

Задачи на взвешивания



Пятиминутка

Назовите два числа, у которых количество цифр равно количеству букв, составляющих название каждого из этих чисел.

Ответ

- "СТО" - 100;
- "МИЛЛИОН" - 1000000

- Информационные задачи носят характер либо задач на взвешивание, либо про узнавание новостей. Их решение носит в основном конструктивный характер. Очень редко используется доказательный путь. Задачи на взвешивание или на задавание вопросов носят информационный характер, так как требуется либо с помощью ряда действий проверить предположение или найти

- необходимое число вопросов для ответа на вопрос задачи. Часто для решения таких задач требуется найти алгоритм, т.е. задать последовательность действий таким образом, чтобы перебор вариантов, который обычно присутствует при решении, был наименьшим.

Задачи на взвешивание –
достаточно распространённый вид
математических задач.

В таких задачах от решающего требуется
локализовать отличающийся от остальных
предмет по весу за ограниченное число
взвешиваний.

Поиск решения в этом случае осуществляется
путем операций сравнения, правда, не только
одиночных элементов, но и групп элементов
между собой.

Задача №1

Золушка

Мачеха послала Золушку на рынок. Дала ей *девять монет*: из них 8 настоящих, а одна фальшивая – она легче чем настоящая. Как найти ее Золушке за два взвешивания?



Решение

1. Разделим 9 монет на 3 равных кучки.
2. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке).
3. Остается из трех монет определить более легкую: кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более легкая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета.



Задача №2

Буратино и Кот Базилио

У Буратино есть *27 золотых монет*. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих.

Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определит фальшивую монету?



Решение

1. Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет.
2. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке).
3. Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета.
4. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части.

Задача №3

Фальшивая монета

Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета?

Находить фальшивую монету не требуется.



Решение

Взвешиваем 50 и 50 монет: два случая.

1 случай.

Равенство. Берем оставшуюся монету и ставим ее в левую кучку вместо одной из имеющихся там:

- а) Левая кучка тяжелее => фальшивая монета тяжелее;
- б) Левая кучка легче => фальшивая монета легче.

2 случай.

Неравенство. Берем более тяжелую кучку и разбиваем ее на две кучки по 25 монет:

- а) Вес кучек одинаковый => фальшивая монета легче;
- б) Вес кучек неодинаковый => фальшивая монета тяжелее.



Задача №4

Фальшивая монета 2

Имеется *8 монет*. Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты.

Определите за 3 взвешивания какая из монет фальшивая.



Решение

1. Делим монеты на две равные кучки – по 4 монеты в каждой. Взвешиваем.
2. Ту кучку, которая легче, опять делим на две одинаковых кучки – теперь по две монеты в каждой.
3. Взвешиваем.
4. Определяем, какая из них легче.
5. Кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки.
6. Фальшивая та, которая легче.



Задача №5

Фальшивая монета 3

Имеется **10 монет**.

Одна из них фальшивая и легче настоящей монеты.

Как, с помощью чашечных весов без гирь, определить какая из монет фальшивая?



Решение

1. Разделим 10 монет на 2 равных кучки – по 5 монет.
2. Положим на чаши весов. Определим, в какой из этих кучек находится фальшивая монета.
3. Теперь эту кучку делим на 3 кучки – в двух из них по две монеты, в третьей одна монета.
4. Взвешиваем кучки, в которых по две монеты. Если весы покажут равенство, то фальшивка в третьей кучке. Если покажут неравенство, то фальшивая монета в кучке, которая легче.
5. Теперь кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки – фальшивкой является более легкая.



Задача №6

Лиса Алиса и Кот Базилио

Лиса Алиса и Кот Базилио – фальшивомонетчики.

Базилио делает монеты тяжелее настоящих, а Алиса – легче. У Буратино есть **15** одинаковых по внешнему виду монет, но какая-то одна – фальшивая. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь Буратино может определить, кто сделал фальшивую монету – Кот Базилио или Лиса Алиса?



Решение:

Буратино может разделить свои монеты на три кучки по 7, 4, 4, или по 5, 5, 5, или по 3, 6, 6, или по 1, 7, 7 монет.

При первом взвешивании он положит на весы две кучки монет одинаковой величины. Если при этом весы оказались в равновесии, значит, все монеты на весах настоящие, а бракованная монета в оставшейся кучке.

Тогда при втором взвешивании на одну чашку весов Буратино положит кучку с бракованной монетой, а на вторую – столько настоящих монет, сколько всего монет он положил на первую чашку, и тогда он сразу определит, легче фальшивая монета, чем настоящие, или тяжелее.

Если же при первом взвешивании весы оказались не в равновесии, значит, все монеты в оставшейся кучке настоящие.

Тогда Буратино уберет с весов легкую кучку, а монеты из тяжелой кучки разделит на две равные части и положит на весы (если в кучке было 5 или 7 монет, предварительно добавит к ним одну настоящую монету).

Если при втором взвешивании весы оказались в равновесии, значит, фальшивая монета легче настоящих, а если нет, то тяжелее.

Задача №7

Буратино

Буратино имеет *четыре* одинаковых по виду монеты, одна из которых не золотая, а фальшивая и легче других. Как Буратино определить фальшивую монету? Какое минимальное число взвешиваний ему потребуется?



Решение:

1. Разделим монеты на 2 равных кучки – по 2 монеты.
2. Положим на чаши весов. В более легкой кучке находится фальшивая монета.
3. Теперь кладем на чаши весов по 1 монете из этой кучки – фальшивкой является более легкая.

Буратино потребуется два взвешивания.

Задача решена.



Задача №8

Дядюшка Скрудж

Дядюшке Скруджу принесли 8 одинаковых по виду монет, одна из которых не золотая, а фальшивая и легче других. Помогите Скруджу определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний ему потребуется?



Решение

Разделим монеты на кучки по 3, 3, 2 монеты.

Положим на чаши весов кучки по 3 монеты – по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка.

1 случай. Если весы покажут равенство, то фальшивая монета в третьей кучке. Тогда кладем на чаши весов монеты из третьей кучки. Фальшивкой будет та, которая легче.

2 случай. Если весы покажут неравенство. Тогда кладем на чаши весов по монете из более легкой кучки; если установилось равенство, то фальшивкой является третья монета из этой кучки; если неравенство – то более легкая монета и есть фальшивка. Следовательно, Скруджу потребуется минимум два взвешивания.



Задача №9

• Есть 4 мешка с монетами, причем в одном из них все монеты фальшивые. Известно, что настоящие монеты весят 10 г, а фальшивые 11 г. Как с помощью одного взвешивания на чашечных весах, которые показывают вес груза в граммах, определить в каком из мешков находятся фальшивые монеты?

Решение

• Перенумеруем мешки, из первого мешка возьмем 1 монету, из второго 2 монеты, из третьего - 3, из четвертого - 4 монеты. Тогда при взвешивании вес всех 10 будет тяжелее 100 г ровно на k , где k -номер мешка в котором находятся фальшивые монеты. Вот и все!

Задачи на сравнение с помощью весов

№1. На одной чаше весов лежат 6 одинаковых яблок и 3 одинаковые груши.

На другой чаше 3 таких же яблока и 5 таких же груш. Весы находятся в равновесии.

Что легче: яблоко или груша?



Решение

Так как весы находятся в равновесии, а все яблоки и все груши одинаковы по весу, то:

$$6 \text{ яблок} + 3 \text{ груши} = 3 \text{ яблока} + 5 \text{ груш};$$

Снимем с обеих чаш по 3 яблока и по 3 груши, получим:

$$3 \text{ яблока} = 2 \text{ груши},$$

значит,

$$1 \text{ груша тяжелее } 1 \text{ яблока}.$$

ОТВЕТ: Груша тяжелее.

№2. На одной чаше весов

лежит

кусок мыла, а на другой

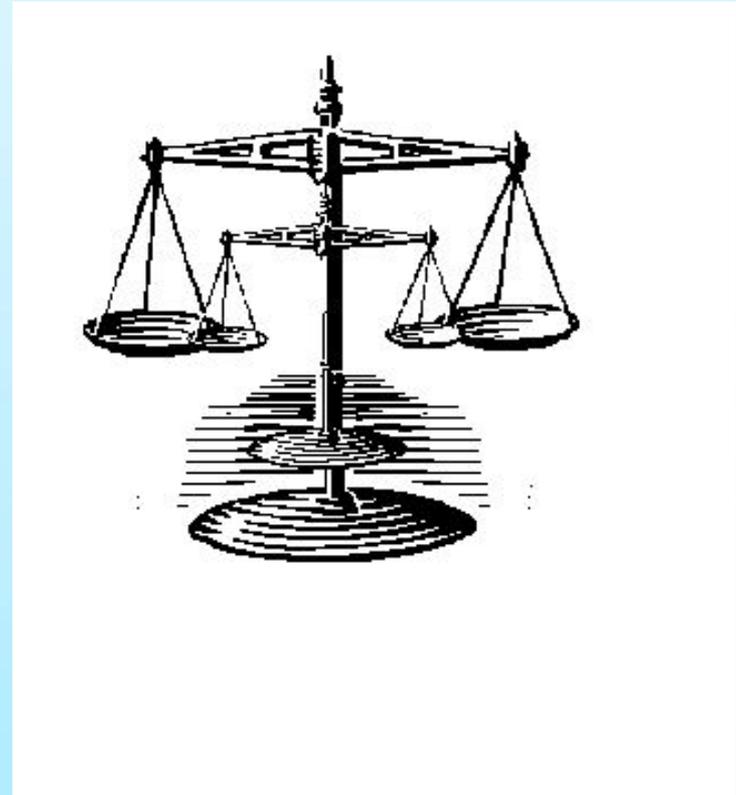
три четверти такого куска

и ещё три четверти

килограмма. Весы

находятся в равновесии.

Сколько весит кусок мыла?



РЕШЕНИЕ:

Разделим кусок мыла на 4 равные части,
тогда 4 равные части куска мыла равны трем
таким же частям мыла + $3/4$ кг.

Снимем с каждой чашки по 3 части, получим:

$$1 \text{ часть} = 3/4 \text{ кг,}$$

значит, целый кусок весит 3 кг.

ОТВЕТ: 3 кг.

№3. В мешке 24 кг гвоздей.
Как, имея только двухчашечные
весы, отмерить 9 кг гвоздей?

Решение

Делим все гвозди пополам по 12 кг.

Затем, действуя аналогично, делим 12 кг на две равные части по 6 кг, затем еще раз на две равные части по 3 кг. И, прибавляя к 3 кг полученные на предыдущем шаге 6 кг, получаем требуемые 9 кг.

№4. Имеются четыре предмета попарно различного веса. Как с помощью чашечных весов без гирь пятью взвешиваниями расположить все эти предметы в порядке возрастания весов?

Решение

- Перенумеруем предметы: 1-й, 2-й, 3-й, 4-й. Для нахождения самого тяжелого (и самого слабого) применим так называемую «олимпийскую» систему, которую можно изобразить на рисунке. Он проходит следующим образом: 1-й взвешивается со вторым, 3-й с четвертым. Те, которые тяжелее, взвешиваются между собой. Предмет который и перевесит в этом третьем взвешивании будет самым тяжелым. После первых двух взвешиваний определятся и два легких предмета, взвешивая которых можно определить и самый легкий предмет. Пятым взвешиванием нужно взвесить между собой два предмета, которые являются не самыми легкими, ни самыми тяжелыми. Это взвешивание и определит порядок, в котором будут расположены предметы по весу.

№5. Имеется 32 камня попарно различного веса. Докажите, что за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить самый тяжелый и второй по весу камни.

Решение

За 31 взвешивание (по олимпийской системе) найти самый тяжелый камень, которой участвовал в пяти взвешиваниях. Второй по весу камень, это самый тяжелый из пяти, с которыми сравнивался первый камень. Чтобы выбрать из 5 нужно еще 4 взвешивания.

Задача №13

- Сказал Кашей Ивану-Царевичу: «Утром явишься передо мной. Задумаю я три цифры: a, b, c , а ты назовешь мне три числа x, y, z . Выслушаю я тебя и скажу, чему равно выражение $ax+by+cz$. Тогда угадай какие цифры a, b, c я задумал. Не угадаешь голова с плечь». Опечалился Иван-Царевич, пошел думу думать. Нужно ему помочь как это сделать?

Решение

• Не напоминает ли Вам это что-нибудь, что мы уже проходили раньше? Конечно же!

Это напоминает запись числа при разложении его по степеням 10! Значит Ивану-Царевичу достаточно сказать числа $x=1$, $y=10$, $z=100$. И число которое ему скажет Кощей, будет состоять из тех цифр, которые и загадал Кощей.

Задание №14

- На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P . Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит P . (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать лежит ли точка P внутри квадрата?

Решение

- При произвольном расположении двух прямых не получается ни одной ограниченной области, значит за два вопроса нельзя ответить на вопрос, располагается ли точка в ограниченной области. А за три можно.
- Проведем диагональ квадрата, этим узнаем в какой плоскости расположена точка P . затем проводим две стороны квадрата, которые располагаются в той части плоскости, где расположена точка. После этого мы узнаем, где располагается точка P , внутри или снаружи квадрата.

Задание №15

• Имеется 10 мешком монет. В некоторых мешках все монеты фальшивые (они весят 11 г каждая), в некоторых все настоящие (они весят по 10 г каждая). Можно ли с помощью одного взвешивания на весах, которые показывают вес груза, определить, в каких мешках лежат фальшивые монеты?

Решение

- Перенумеруем мешки. Из первого мешка мы возьмем 1 монету, из второго-10 монет, из третьего 100 монет,..... При взвешивании получаем пятизначное число, которое состоит из нулей, единиц и двоек. В числе, которое обозначает вес груза, разрядам, где получились двойки, соответствующие мешки, в которых находятся фальшивые монеты.