

# Лекция № 11

## Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля

Алексей Викторович  
Гуденко

27/11/2014

# План лекции

1. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца.
2. Бетатрон
3. Соленоид. Магнитная энергия и её локализация в пространстве
4. Энергия и силы

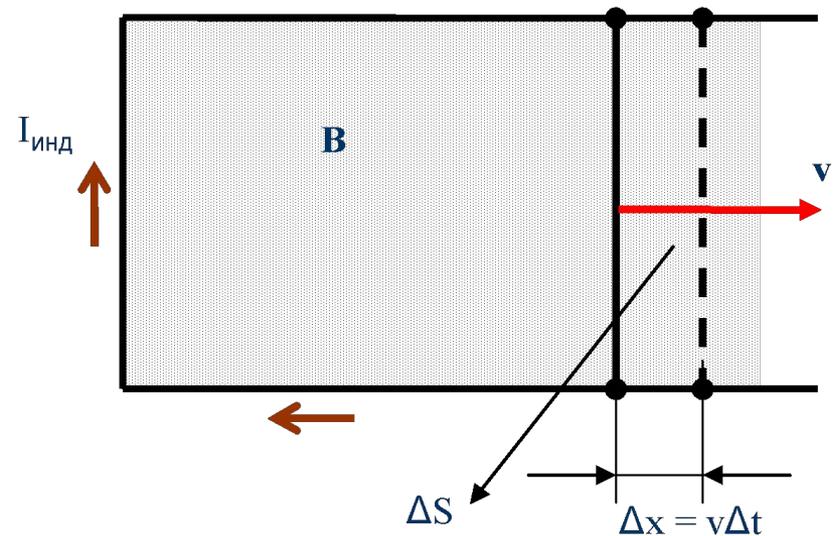
# Демонстрации

- Магнитное торможение
- Магнитная пушка
- Закон э-м индукции Фарадея

# Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца.

- В замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока вектора  $\mathbf{B}$ , охватываемого этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток называется *индукционным* током.
- Причина возникновения тока – **эдс индукции**  $\varepsilon_{\text{инд}}$
- Величина эдс индукции  $\varepsilon_{\text{инд}}$  равна скорости изменения магнитного потока через контур:  
$$\varepsilon_{\text{инд}} = - 1/c \, d\Phi/dt$$
- **Правило Ленца:** *индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине его вызвавшей - индукционный ток создаёт поток, препятствующий изменению магнитного потока через виток.*

# Подвижная перемычка



- $\mathbf{E} = -1/c[\mathbf{v}\mathbf{B}]$
- $\varepsilon_{\text{инд}} = \int \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = - (v/c)B\ell = - (1/c) B dS/dt = - - (1/c) d\Phi/dt$

# Природа электромагнитной индукции

- **Контур движется в постоянном магнитном поле.**

Индукционный ток возникает под действием магнитной составляющей силы Лоренца:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_m / q = 1/c [\mathbf{v} \mathbf{B}]$$

- **Контур покоится в переменном магнитном поле.**

Индукционный ток возбуждается возникающим в проводнике электрическим полем.

# Вихревое электрическое поле

- Закон электромагнитной индукции состоит в том, что всякое *переменное* магнитное поле порождает в пространстве *вихревое электрическое поле*. Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по любому неподвижному замкнутому контуру пропорциональна скорости изменения магнитного потока через этот контур:  
$$\oint \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = - (1/c) (\partial\Phi/\partial t)$$
- Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции:  
$$\text{rot}\mathbf{E} = - (1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$$
 – скорость изменения поля  $\mathbf{B}$  в данной точке определяет ротор поля  $\mathbf{E}$  в той же точке
- Индуцированное электрическое поле – поле вихревое (соленоидальное)

# Закон сохранения магнитного потока

- В проводнике с нулевым сопротивлением сохраняется:  
 $\varepsilon_{\text{инд}} = -1/c \, d\Phi/dt = IR = 0 \Rightarrow$   
 $\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \text{const}$  – силовые линии «вморожены» в проводящий контур:

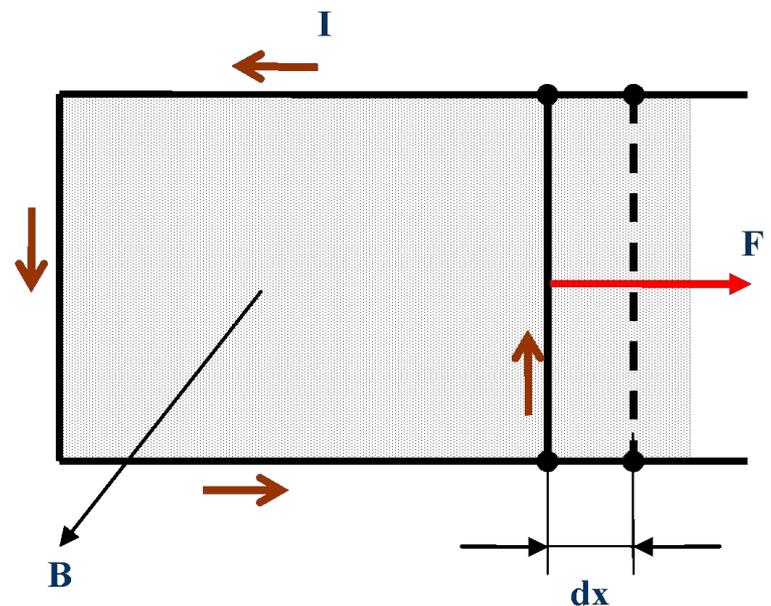
*При движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остаётся постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.*

# Бетатрон (Овчинкин, 8.30)

- Бетатрон – индукционный ускоритель электронов
- Бетатронное условие: магнитное поле  $B_0$  на орбите равно половине среднего поля в зазоре:  $B_0 = \frac{1}{2} B_{cp}$
- На орбите:  $pv = q(v/c)B_0 \Leftrightarrow p = qrB_0/c$
- Электрон разгоняется до импульса:  
 $dp = qEdt = q/2\pi r (E2\pi r)dt = q/2\pi cr (d\Phi/dt) dt = q/2\pi cr d\Phi$   
 $\Leftrightarrow p = q\Phi/2\pi cr = qrB_{cp}/2c \Leftrightarrow B_0 = \frac{1}{2} B_{cp}$
- Оценка энергии электрона:  $B_{cp} \sim 2$  Тл,  $r = 100$  см  $\Leftrightarrow pc = qrB_{cp}/2 = 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^2 \cdot 10^4 = 4,8 \cdot 10^{-4}$  эрг =  $4,8 \cdot 10^{-11}$  Дж =  $4,8 \cdot 10^{-11} / 1,6 \cdot 10^{-19}$  эВ = 300 МэВ  $\gg E_0 = 0,5$  МэВ  $\Leftrightarrow$   
 $\beta \approx 1 - \frac{1}{2} (E_0/E)^2 \approx 1 - \frac{1}{2} (E_0/pc)^2 = 0.9999986$  (!!!)

# Работа сил Ампера при перемещении витка с током в магнитном поле

- $F = (I/c) \ell B$  – сила Ампера
- $dA = Fdx = (I/c) \ell B dx = (I/c) B dS = (I/c) d\Phi$



# ИНДУКТИВНОСТЬ

- $\Phi = 1/c LI$   
 $L$  – индуктивность (коэффициент самоиндукции)
- Соленоид:  
 $B = \mu H = 4\pi i/c = 4\pi \mu IN/\ell c$
- $\Phi_1 = BS = (4\pi \mu NS/\ell c) I$
- $\Phi = N\Phi_1 = (1/c) (4\pi \mu N^2 S/\ell) I = 1/c LI$
- $L = (4\pi \mu N^2 S/\ell)$
- СГС:  $[L] = \text{см}$
- СИ:  $[L] = \text{Гн (Генри)} = 10^9 \text{ см}$

# Энергия соленоида

- $I(0) = I_0$
- $\varepsilon_{\text{инд}} = IR \Rightarrow -1/c^2 L di/dt = IR \Rightarrow di/i = -c^2 R dt \Rightarrow I = I_0 e^{-t/\tau}, \tau = L/c^2 R \quad ([R] = c/\text{см})$
- $W = \int I^2 R dt = LI^2/2c^2 = I\Phi/2c = \Phi^2/2L$
- $W = I\Phi/2c = 4\pi i \ell BS/8\pi c = (HB/8\pi) V \Rightarrow$
- $w = HB/8\pi$  – плотность магнитной энергии
- $w = \mu H^2/8\pi = HB/8\pi = B^2/8\pi\mu$

# Энергия и силы. Соленоид.

- $L = (4\pi\mu N^2 S / \ell)$
- $W = LI^2 / 2c^2 = \Phi^2 / 2L(\ell, R)$
- $F_\ell = -(\partial W / \partial \ell)_\Phi = \Phi^2 / 2L_0^2 (\partial L / \partial \ell) = -W_0 / \ell_0$
- $F_r = -(\partial W / \partial r)_\Phi = \Phi^2 / 2L_0^2 (\partial L / \partial r) = W_0 2\pi R / S_0 = W_0 2\pi R \ell_0 / \ell_0 S_0 = W_0 / V (2\pi R \ell_0) = w S_{\text{бок}}$
- давление на боковую стенку:  
 $p = F_r / S_{\text{бок}} = w = B^2 / 8\pi = \{B = 10 \text{ Тл}\} = 10^{10} / 8 \cdot 3,14 \approx 4 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2 = 4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 400 \text{ атм} = 400 \text{ кг/см}^2 \sim 0,5 \text{ Тонн/см}^2 \text{ (!!!)}$

# Постоянный цилиндрический магнит Тороидальный магнит с зазором.

- Постоянный магнит – это ферромагнитное вещество с постоянной намагниченностью
- Для цилиндрического магнита – это поле соленоида с линейной плотностью  $i/c = P_m \Rightarrow$  поле в объёме  $B_i = 4\pi i/c = 4\pi P_m$  – остаточная индукция; поле на торце  $B_t \approx 1/2 B_i$
- Тороидальный магнит с зазором: поле в зазоре  $B \approx B_0 = 4\pi P_m$

# Магнитного поля соленоида и тороидальной катушки

- Поле длинного соленоида:  
 $B = 4\pi(i/c)$ ;  $i = In = IN/\ell$  -  $N$  – число витков,  
 $\ell$  - длина катушки,  $I$  – ток в соленоиде;  $i$  –  
линейная плотность тока;  $n = N/\ell$   
плотность намотки.  
 $I = 10 \text{ А}$ ,  $n = 10 \text{ см}^{-1}$   $B = 4\pi(In/c) = 1,25 \text{ Тл}$
- Поле тонкой тороидальной катушки:  
 $B = 2NI/cR$