Производная функции

- Возрастание и убывание функций
- Минимум и максимум функции
- Выпуклость графика функции, точки перегиба
- Асимптоты графика функции
- Общая схема исследования функции и построения графика
- Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функций.

Теорема 1 (необходимые условия)

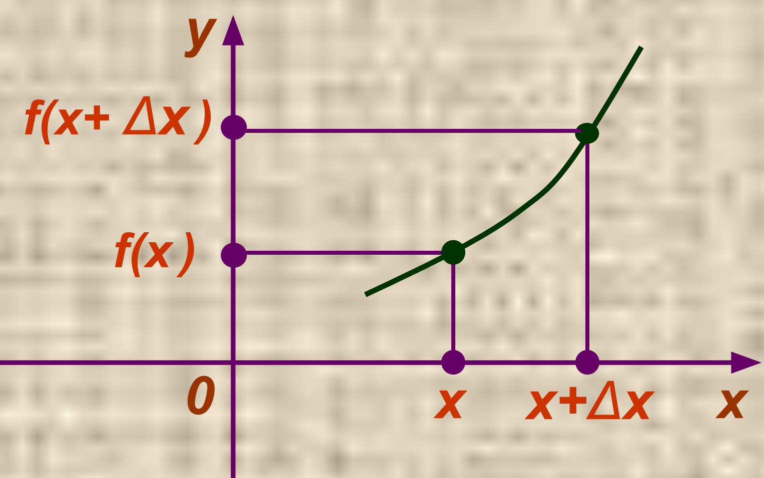
Если дифференцируемая на интервале ***(a; b)*** функция ***f(x)*** возрастает (убывает), то:

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \quad \forall x \in (a; b)$$

Доказательство:

Пусть функция ***f(x)*** возрастает, поэтому если

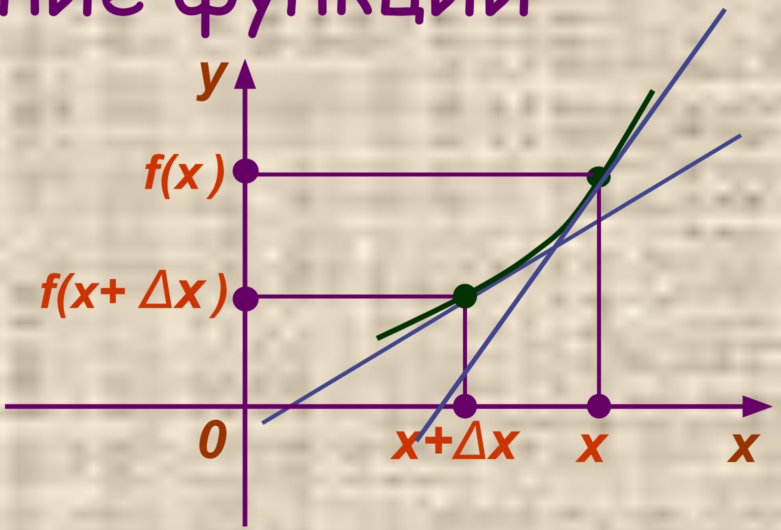
$$\Delta x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \Delta x > x \\ f(x + \Delta x) > f(x) \end{cases}$$



Возрастание и убывание функций

если

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \Delta x < x \\ f(x+\Delta x) < f(x) \end{cases}$$



В обоих случаях:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \quad \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы с положительным направлением оси OX.

Аналогично рассматривается случай, когда функция убывает на интервале ***(a; b)*** .

Возрастание и убывание функций

Справедлива также обратная теорема:

Теорема 2 (достаточные условия возрастания и убывания)

Если функция дифференцируема на интервале **(a; b)** и

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \quad \forall x \in (a; b)$$

то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Исследовать функцию на возрастание (убывание): $y = x^3 - 3x - 4$

Область определения: $x \in R$

$$y' = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$$

$$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$ *- функция возрастает*

$$y' < 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-1; 1)$$ *- функция убывает*

Минимум и максимум функции

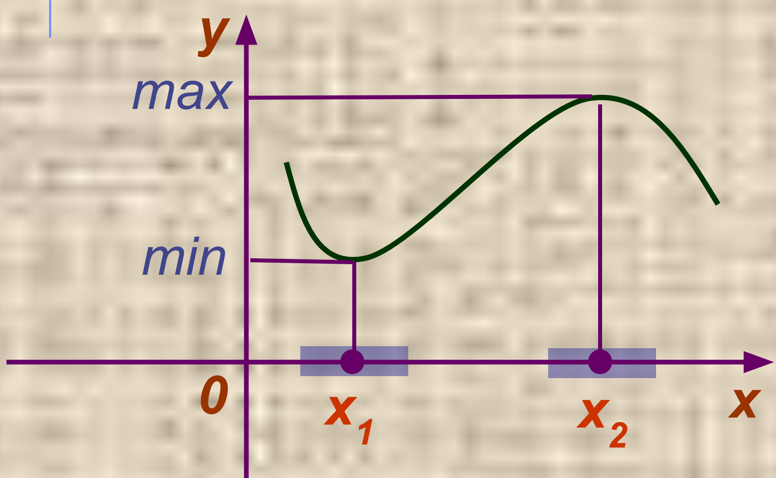
Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции, если:

$$\exists\delta > 0,\quad что\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta);\ \ x \neq x_0 : f(x) < f(x_0)$$

Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции, если:

$$\exists\delta > 0,\quad что\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta);\ \ x \neq x_0 : f(x) > f(x_0)$$

Существует такое $\delta > 0$, что для всех x из δ – окрестности точки x_0 и не равных x_0 выполняется неравенство.



Значение функции в точке минимума (максимума) называется ***минимумом (максимумом)***

Общее название минимума и максимума – ***экстремум*** функции.

Понятие экстремума всегда связаны с определенной окрестностью из области определения функции, поэтому функция может иметь экстремум только во ***внутренних точках*** области определения.

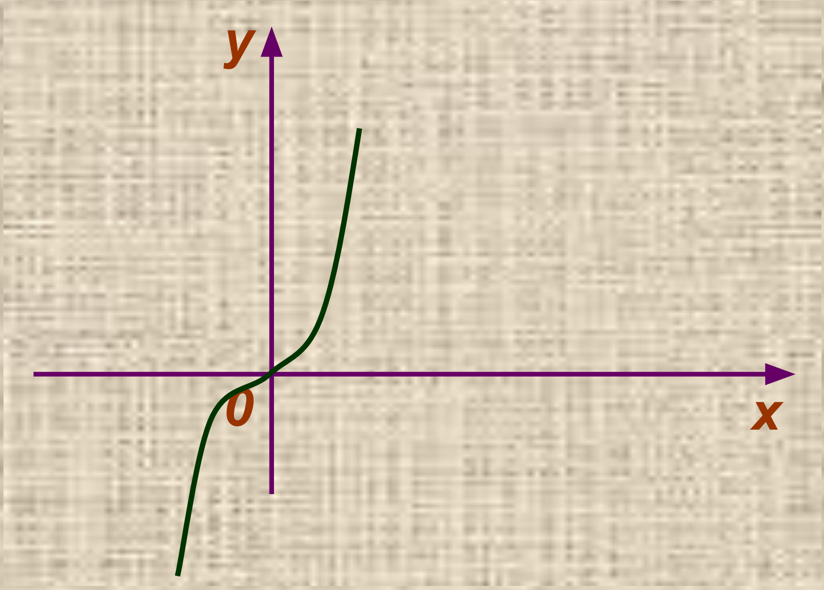
Минимум и максимум функции

Теорема 3 (необходимое условие экстремума)

Если дифференцируемая функция *f(x)* имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна *0*:

$$f'(x_0) = 0 \qquad (1)$$

Геометрически равенство *(1)* означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси *OX*.



Обратная теорема неверна, то есть если $f'(x_0) = 0$, то это не означает, что x_0 – точка экстремума.

Например, для функции $y = x^3$:

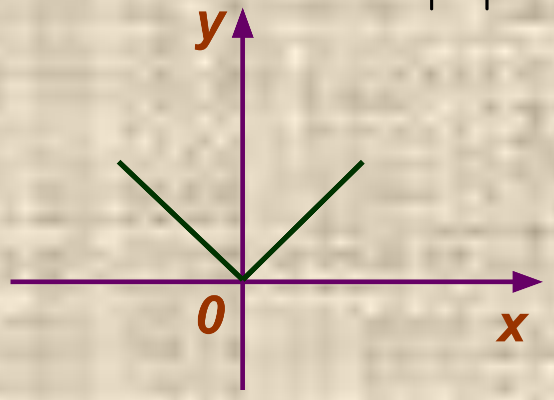
$$y' = 3x^2; \qquad y' = 0 \quad при \quad x = 0$$

Но *x = 0* не является точкой экстремума. :

Минимум и максимум функции

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция: $y = |x|$

в точке ***x = 0*** производной не имеет, но точка ***x = 0*** – точка минимума функции.



Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках,

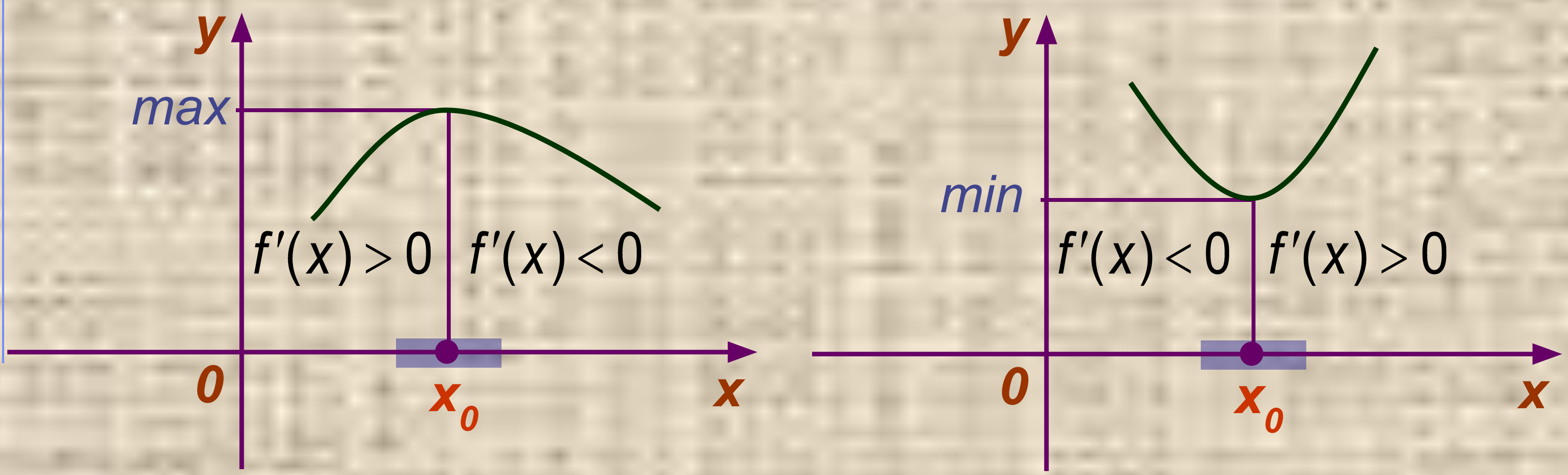
где производная равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума)

Если функция ***f(x)*** дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0, и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума, с минуса на плюс,то x_0 - точка минимума.

Минимум и максимум функции

Геометрическая интерпретация доказательства теоремы 4:



Правило исследования функции на экстремум.

1. Найти критические точки функции ***f(x)***;
2. Выбрать из них лишь те, которые являются внутренними точками области определения функции;
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки;
4. Выписать точки экстремума и найти значения функции в них.

Минимум и максимум функции

Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$

Область определения: $x \in R$

$$y' = \left(\frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$$

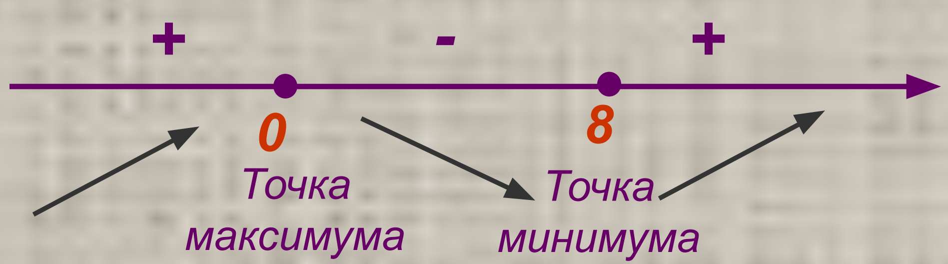
Критические точки функции: $y' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow$

$\sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow x = 8$

y' *не существует при* $x = 0$

$$y_{\max} = y(0) = 0$$

$$y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$$



Минимум и максимум функции

Иногда бывает удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума.

Теорема 5 (достаточное условие экстремума)

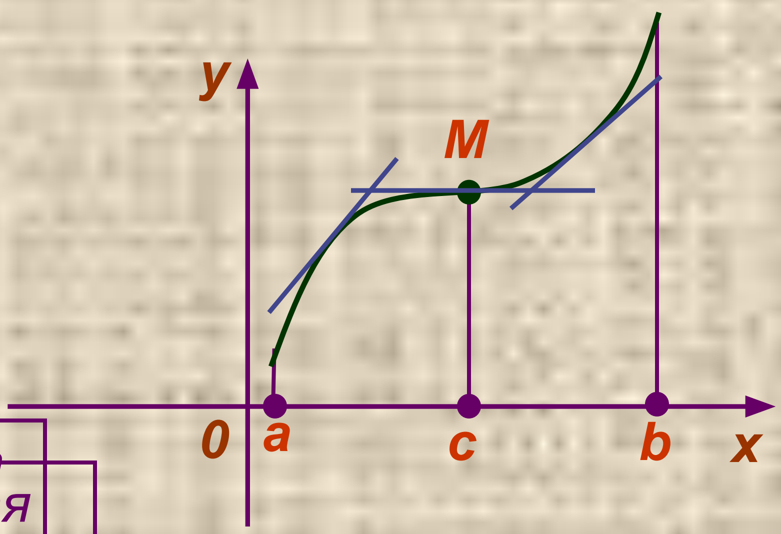
Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0)=0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0)\neq 0$), то при $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум и при $f''(x_0)>0$ - минимум.

Выпуклость графика функции, точки перегиба

График дифференцируемой функции ***f(x)*** называется ***выпуклым вниз*** (или ***вогнутым***) на интервале ***(a; b)***, если он расположен ***<u>выше</u>*** любой его касательной на этом интервале.

График дифференцируемой функции ***f(x)*** называется ***выпуклым вверх*** (или просто ***выпуклым***) на интервале ***(a; b)***, если он расположен ***<u>ниже</u>*** любой его касательной на этом интервале.

Точка графика функции, которая отделяет его выпуклую часть от вогнутой называется ***точкой перегиба.***



Точка ***M(c; f(c))*** *– точка перегиба*

На интервале ***(a; c)*** *кривая выпукла вверх*

На интевале ***(c; b)*** *кривая выпукла вниз (вогнута)*

Выпуклость графика функции, точки перегиба

Теорема 6

Если функция ***f(x)*** во всех точках интервала ***(a; b)*** имеет отрицательную вторую производную, то есть $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале выпуклый вверх.
Если $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то график функции на этом интервале выпуклый вниз.

Теорема 7 (достаточное условие существования точек перегиба)

Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Точка в которой $f''(x) = 0$ или не существует называется ***критической точкой второго рода***.

План исследования функции на выпуклость и точки перегиба аналогичен исследованию на экстремум, но с помощью второй производной.

Выпуклость графика функции, точки перегиба

Исследовать функцию на выпуклость и найти точки перегиба.

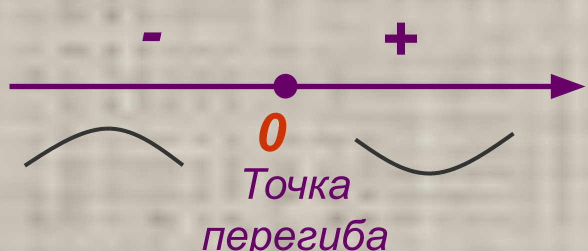
$$y = x^5 - x + 5$$

Область определения: $x \in R$

$$y' = \left(x^5 - x + 5\right)' = 5x^4 - 1 \qquad y'' = \left(5x^4 - 1\right)' = 20x^3$$

Критические точки второго рода: $y'' = 0 \quad \Rightarrow$

$$20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$



$x \in (-\infty; 0)$ *- функция выпукла*

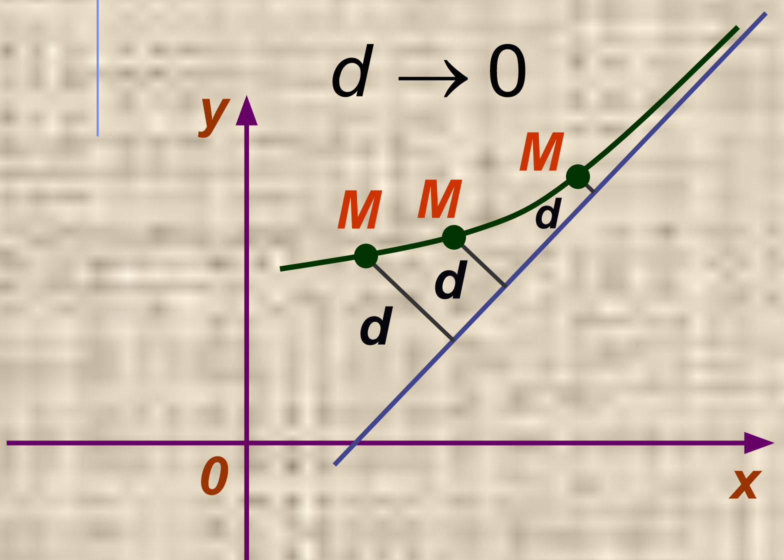
$x \in (0; +\infty)$ *- функция вогнута*

$y(0) = 5$

$M(0; 5)$ *- точка перегиба*

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.



Асимптоты могут быть наклонными, горизонтальными и вертикальными.

Наклонная асимптота

Если существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right)$$

то кривая ***y = f(x)*** с имеет наклонную асимптоту с уравнением:

$$y = kx + b$$

Асимптоты графика функции

Если хотя бы один из пределов для нахождения **k** или **b** не существует или равен бесконечности, то кривая ***y = f(x)*** наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если ***k = 0***, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, и *y* = *b* – горизонтальная асимптота.

Таким образом, *горизонтальная асимптота* это частный случай наклонной асимптоты.

Асимптоты графика функции при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении **k** и **b** иногда необходимо рассматривать отдельно случай, когда $x \to -\infty$ и когда $x \to +\infty$.

Асимптоты графика функции

Найти наклонные асимптоты графика функции $y = x \cdot e^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = \infty \quad \Rightarrow$$

график функции не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 = k$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x'}{(e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ *график функции имеет горизонтальную асимптоту* $y = 0$

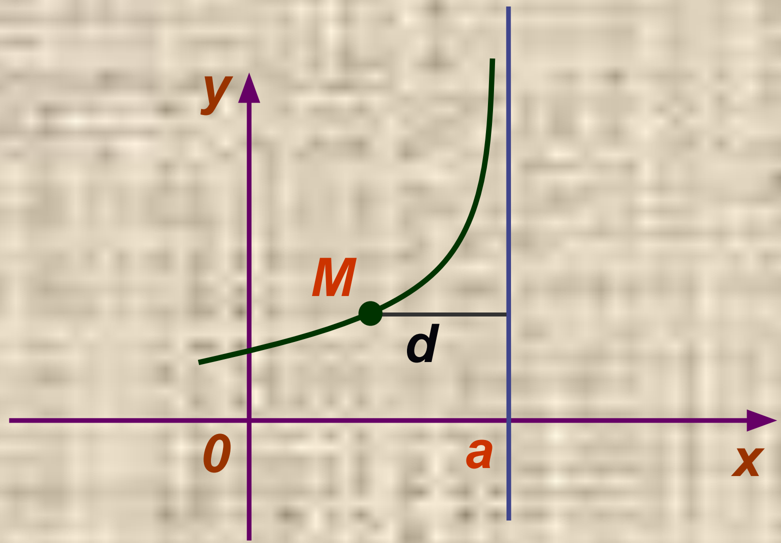
Асимптоты графика функции

Прямая $\boxed{x = a}$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции ***y = f(x)*** , если:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$$

Из рисунка видно, что расстояние от точки ***M(x; y)*** до прямой ***x = a*** равно $d = |x - a|$

Если $x \to a$, то $d \to 0$.



Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения ***x***, вблизи которых функция неограниченно возрастает по модулю.

Обычно это точки разрыва второго рода и может быть граница области определения функции.

Асимптоты графика функции

Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{1+x^2}{1+x}$

Область определения функции: $x \neq -1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$$ *- вертикальная асимптота*

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1+x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1} = 1 = k$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$$

$\boxed{y = x-1}$ *- наклонная асимптота*

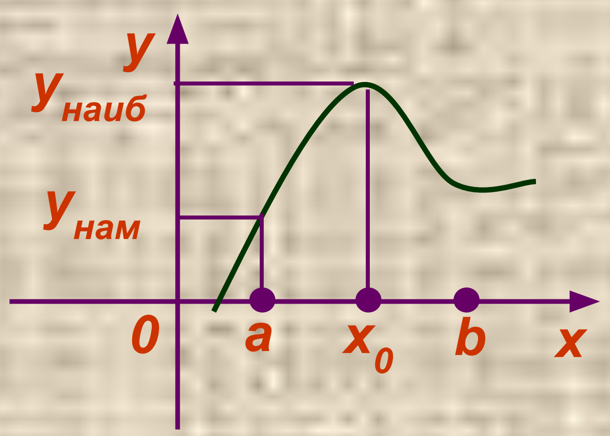
Общая схема исследования функции и построения графика

1. Нахождение области определения функции ***f(x)***;
2. Исследование функции на четность, нечетность и периодичность;
3. Исследование функции на монотонность и экстремум с помощью первой производной;
4. Исследование функции на выпуклость и точки перегиба с помощью второй производной;
5. Нахождение асимптот графика функции;
6. Нахождение дополнительных точек (например нахождение точек пересечения графика с осями координат, если это возможно);
7. Построение графика функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

По теореме Вейерштрасса, если функция **$y = f(x)$** непрерывна на отрезке **[a; b]**, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка **[a; b]** , либо на границе отрезка, при $x_0 = a$ или при $x_0 = b$. Если x_0 - внутренняя точка отрезка, то ее следует искать среди критических точек данной функции.



__Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.__

1. Найти критические точки функции **$f(x)$**;
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка;
3. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.