Занимательные задачи по математике для старшеклассников

Уважаемые ребята!

Задачи, несомненно, способствуют развитию смекалки и сообразительности. Каждодневное стремление развитого человека к познанию объясняет тот факт, что занимательная математическая задача доставляет не меньшее удовольствие, чем остроумный анекдот. Каждый день появляется много прекрасных математических задач с новыми идеями, требующими для решения нестандартного подхода сообразительности.

Это связано и с развитием самой математики, и с увеличивающимся интересом к задачам математических олимпиад разного уровня — от школьных до международных. Много задач сочиняется ежегодно для вступительных экзаменов в вузы. Однако среди них редко можно встретить занимательную задачу, требующую для решения свежей, нестандартной идеи. В подавляющем большинстве случаев это чисто «технические» задачи. Поэтому человек, который знаком лишь с задачами для вступительных экзаменов, получит удовольствие от занимательных математических задач, собранных в этом разделе.

Задача № 1 *Два килограмма крупы*

Имеется 9 кг крупы и чашечные весы с двумя гирями в 50 г и 200 г. Попробуйте за 3 взвешивания отвесить 2 кг крупы. Можно ли это сделать, если имеется лишь гиря в 200 г?

Посмотреть ответ

Сначала разделим крупу на две равные части по 4 кг 500 г (первое взвешивание), затем одну из частей вновь на две равные части по 2 кг 250 г (второе взвешивание) и третьим взвешиванием забираем из такой части 250 г., воспользовавшись гирями, оставив требуемые 2 кг. Если же есть лишь гиря в 200 г, то при первом взвешивании положим ее на одну из чашек весов, тогда после уравновешивания на ней окажется 4 кг 400 г, а на другой — 4 кг 600 г. Разделив вторым взвешиванием часть с 4,4 кг крупы пополам, получим 2 части по 2,2 кг, после чего третьим взвешиванием убираем из одной части лишние 200 г, второй раз использовав гирю.

Задача № 2 ***Делимость на 1993***

Докажите, что число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1989 \cdot 1991$ — $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1992$ делится на 1993.

Посмотреть ответ

Представим второе слагаемое в виде (1993- 1)(1993 - 2) ·.........-(1993-1990)(1993 - 1991). Раскроем скобки. Среди полученных слагаемых лишь одно не делится на 1993. Это число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1991$, совпадающее с первым слагаемым первоначальной суммы. Поэтому разность делится на 1993.

Задача № 3 ***За одно посещение***

В одной комнате находятся 3 выключателя, а в другой — 3 лампочки. Каждый выключатель обслуживает одну лампочку. Как узнать, какой выключатель обслуживает какую лампочку, если в комнату с лампочками можно войти лишь один раз?

Посмотреть ответ

Нужно включить один выключатель, подождать некоторое время, затем его выключить и включить второй выключатель, после этого пойти в комнату с лампочками. Горящая лампочка связана со вторым выключателем, из потушенных — еще не остывшая связана с первым, а холодная — с третьим выключателем.

Задача № 4 **Замечательная последовательность**

Какое число нужно поставить вместо знака * в последовательности: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 24,31, 100, *, 10000?

Посмотреть ответ

В этой последовательности записаны представления числа 16 сначала в 16-ричной системе счисления, потом в 15-ричной, 14-ричной и т.д. Следовательно, вместо звёздочки нужно поставить число **121.**

Задача № 5 **Инфляция**

Месяц назад я купил на базаре 1 кг картошки, 1 л молока и 10 яиц. В прошлое воскресенье картошка стала дороже в 3 раза, молоко — в 4, яйца — в 5 раз, и мне пришлось заплатить за ту же покупку 60 руб. Сегодня картошка стоит уже в 6 раз дороже, чем месяц назад, молоко — в 5 раз, а яйца лишь в 4 раза, и я заплатил за ту же покупку 66 руб. Сколько денег я уплатил в первый раз?

Посмотреть ответ

Пусть в первый день картошка стоила x рублей за 1 кг, молоко — y руб. за 1 л и яйца — z рублей десяток. Тогда вся покупка в первый день стоила $x + y + z$ руб., во второй день $3x+4y+5z=60$ руб., а в третий день $6x + 5y + 4z = 66$ руб. Сложив полученные уравнения, получим $9(x+y+z) = 126$ рублей, откуда $x+y+z=$ **14 рублей.**

Задача № 6 *Маляры и монтажники*

10 рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть вначале окрашено, а затем смонтировано. Время окраски — 10 мин, время монтажа — 20 мин. После окраски изделие должно 5 мин сохнуть. Как разбить рабочих на маляров и монтажников, чтобы выполнить работу в кратчайшее время?

Посмотреть ответ

3 маляра и 6 монтажников, оставшегося рабочего можно поставить либо маляром, либо монтажником, либо вообще не использовать — от этого время выполнения работы — 195 мин — не изменится. Покажем, что при других расстановках время работы больше. Действительно, если маляров меньше 3-х, то время на окраску не меньше 250 мин, а если монтажников меньше 6, то время на монтаж не меньше 200 мин.

Задача № 7 *На дискотеке*

На дискотеку собрался почти весь класс — 22 человека. Рената танцевала с 7-ю мальчиками, Ширинат — с 8-ю, Вера — с 9-ю и так далее до Ирины, которая танцевала со всеми мальчиками. Сколько мальчиков было на дискотеке?

Посмотреть ответ

Пусть девочек было x, тогда Ирина танцевала с $x + 6$ мальчиками, следовательно, $x + (x + 6) = 22$. Отсюда получаем, что ***девочек было 8, а мальчиков 14.***

Задача № 8 *Население страны*

В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с 6-ю карабасами и 9-ю барабасами. Каждый барабас знаком с 10-ю карабасами и 7-ю барабасами. Кого в этой стране больше — карабасов или барабасов?

Посмотреть ответ

Подсчитаем количество пар друзей, один из которых караоас, а другои — барабас. Если обозначить через ***К*** количество карабасов и через ***Б*** количество барабасов, то, с одной стороны, таких друзей ***9К***, а с другой — ***10Б***, значит ***9К= 10Б***, откуда **К больше Б**.

Задача № 9 Новые крестики-нолики

Двое играют в крестики-нолики на доске 3 х 3 по следующим правилам: каждый в свою очередь может поставить любой значок — крестик или нолик. Выигрывает тот, при ходе которого образуются 3 подряд стоящих одинаковых значка. Кто выигрывает в эту игру — начинающий или ходящий вторым?

Посмотреть ответ

Выигрывает начинающий, ставя крестик на центральное поле. Второй вынужден ставить нолик, поскольку в противном случае первый выигрывает уже следующим ходом. Если второй ставит нолик, то первый отвечает ноликом в клетку, симметричную относительно центра. Если нолик был поставлен в угловую клетку, то независимо от следующего хода второго создается ситуация, в которой первый может образовывать своим ходом 3 одинаковых знака на одной прямой. Игра окажется более продолжительной, если второй поставит нолик на середину стороны, ответ первого такой же, как и раньше. Поставив нолик на середину второй стороны, и получив ответ нулем в симметричную клетку, второй вынужден поставить нолик в угловую клетку и проигрывает, поскольку начинающий своим ходом вновь образует 3 нуля на одной прямой.

Задача № 10 *Одно наверняка*

Докажите, что из 18 последовательных трехзначных чисел хотя бы одно делится на сумму своих цифр.

Посмотреть ответ

Среди 18-ти последовательных чисел одно обязательно делится на 18. Рассмотрим его. Его сумма цифр должна делиться на 9, а поэтому может быть равна только 9 или 18, так как сумму цифр 27 имеет единственное трехзначное число 999, которое не делится на 18, а большая сумма цифр невозможна. Итак, выбранное число делится на 18 и имеет сумму цифр 9 или 18, следовательно, делится на свою сумму цифр.

Задача № 11 ***Расставьте скобки***

Расставьте скобки в левой части равенства так, чтобы оно было верным. 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 7.

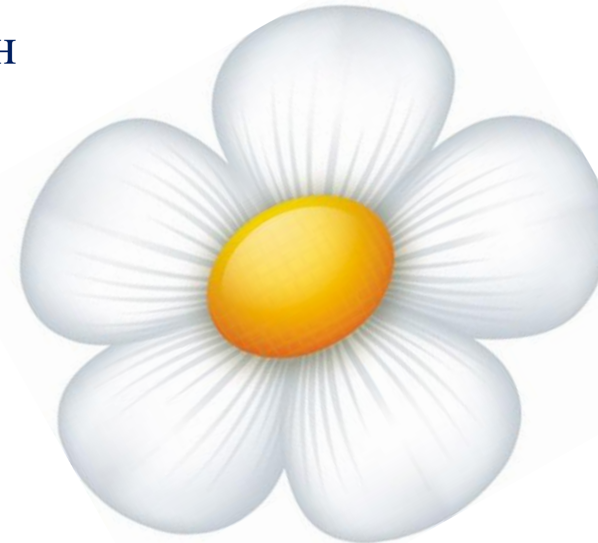
(:-)

Посмотреть ответ

Заметим, что при любой расстановке скобок, после представления полученного числа в виде дроби, число 1 окажется в числителе, а число 2 — в знаменателе. Отсюда получаем 3 возможных выражения числа 7 =
((((1:2):3):4):5):((((6:7):8):9):10) =
=1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10)) =
=1((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))).

Задача № 12 *Ромашка*

Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последни лепесток. Докажите, что девочка, делающая хо второй, всегда может выиграть (у ромашки больше двух лепестков).



Посмотреть ответ

Выигрышная стратегия второй девочки такова: своим первым ходом она отрывает 1 или 2 лепестка, противоположных оторванным первой девочкой, так, чтобы лепестки ромашки разделились на две симметричные половины. При следующих ходах первой девочки вторая отрывает лепестки, симметричные оторванным первой.