Правило умножения. Перестановки и факториалы

1. Правило умножения.
2. Применение правила умножения для решения задач.
3. Перестановки и факториалы.

Раздел математики, посвященный исследованию количественных оценок случайных событий, называют ***теорией вероятности***.

Комбинаторика – это искусство подсчета числа различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок тех или иных элементов некоторых множеств.

Задача № 1. ***Из цифр 2, 4, 7 следует составить трехзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз. Сколько всего таких чисел можно составить?***

Решение.

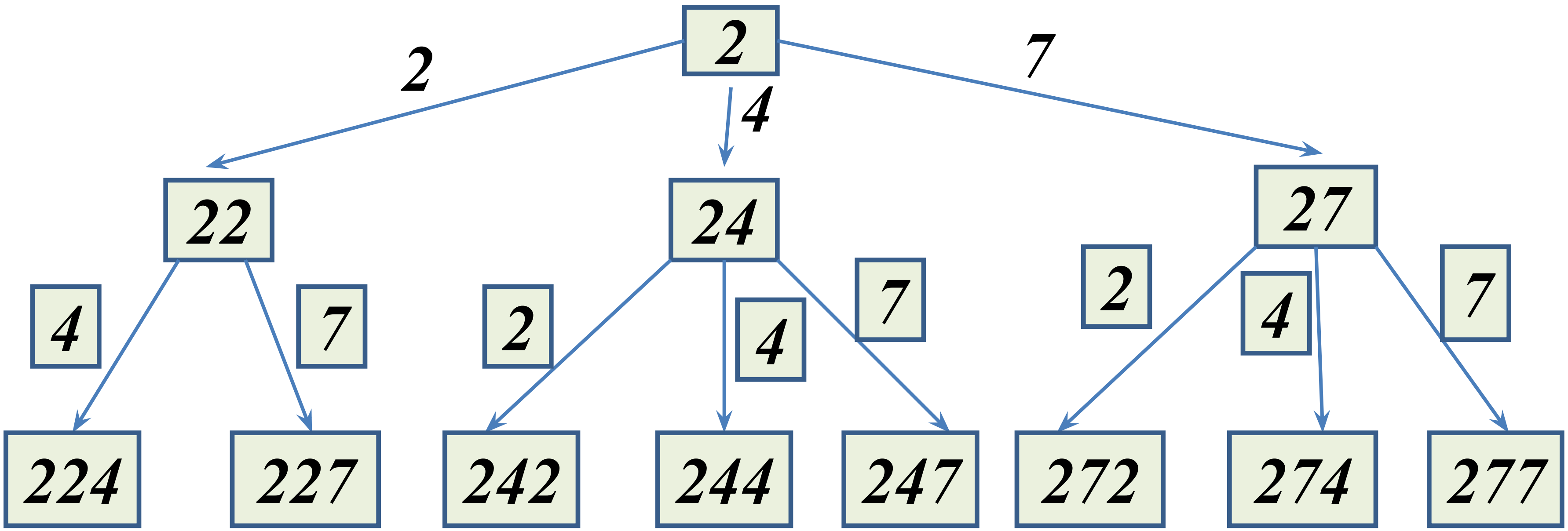
1 способ. Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 2: 224, 227, 242, 272, 244, 277, 247, 274 – 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 4: 442, 447, 424, 474, 422, 477, 427, 472 – 8 чисел.

Найдем количество всех трехзначных чисел, которые начинаются с цифры 7: 772, 774, 727, 747, 722, 744, 724, 742 – 8 чисел.

Ответ: 24 числа.

2 способ



Всего 8 чисел

Мы составили ***дерево возможных вариантов*** трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 2. Составим дерево возможных вариантов для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 4, получим 8 чисел и для трехзначных чисел, где на первом месте стоит цифра 7, тоже 8 чисел. ***Всего 24 числа.***

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Применение правила умножения при решении задач

Задача. ***Сколько среди четырёхзначных чисел, составленных из цифр 3, 4, 6, 8 (без повторений), таких, которые начинаются с цифры 3?***

А. 24   Б. 18   В. 6   Г. 12

Решение

На первое место можно поставить ***только одну*** цифру – 3.

На второе место можно поставить любую из ***трёх***: 4, 6 или 8.

На третье место можно поставить любую из ***двух*** оставшихся цифр.

На четвертое место можно поставить ***одну*** оставшуюся цифру

Используя правило умножения получаем ***1·3·2·1=6***

Ответ: В.

Задача. Найдите сумму цифр всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 6, 8 (без повторения).

А. 360 Б. 480 В. 240 Г. 400

Решение

Все числа состоят из одних и тех же цифр, значит сумма цифр каждого числа одинаковая и равна ***2+4+6+8= 20***.

Выясним сколько таких четырехзначных чисел существует.

На первое место можно поставить любую из ***четырех*** данных цифр.

На второе место любую из ***трёх*** оставшихся цифр.

На третье место любую из ***двух*** оставшихся цифр.

На четвёртое место ***одну*** оставшуюся цифру.

По правилу умножения получаем ***4·3·2·1=24*** числа.

Сумма цифр 24 чисел составляет ***24·20=480***.

Ответ: Б.

***Задача.* Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать одну девочку и одного мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?**

Решение

Применим правило умножения: девочку можно выбрать ***15 способами***,

мальчика – ***10 способами***,

пару мальчик – девочка – ***15 · 10 = 150*** способами.

Ответ: 150.

***Задача.* В чемпионате города по футболу играет десять команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?**

Решение

На первое место можно поставить любую из ***10*** команд,

на второе – любую из ***9*** оставшихся,

на третье – любую из ***8*** оставшихся.

По правилу умножения общее число способов, которыми можно распределить три места, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Ответ: 720.

Задача. ***В расписании уроков на среду для первого класса должно быть четыре урока: два урока математики, урок чтения и урок физкультуры. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?***

Решение

Урок чтения можно поставить на любой из ***четырёх*** уроков,

Урок физкультуры – на любой из ***трёх*** оставшихся.

После этого для двух уроков математики останется ***единственный*** вариант поставить их в расписание.

По правилу умножения общее число способов составить расписание на среду равно $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

***Задача.* В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилась карточек?**

Решение.

Каждый из ***30*** участников конференции раздал ***29*** карточек.

Значит, всего было роздано ***30 · 29 = 870*** карточек.

Ответ. 870.

***Задача.* Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?**

Решение

На первое место можно поставить любую из цифр, кроме нуля, - это ***3 варианта ;***

на второе место – любую из ***4*** цифр и

на третье – тоже любую из ***4*** цифр.

По правилу умножения общее количество вариантов равно $\boldsymbol{3 \cdot 4 \cdot 4 = 48}$.

***Ответ:* 48.**

***Задача.* В меню школьной столовой 2 различных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трех блюд?**

Решение

Первое блюдо можно выбрать ***2 способами***,

второе блюдо – 4 ***способами*** и

третье блюдо – ***3 способами***.

По правилу умножения общее количество вариантов равно $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

***Ответ:* 24.**

Вопрос 4 Перестановки и факториалы

Задача № 1. ***В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?***

Решение

Предположим, что первой садится бабушка. У нее имеется ***6*** вариантов выбора стула.

Вторым садится дедушка и независимо выбирает стул из ***5*** оставшихся

Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из ***4*** стульев

У папы будет уже ***3*** варианта, у дочки – ***2***, ну а у сын сядет на ***единственно*** незанятый стул.

По правилу умножения имеем $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Ответ: 720 дней.

Определение. ***Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют «эн факториал»: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.***

Задача № 2. В 9 «А» классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить на среду?

Решение

Для алгебры – ***7*** вариантов. Для геометрии – ***6*** вариантов.

Для литературы – ***5*** вариантов и т. д.

По правилу умножения получаем: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

Ответ: 5040.

Определение. ***Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.***

Теорема о перестановках элементов конечного множества:

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

$$P_n = n!$$

Задача. ***Четыре друга купили билеты в кино: на 1-е и 2-е места в первом ряду и на 1-е и 2-е места во втором ряду. Сколькими способами друзья могут занять эти 4 места в кинотеатре?***

Решение

Используя теорему о перестановках имеем: ***4-е*** друга могут занять по одному ***4-е*** различных места ровно ***4!*** способами.

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24 способа.

***Задача.* Сколькими способами можно с помощью букв K, L, M, N обозначить вершины четырехугольника?**

Решение

Используя теорему о перестановках имеем: ***4-е*** различные буквы можно записать по одной около ***4-ех*** различных вершин многоугольника ровно ***4!*** способами.

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24 способа.

Задача. ***Сколько различных нечетных пятизначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 4, 6, 8?***

Решение

Т.к. числа должны быть нечётными, то на последнем пятом месте может быть только нечётная цифра – это ***1***.

Осталось ***4-е*** цифры(***2, 4, 6, 8***) и ***4-е*** разряда.

Используя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$

Ответ: 24 числа.

Задача. ***Сколько различных чётных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?***

Решение

Т. к. числа должны быть чётными, значит на последнем пятом месте должна стоять чётная цифра – это ***2*** или ***4***.

Найдем сколько пятизначных чётных чисел, которые оканчиваются цифрой ***2***.

Осталось ***4-е*** цифры (***1, 3, 4, 5***) и ***4-е*** разряда. Применяя теорему о перестановках имеем: $P_n = 4! = 24$ числа.

Рассуждая аналогично, получим, что пятизначных чётных чисел, оканчивающихся цифрой ***4***, тоже ***24***.

Получаем: $24 + 24 = 48$.

Ответ: 48 чисел.