# Метод простой итерации

Предположим, что уравнение $f(x)=0$ при помощи некоторых тождественных преобразований приведено к виду $x=\varphi(x)$.

Заметим, что такое преобразование можно вести разными способами, и при этом будут получаться разные функции $\varphi(x)$ в правой части уравнения. Уравнение $f(x)=0$ эквивалентно уравнению $x=x+\lambda(x)\, f(x)$ при любой функции $\lambda(x)\neq 0$. Таким образом, можно взять $\varphi(x)=x+\lambda(x)f(x)$ и при этом выбрать функцию (или постоянную) $\lambda(x)$ так, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла тем свойствам, которые понадобятся нам для обеспечения нахождения корня уравнения.

Для нахождения корня уравнения $x=\varphi(x)$ выберем какое-либо начальное риближение $x_0$ (расположенное, по возможности, близко к корню $x^*$).

Далее будем вычислять последующие приближения $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots$ по формулам $x_1 = \varphi(x_0)$; $x_2 = \varphi(x_1)$;…; $x_i = \varphi(x_{i-1})$; $x_{i+1} = \varphi(x_i)$; …

то есть используя каждое вычисленное приближение к корню в качестве аргумента функции $\varphi(x)$ в очередном вычислении.

Такие вычисления по одной и той же формуле $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, когда полученное на предыдущем шаге значение используется на последующем шаге, называются *итерациями*.

*Итерациями* называют часто и сами значения $x_i$, полученные в этом процессе.

**Теорема.** *Если функция* $\varphi(x)$ *имеет производную в некоторой окрестности* $E$ *корня* $x^*$ *уравнения* $x=\varphi(x)$, *причём* $|\varphi'(x)| \le \gamma < 1$ *при* $x \in E$, *то последовательность итераций* $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, *полученных при* $i = 1, 2, 3\ldots$, *начиная с* $x_0 \in E$, *сходится к корню* $x^*$.

*При этом скорость сходимости задаётся неравенствами*

$$|x_i - x^*| \le \gamma^i |x_0 - x^*|, \; i = 1, 2, 3\ldots,$$

$$|x_{i+1} - x_i| \le 4\delta\, \gamma^i,$$

*где* $2\delta$ *- длина окрестности* $E$*, а точность* $i$*-го приближения - оценкой*

$$|x_i - x^*| \le 2\delta\, \gamma^i.$$

*Таким образом, для достижения необходимой погрешности нужно использовать последнее неравенство этой теоремы. Если выполнено* $2\delta\gamma^{i} < \varepsilon$, то и $|x_i - x^*| < \varepsilon$.

Константа $\gamma$ *может быть получена путём нахождения максимума модуля производной функции* $\varphi(x)$ *на начальном интервале* $E$.