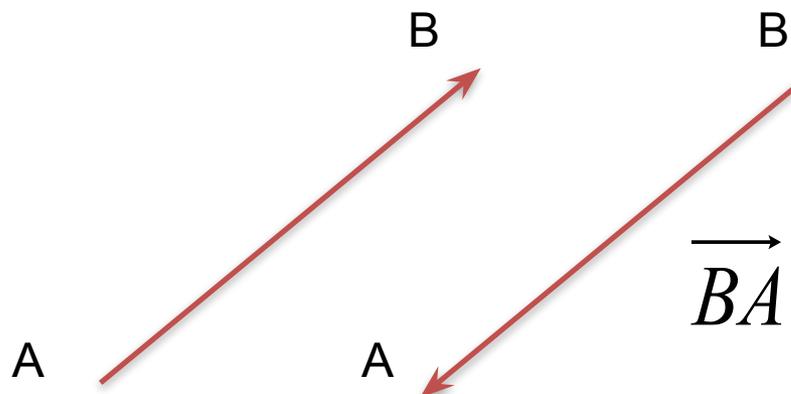


ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Опр. Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок AB , у которого одна из ограничивающих его точек A принимается за начало, а вторая B – за конец.

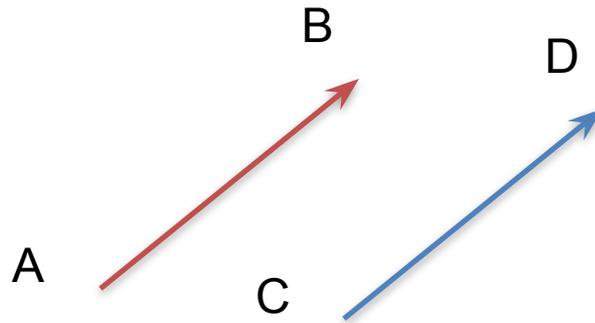
\overrightarrow{AB} или \vec{a}



Опр. Ненулевые векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

- 1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;
- 2) имеют одинаковые длины ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$) и одинаково направлены.

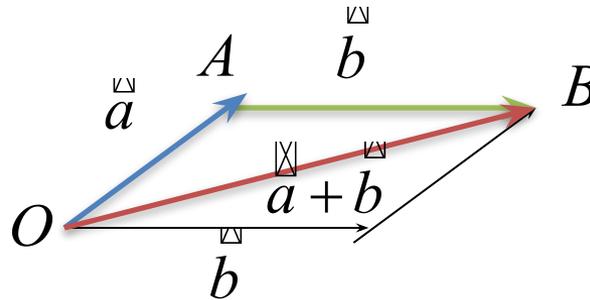
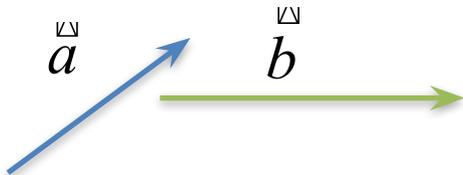
Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.



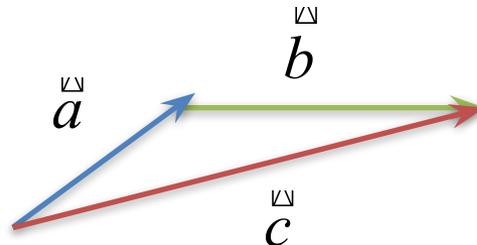
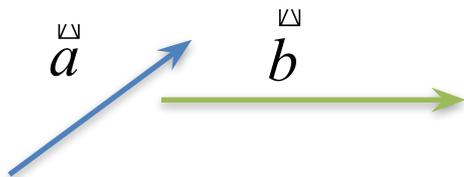
Сложение векторов

- Пусть \vec{a} и \vec{b} - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор \vec{b} , получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор \overrightarrow{OB} называется **суммой** векторов \vec{a} и \vec{b} .

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$



Правило параллелограмма

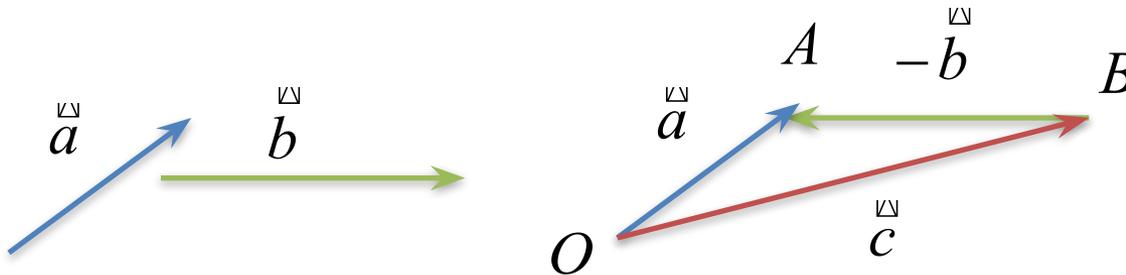


Правило треугольника

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

2. Разность векторов

Опр. *Разность* векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора \vec{a} и противоположного вектора $-\vec{b}$.



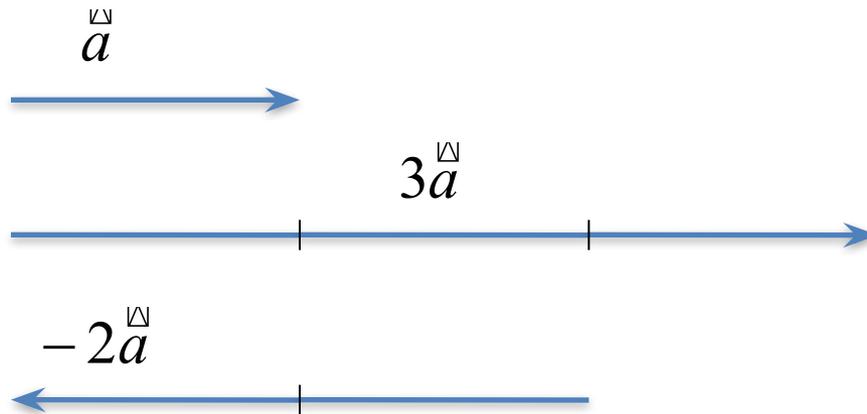
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

3. Умножение вектора на число

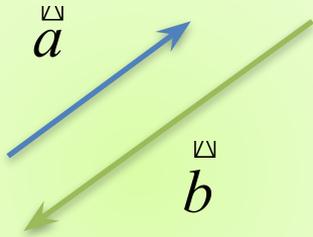
Опр. Произведение вектора \vec{a} на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который имеет направление вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda \vec{a}$.

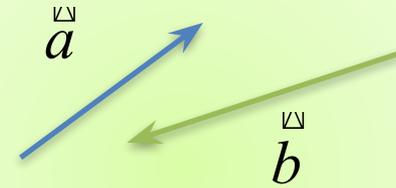
Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.



Опр. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются **неколлинеарными**.



Коллинеарные векторы



Неколлинеарные векторы

Нулевой вектор **коллинеарен** всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.

Опр. Вектор \vec{a} называется **коллинеарным** прямой l , если этот вектор лежит либо на прямой l , либо прямой, параллельной l .

Первый признак коллинеарности двух ненулевых векторов

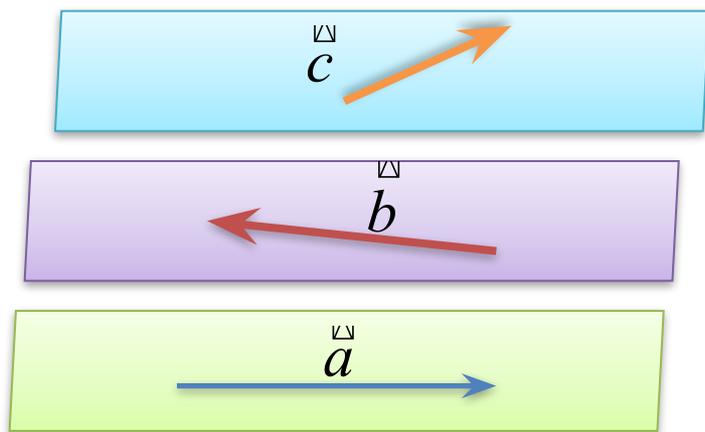
(следует из определения)

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \mu \cdot \vec{b}, \quad \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a},$$

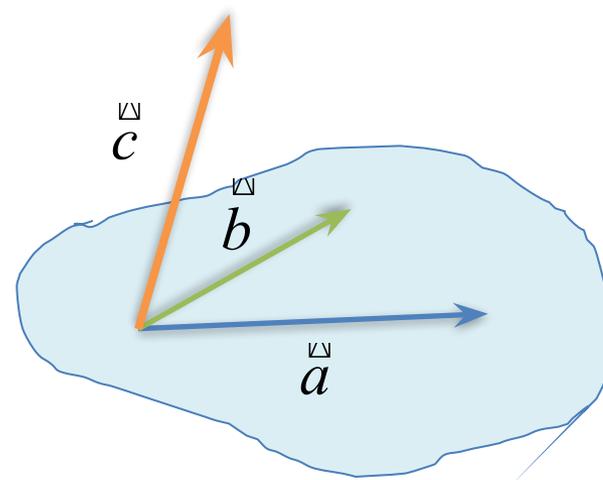
где λ и μ - некоторые числа.

Опр. Три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называются **компланарными**, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются **некомпланарными**.

Если хоть один из векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} нулевой вектор, то эти векторы компланарны.



Компланарные векторы



Некомпланарные векторы

Множество всех свободных векторов на прямой будем обозначать R_1 , на плоскости - R_2 , в пространстве - R_3 .

Опр. Множества R_1, R_2, R_3 вместе с введёнными выше линейными операциями над векторами называются также ***векторными пространствами*** R_1, R_2, R_3 .

Опр.

- 1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.
- 2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.
- 3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Опр. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами** или **координатами** вектора в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- 1) равные векторы имеют одинаковые координаты,
- 2) при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha) \vec{e}_1 + (\lambda\beta) \vec{e}_2 + (\lambda\gamma) \vec{e}_3$$

- 3) при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$$(\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3$$

Опр. Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ некоторая система векторов пространства R (R_1, R_2 или R_3), тогда любой вектор вида $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов**

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n -$$

некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами линейной комбинации.**

Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он **разложен** по этим векторам.

Опр. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е.

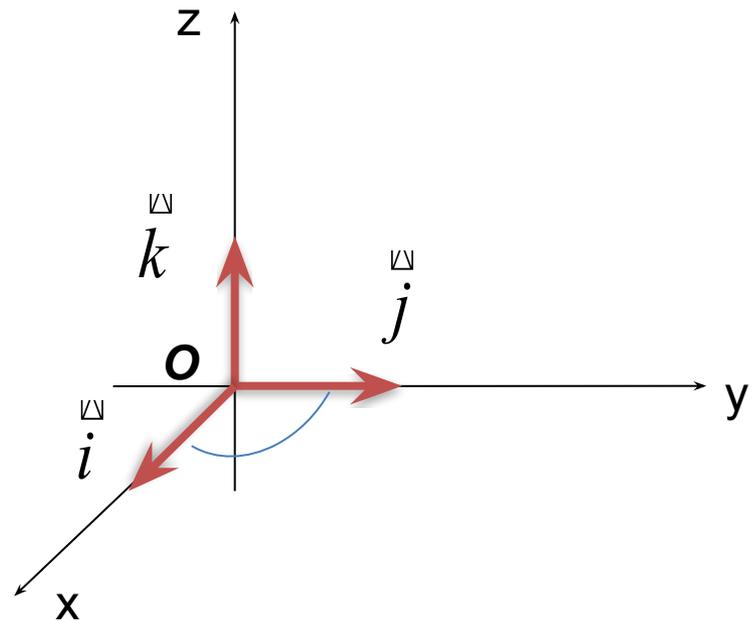
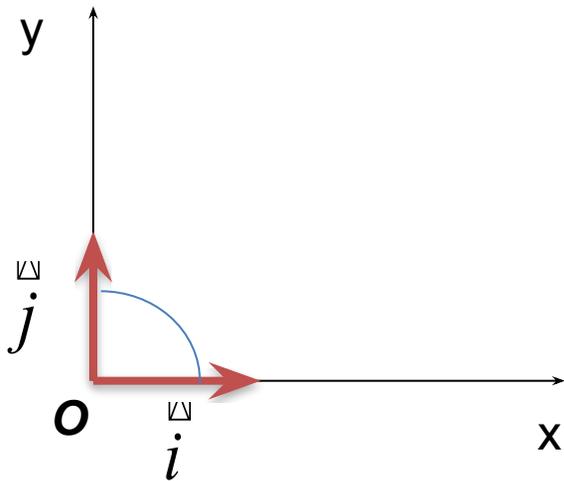
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$$

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются **линейно независимыми**.

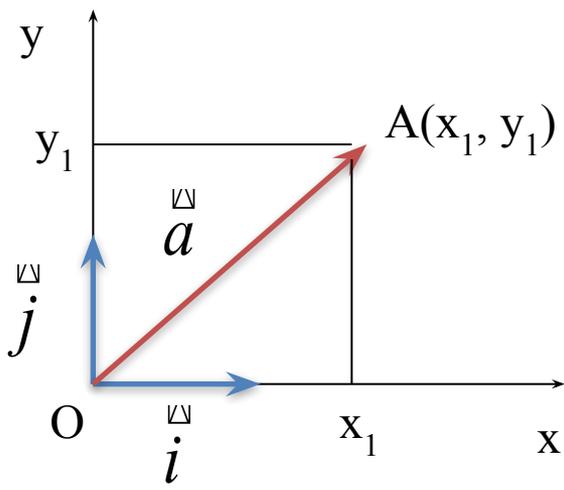
Свойства

1. Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.
5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.
6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ



- O – произвольная точка
- \vec{i}, \vec{j} ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) единичные взаимно-перпендикулярные векторы плоскости (пространства) – орты
- Oxy – прямоугольная система координат на плоскости
- $Oxyz$ – декартова система координат в пространстве
- x – абсцисса
- y – ордината
- z – аппликата



Вектор \vec{a} заданный на плоскости Oxy , может быть представлен в виде:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

где x_1, y_1 – проекции вектора на соответствующие оси координат называются **прямоугольными координатами вектора**.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ с координатами x_1 и y_1 обозначается: $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и называется **радиус-вектором** точки А.

Задача 1. Найти координаты вектора, если даны координаты его начальной и конечной точек.

Решение.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Но $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1)$ в прямоугольных координатах :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Длина вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ в декартовых координатах:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$$

Направление вектора определяется углами α , β , γ , образованными с осями координат Ox , Oy , Oz .

Косинусы этих углов определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|a|} \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|a|} \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|a|}$$

3. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Опр. **Скалярным произведением** двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется **число**, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 1) $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Разность двух векторов:

$$\vec{b} - \vec{a} = (20 - 15; 3 - (-6); 16 - (-5)) = (5; 9; 21)$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 15 \cdot 5 + (-6) \cdot 9 + (-5) \cdot 21 = -84$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 2) $|\vec{a}|$

Длина вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{225 + 36 + 25} = \sqrt{286}$$

Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 3) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}})$ если $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(15; -6; -5) + (20; 3; 16) = (50; -9; 6)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = \frac{15 \cdot 50 + (-6) \cdot (-9) + (-5) \cdot 6}{\sqrt{15^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \sqrt{50^2 + (-9)^2 + 6^2}} =$$

$$\frac{750 + 54 - 30}{\sqrt{286} \cdot \sqrt{2617}} = \frac{774}{\sqrt{748462}}$$

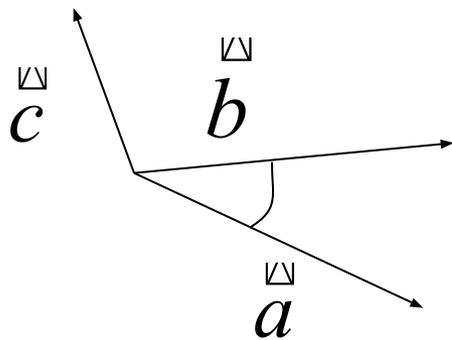
Задача. Даны векторы $\vec{a} = (15; -6; -5)$ $\vec{b} = (20; 3; 16)$

Найти: 4) $|\vec{a} + \vec{b}|$

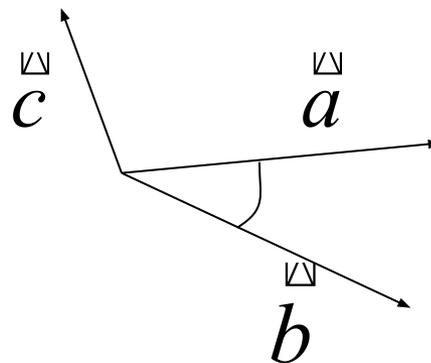
$$\vec{a} + \vec{b} = (35; -3; 9)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{35^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{1225 + 9 + 81} = \sqrt{1315}$$

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют **правую тройку** (**левую тройку**) или **положительно ориентированы** (**отрицательно ориентированы**), если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму \vec{b} виден против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Правая тройка



Левая тройка

Векторное произведение векторов

Опр. **Векторным произведением** двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой третий **вектор** \vec{c} , который удовлетворяет следующим трем условиям:

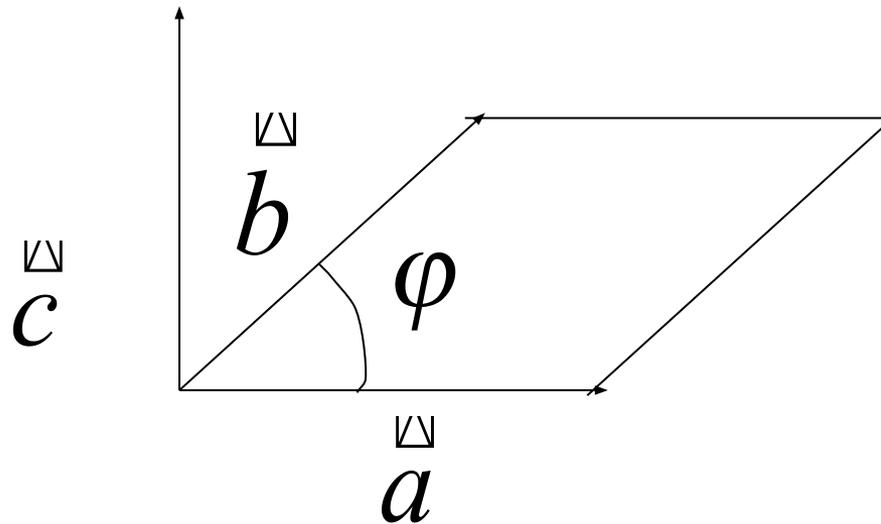
1) вектор ортогонален $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$2) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

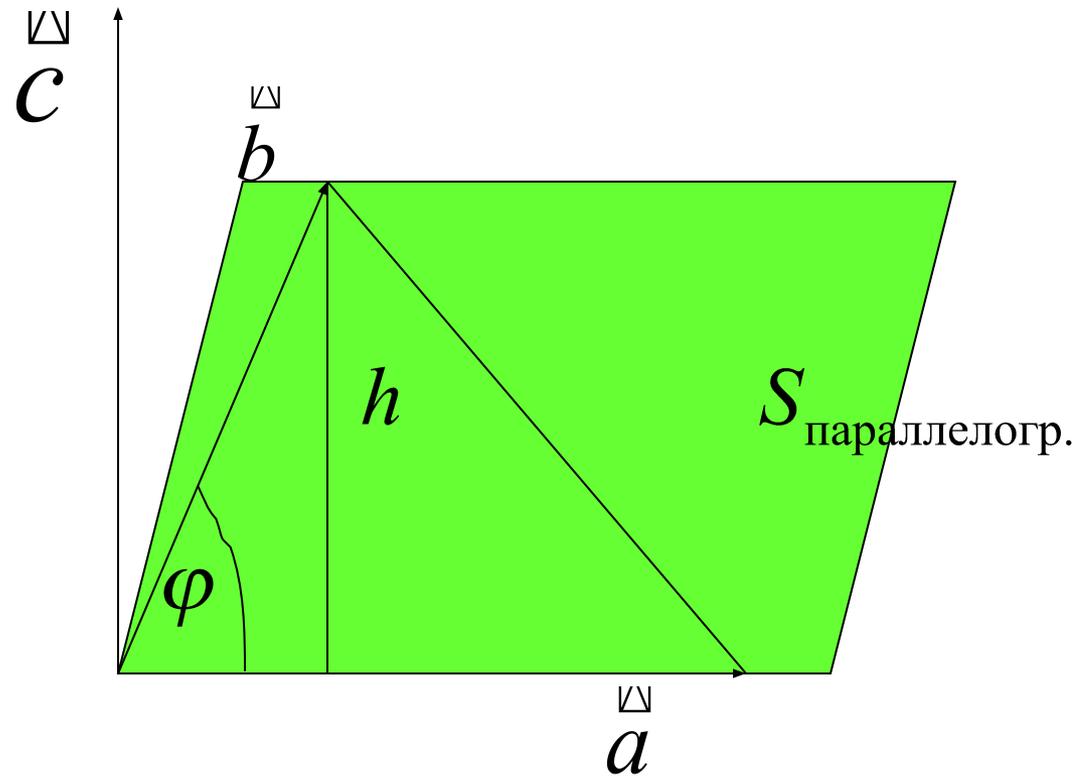
3) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют правую тройку.

Обозначения:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{или} \quad \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$$



Геометрический смысл



$$2S_{\text{треуг.}} = S_{\text{параллелогр.}} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

Свойства

$$1. \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$2. \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0},$$

$$3. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

$$4. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

5. *Критерий коллинеарности векторов*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

6. Теорема (запись векторного произведения в координатах)

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(псевдоопределитель)

Смешанное произведение векторов

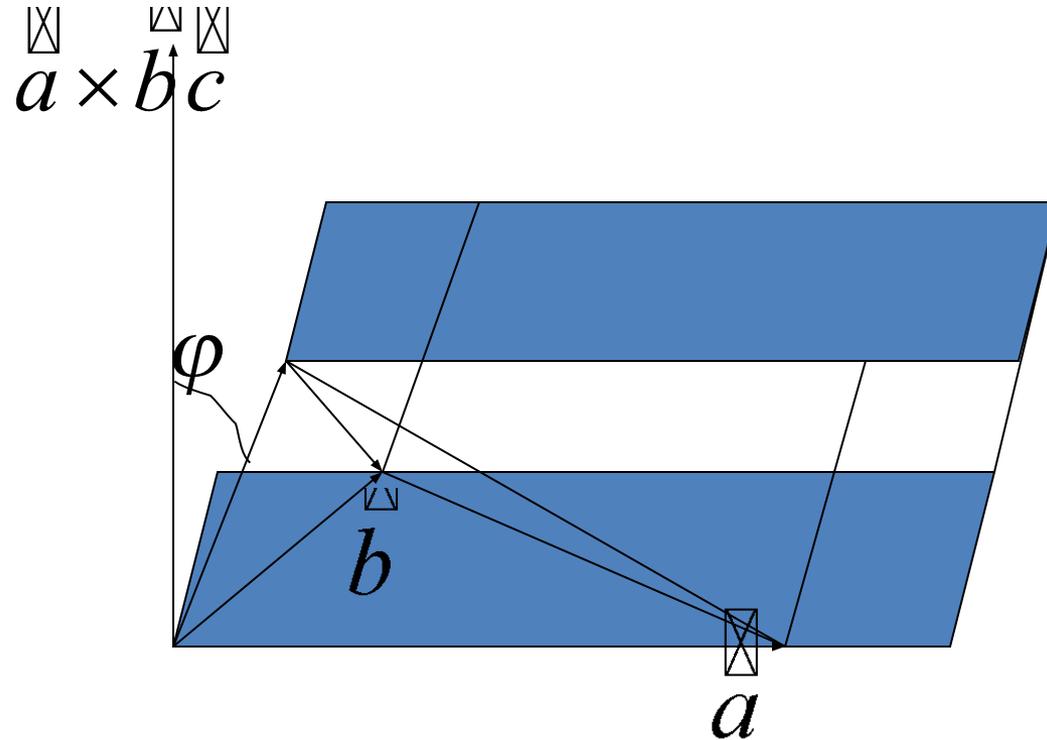
Опр. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется **число**, обозначаемое abc и определяемое следующим образом

$$abc = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Другие обозначения :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \quad \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Геометрический смысл



$$V_{\text{парал.}} = \left| (a \times b) \cdot c \right|$$

Свойства

$$1. \quad (\overset{\boxtimes}{a} \times \overset{\boxtimes}{b}) \cdot \overset{\boxtimes}{c} = \overset{\boxtimes}{a} \cdot (\overset{\boxtimes}{b} \times \overset{\boxtimes}{c})$$

$$2. \quad \overset{\boxtimes}{\lambda} \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c} = \overset{\boxtimes}{\lambda} (\overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c})$$

$$3. \quad \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} = \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{b} = \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{a} = 0$$

$$4. \quad (\overset{\boxtimes}{a} + \overset{\boxtimes}{d}) \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c} = \overset{\boxtimes}{a} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c} + \overset{\boxtimes}{d} \overset{\boxtimes}{b} \overset{\boxtimes}{c}$$

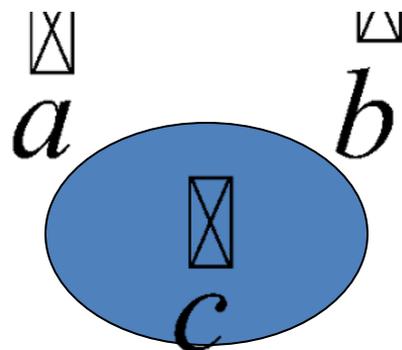
$$5. \overset{\boxtimes \triangleright \boxtimes}{abc} = \overset{\triangleright \boxtimes \boxtimes}{bca} = \overset{\boxtimes \boxtimes \triangleright}{cab}$$

не

нарушается круговой порядок

$$6. \overset{\boxtimes \boxtimes \boxtimes}{abc} = -\overset{\boxtimes \boxtimes \boxtimes}{bac} = -\overset{\boxtimes \boxtimes \boxtimes}{acb} = -\overset{\boxtimes \boxtimes \boxtimes}{cba}$$

нарушается круговой порядок



7. Теорема (запись смешанного произведения в координатах)

Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),$$
$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$
$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

тогда

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

8. Признак компланарности трех векторов (линейной зависимости трех векторов)

Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны (линейно
зависимы)

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$