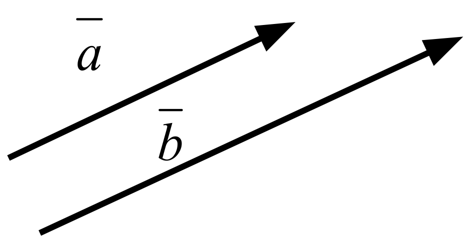
Сложение векторов

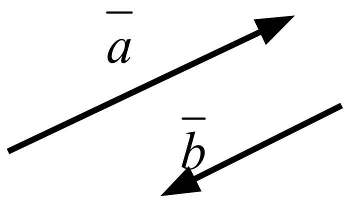






Умножение вектора на число





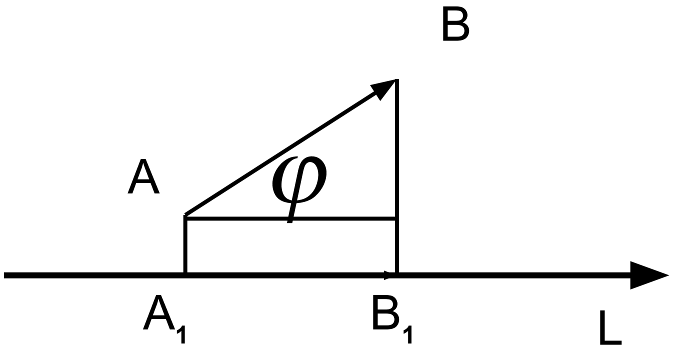
$$\overline{b} = 1{,}4 \cdot \overline{a} \quad (\lambda > 0)$$

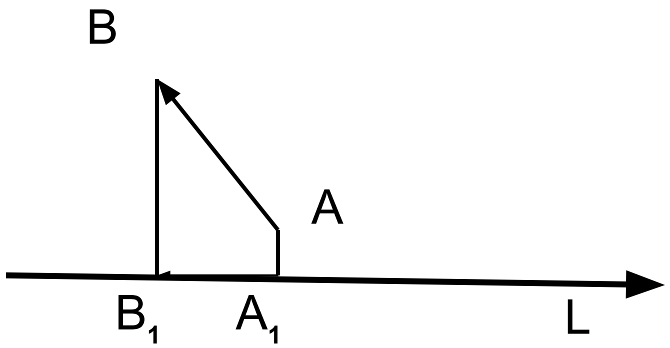
$$\overline{b} = \left(-0{,}7\right) \cdot \overline{a} \quad (k < 0)$$

Множество всех векторов на плоскости, в котором определены операции сложения векторов и умножения на число называется *векторным пространством R^2*.

Множество всех векторов в пространстве, в котором определены операции сложения векторов и умножения на число называется *векторным пространством R^3*.

Проекция вектора на ось

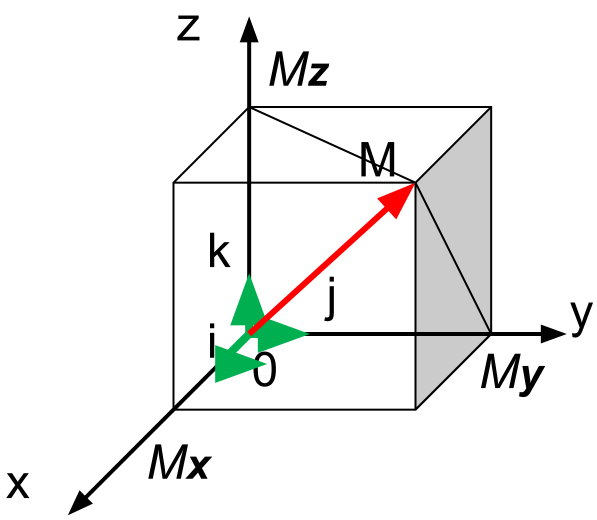




Проекцией вектора ***AB*** на ось ***L*** $np_L \overline{AB}$ называется длина вектора $\boldsymbol{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если направление вектора $\boldsymbol{A_1B_1}$ совпадает с осью ***L***, и со знаком «-», если направление $\boldsymbol{A_1B_1}$ противоположно оси ***L.***

$$np_L \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$$

Ортонормированный базис в пространстве R^3. Декартовы прямоугольные координаты.



M - точка в пространстве.
Проекции вектора OM на координатные оси OX, OY, OZ называются *координатами точки* M
и обозначаются M(x, y, z).
Координаты радиус-вектора OM равны координатам точки M.

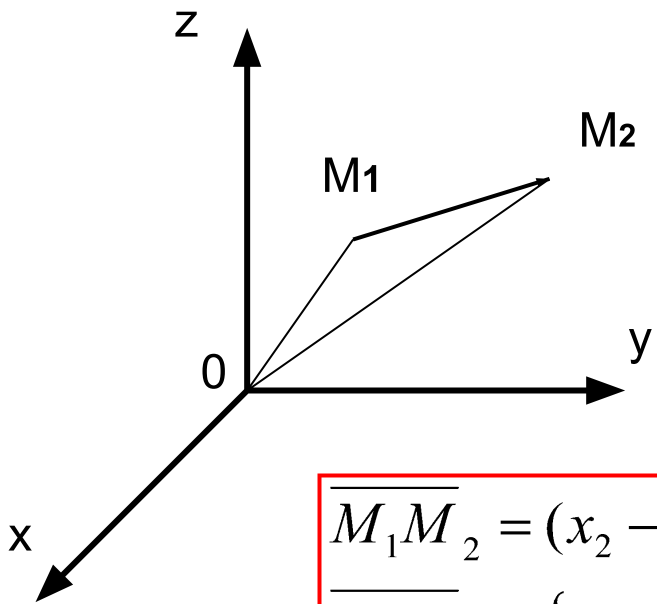
$$\boxed{\overline{OM} = \{x, y, z\}.}$$

$$\boxed{\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} - \text{базис в пространстве } R^3, \text{длина базисных векторов равна } 1.$$

$$\overline{OM} = \overline{OM}_x + \overline{OM}_y + \overline{OM}_z \qquad \overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Координаты вектора, заданного координатами начала и конца



$$M_1(x_1; y_1; z_1) \qquad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$\overline{OM}_1 + \overline{M_1M}_2 = \overline{OM}_2$$

$$\overline{OM}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},$$

$$\overline{OM}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{M_1M}_2 &= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k},\\ \overline{M_1M}_2 &= \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.\end{aligned}}$$

Расстояние ***d*** между двумя точками:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

$$\boxed{\bar{a} + \bar{b} = \{a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z\}}$$

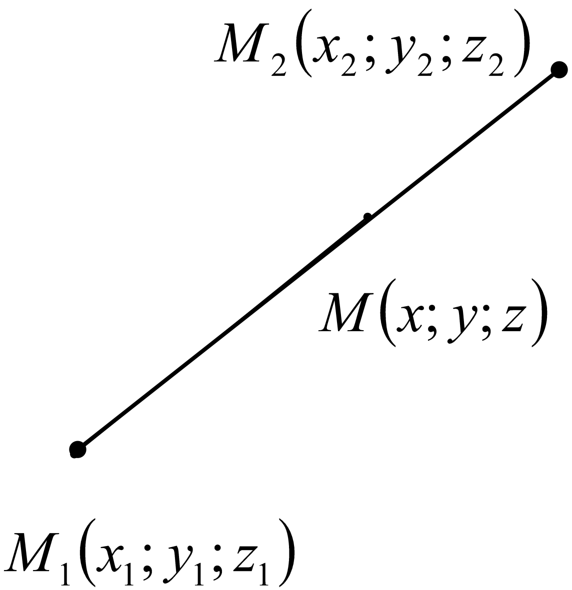
$$\boxed{\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}, \quad \bar{b} = \{\lambda \cdot a_x,\ \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}}$$

Следствие.

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\boxed{\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = k}$$

Деление отрезка в заданном отношении



$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \lambda \Rightarrow \overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$$

$$\overline{M_1M} = \{(x - x_1); (y - y_1); (z - z_1)\}$$

$$\lambda \cdot \overline{MM_2} = \{\lambda \cdot (x_2 - x); \lambda \cdot (y_2 - y); \lambda \cdot (z_2 - z)\}$$

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$$

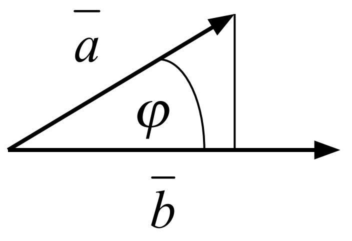
$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}.}$$

Следствие. Координаты середины отрезка:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Скалярное произведение векторов



$$\boxed{\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi.}$$

$$\boxed{\textit{Условие перпендикулярности векторов}\quad \overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0.}$$

Формула скалярного произведения в координатной форме

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z .}$$

Задача.

Даны вершины четырехугольника A(1; 2; 3), B(7; 3; 2), C(-3; 0; 6), D(9; 2; 4).

)Найти величину внутреннего угла при вершине C.

)Доказать, что диагонали перпендикулярны.

1) $\overline{CB} = \{10;3;-4\}$

$\overline{CD} = \{12;2;-2\}$

$\overline{CB} \cdot \overline{CD} = |\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}| \cdot \cos \hat{C}$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{134}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{152}} \approx 0{,}9721$$

$$\boxed{\hat{C} = \arccos(0{,}9721)}$$

2) $\overline{AC} = \{-4;-2;3\}$

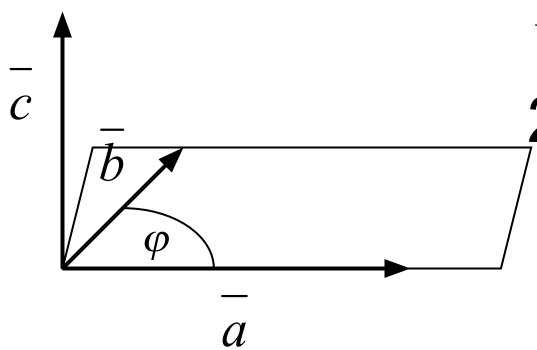
$\overline{BD} = \{2;-1;2\}$

$$\boxed{\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}}$$

Векторное пространство R^n, в котором определено скалярное произведение называется *Евклидовым пространством* и обозначается E^n .

Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется вектор ***c*** , определяемый условиями:



$$1)\ \bar{c} \perp \bar{a}, \quad \bar{c} \perp \bar{b},$$

2) векторы *a*, *b*, *c* образуют правую тройку.

$$3)\ |\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi = S_{пар.},$$

Если векторы заданы координатами, то координаты векторного произведения вычисляются по формуле:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}.}$$

Задача.

Найти площадь треугольника с вершинами A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB} = \{2; -2; -3\}$$

$$\overline{AC} = \{4;\ 0;\ 6\}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left\{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right\}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \{-12; -24; 8\}$$

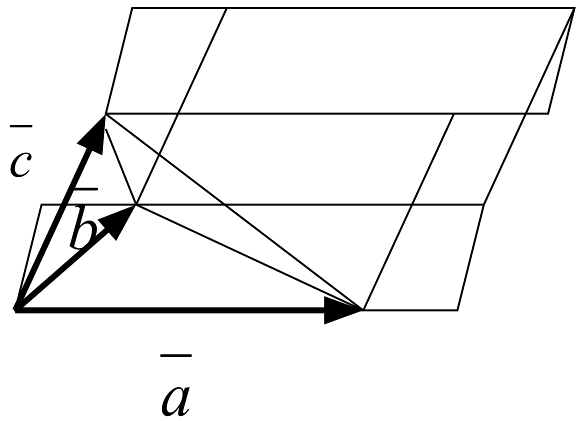
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 576 + 64} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{784} = 14(\text{кв.ед.})$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трёх векторов называется

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}).$$



Свойства:

а) Модуль смешанного произведения численно равен объёму параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах.

б) Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Если векторы заданы своими координатами, то их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Линейная зависимость векторов. Базис векторного пространства.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_k}$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} + \dots + \lambda_k \cdot \overline{a_k} = \overline{0}$. В противном случае векторы называются *линейно-независимыми.*

Совокупность n линейно-независимых векторов в пространстве R^n называется базисом.

Теорема. Любой вектор пространства R^n можно разложить по базису единственным образом.

Задача. Доказать, что векторы $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 7\overline{k}$ компланарны.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (28 - 8 + 9) - (12 + 24 - 7) = 29 - 29 = 0$$