Векторная алгебра

Лекция 11

1. Векторы. Основные понятия

Величины, которые определяются заданием некоторого числа, называются скалярными (длина, температура, масса).

Величины, которые определяются заданием не только числа, но и некоторого направления, называются векторными (сила, скорость, ускорение).

Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектор – это направленный отрезок.

Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор можно обозначать одной строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$.

Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$, и его длина равна нулю, т.е. $|\vec{0}| = 0$.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они:

1) имеют одинаковые длины;
2) коллинеарны;
3) одинаково направлены.

В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Векторы называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если векторы взаимно перпендикулярны $(\vec{a} \perp \vec{b})$, то они называются **ортогональными**.

2. Линейные операции над векторами

К линейным операциям над векторами относятся сложение и вычитание векторов, а также умножение вектора на число.

1. **Сложение векторов**

а) правило параллелограмма (рис.1).

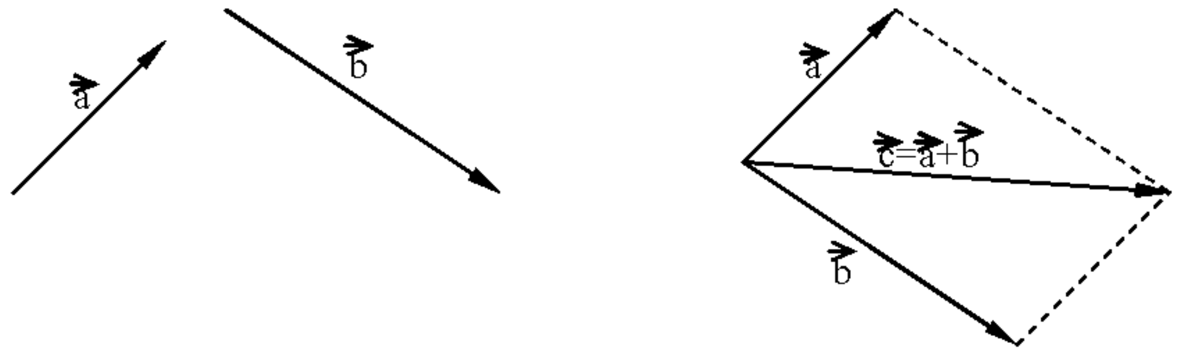


Рисунок 1

б) правило треугольника (рис.2).

Рисунок 2

в) правило многоугольника (рис.3).

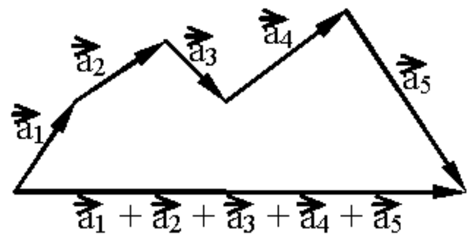


Рисунок 3

2. **Вычитание векторов** (рис.4).

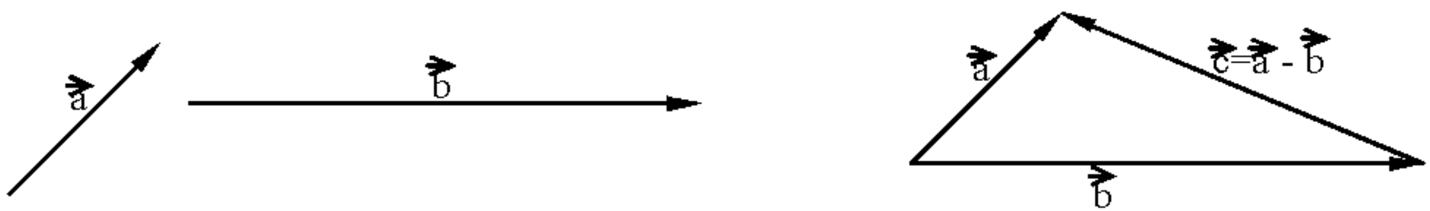


Рисунок 4

3. **Умножение вектора на число**

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Приведем некоторые свойства линейных операций:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

3) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \vec{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}$,

4) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$,

5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве заданы ось l и некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B этого вектора (рис.5).

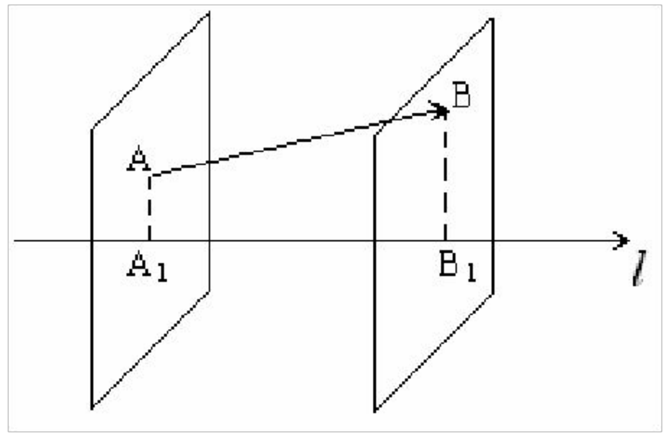


Рисунок 5

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется величина A_1B_1 направленного отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$ и обозначается $np_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1$.

Некоторые основные свойства проекций

1) Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\widehat{\vec{a}, l}\right).$$

а) если угол φ - острый (рис.6), т.е. $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, то $пр_l \vec{a} = \left|\overrightarrow{M'N'}\right| > 0$.

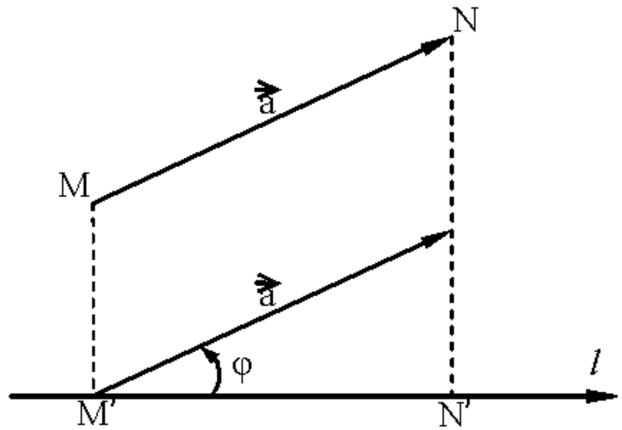


Рисунок 6

б) если угол φ - тупой, т.е. $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ (рис.7), то $пр_l \vec{a} = -\left|\overrightarrow{MN}\right| < 0$

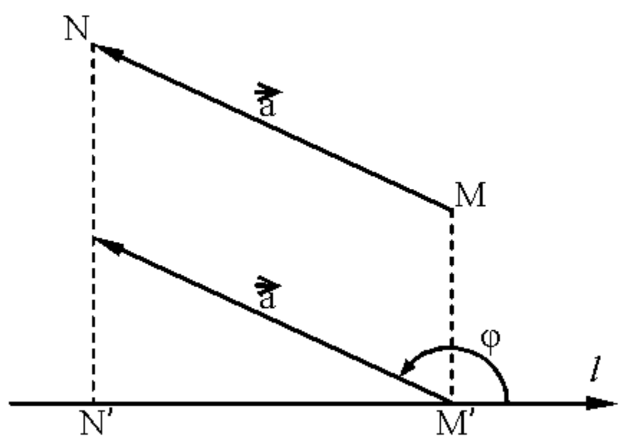


Рисунок 7

в) если угол φ - прямой, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис.8), то $np_l \vec{a} = 0$

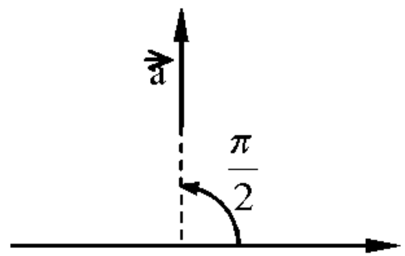


Рисунок 8

2) Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось, т.е.

$$np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}\ .$$

3) Если вектор $\vec{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось также умножится на это число, т.е.

$$np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot np_l\vec{a}\ .$$

4. Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не все равные нулю, для которых имеет место равенство $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются **линейно независимыми**, если равенство $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Теорема 1. Всякие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на плоскости линейно зависимы.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теорема 3. Всякие четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы.

Теорема 4. Для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

5. Базис на плоскости и в пространстве

Базисом на плоскости называются два линейно независимых вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке.

Теорема. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис на плоскости, то всякий вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть единственным образом разложен в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 .$$

Числа λ_1 и λ_2 называют аффинными координатами вектора $\vec{a}$ на плоскости и пишут $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$.

Базисом в пространстве называются три любых линейно независимых вектора.

Теорема. Если в пространстве выбран некоторый базис $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, то любой вектор $\vec{a}$ этого пространства может быть единственным образом разложен по этому базису в виде

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 ,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 - аффинные координаты вектора $\vec{a}$ в пространстве.

Пишут $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$.

6. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы (орты) осей координат, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, и одинаково направлены соответственно с осями OX, OY и OZ.

Так как орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не компланарны, то они образуют базис, который называется **декартовым ортогональным базисом.**

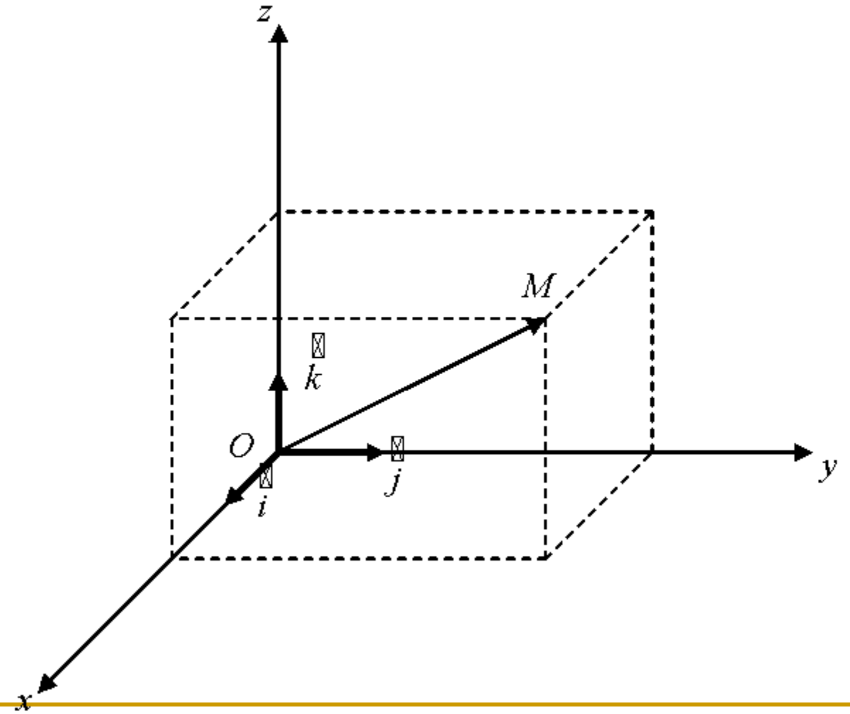


Рисунок 9

Возьмем любой вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис.9).

Можно показать, что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $x = np_{OX}\vec{a}$, $y = np_{OY}\vec{a}$, $z = np_{OZ}\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ записывают в виде $\vec{a} = \{x; y; z\}$.

Числа x, y, z называют **прямоугольными декартовыми координатами.**

Зная координаты вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ можно найти его длину по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$ образует с осями координат OX, OY и OZ соответственно углы α, β, γ, тогда $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

Можно показать, что сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице, т.е. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Заметим, что орт вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ находится по формуле $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, т.е.

$$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

7. Действия над векторами, заданными координатами

Пусть даны векторы $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$

2) $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$, $(\lambda = const)$

3) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$ – условие равенства векторов

4) $\vec{a} \parallel \mathrm{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ - условие коллинеарности векторов.

Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

8. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \text{, где } \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\quad (\lambda = const)$;
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

5) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$;

6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$;

7) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$;

8) $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$;

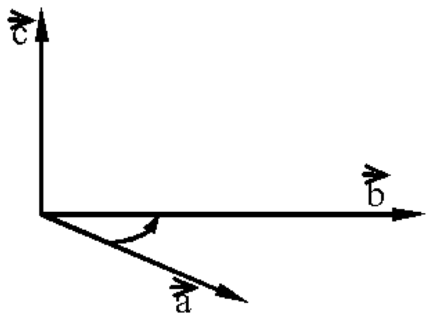
9) работа силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку при перемещении ее вдоль вектора $\vec{S}$, вычисляется по формуле $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$;

10) $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты осей координат;

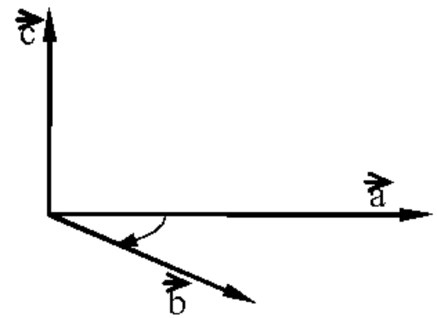
11) если $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

9. Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с общим началом называется **п р а в о й**, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против движения часовой стрелки, если наблюдать с конца вектора $\vec{c}$. В противном случае тройка векторов называется **л е в о й** (рис.10).



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка

Рисунок 10

В е к т о р н ы м п р о и з в е д е н и е м векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка.

Свойства векторного произведения

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$;

5) $\vec{a}\times\vec{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$;

6) $S = |\vec{a}\times\vec{b}|$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.11);

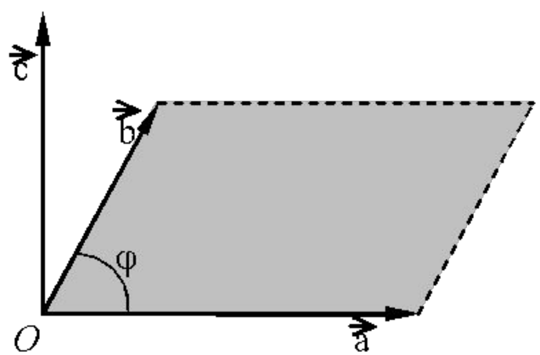


Рисунок 11

7) $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, где S_{Δ} - площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

8) $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$, где $\vec{M}$ - момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке А, относительно точки О;

9) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\quad \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$, $\quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$, $\quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$

10) если $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

или

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_z \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\quad -\begin{vmatrix} x_1 & z_z \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_z \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

10. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Основные свойства смешанного произведения

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} > 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка,
$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} < 0$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка;

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны;

5) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, вычисляется по формуле

$$V = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right|;$$

6) Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|;$$

7) Если $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Пример. Даны точки $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$ и $D(0,-1,2)$.

а) **Найти длину вектора** $5\vec{AB}-2\vec{CD}$.

Координаты векторов $\vec{AB}=\{-12;-2;2\}$ и $\vec{CD}=\{-3;3;8\}$,

найдем координаты вектора $5\vec{AB}-2\vec{CD}$:

$5\cdot\{-12;-2;2\}-2\cdot\{-3;3;8\}=\{-60+6;-10-6;10-16\}=\{-54;-16;-6\}$.

Длину вектора найдем по формуле $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, получим

$$\left|5\vec{AB}-2\vec{CD}\right|=\sqrt{(-54)^2+(-16)^2+(-6)^2}=\sqrt{2916+256+36}=\sqrt{3208}=2\sqrt{802}.$$

б) **Найти скалярное произведение векторов** $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{AB}=\{-12;-2;2\}$ и $\vec{AC}=\{-7;-10;-9\}$ будет:

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(-12)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-10)+2\cdot(-9)=84+20-18=86.$$

в) Найти косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Для нахождения косинуса угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Для этого найдем длины векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{144+4+4} = \sqrt{152} = 2\sqrt{38},$$

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-10)^2 + (-9)^2} = \sqrt{49+100+81} = \sqrt{230}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{86}{2\sqrt{38}\cdot\sqrt{230}} = \frac{43}{\sqrt{8740}} = \frac{43}{2\sqrt{2185}}.$$

г) Найти проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{AC}$.

Проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{AC}$ найдем по формуле: $np_{\vec{d}}\vec{c} = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

Получим $np_{\vec{AC}}\vec{AB} = \dfrac{86}{\sqrt{230}}$.

д) **Найти площадь треугольника** ABC.

Из определения векторного произведения площадь треугольника ABC равна:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & -2 & 2 \\ -7 & -10 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -10 & -9 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -7 & -9 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ -7 & -10 \end{vmatrix} \cdot \vec{k},$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = 38\vec{i} - 122\vec{j} + 106\vec{k}, \text{ т.е. } \overline{AB} \times \overline{AC} = \{38; -122; 106\}$$

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{38^2 + (-122)^2 + 106^2} = \sqrt{1444 + 14884 + 11236} = \sqrt{27564} = 2\sqrt{6891}$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{6891}$ кв.ед.

е) **Найти объем пирамиды** $DABC$.

Из свойств смешанного произведения векторов имеем:

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \right|.$$

Зная координаты векторов:

$$\overline{AB} = \{-12; -2; 2\}, \overline{AC} = \{-7; -10; -9\}, \overline{AD} = \{-10; -7; -1\},$$

вычислим

$$\left(\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \right) = \begin{vmatrix} -12 & -2 & 2 \\ -7 & -10 & -9 \\ -10 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 7 & 10 & 9 \\ 10 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (60 + 90 - 49 + 100 - 7 - 378) = -2 \cdot (-184) = 368$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot 368 = \frac{184}{3} \qquad V_{пир} = 61\frac{1}{3} (куб.ед.)$$