

# Коэффициенты аэродинамических сил

Лекции 25, 26

# 25.1. Определение аэродинамических сил и моментов по известным распределениям давления и касательного напряжения

- Пусть известны распределения давления  $p$  и касательных напряжений  $\tau$  по поверхности обтекаемого тела.

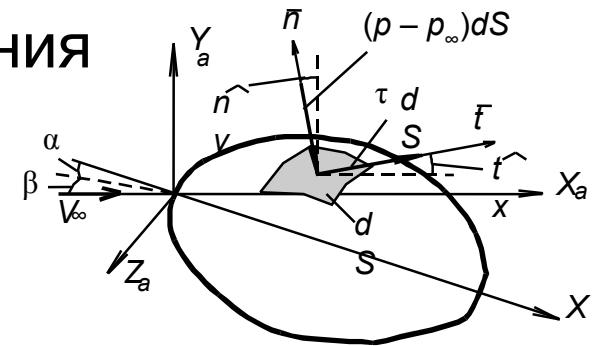
$$dX = [(p - p_\infty) \cos(n^{\wedge}x) + \tau \cos(t^{\wedge}x)] dS$$

После интегрирования (в безразмер-

ном виде):

$$X_a = q_\infty S_M \int_S \left[ \bar{p} \cos(n^{\wedge}x) + c_f \cos(t^{\wedge}x) \right] \frac{dS}{S_M}$$

Здесь  $\bar{p} = (p - p_\infty) / q_\infty$  - коэффициент давления,  
 $c_f = \tau / q_\infty$  - местный коэффициент трения,  
 $S_M$  - характерная площадь (крыла, миделя или др.).



Нормальные и касательные напряжения на поверхности тела

- Интегралы в формулах представляют собой безразмерные величины, учитывающие влияние на аэродинамические силы характера обтекания тела заданной геометрической формы и распределения безразмерных коэффициентов давления и трения по его поверхности. Их обозначают  $C_{xa}$ ,  $C_{ya}$  и  $C_{za}$  – коэффициенты силы лобового сопротивления, подъемной силы и боковой силы. То есть

$$X_a = c_{xa} q_\infty S_M; \quad Y_a = c_{ya} q_\infty S_M; \quad Z_a = c_{za} q_\infty S_M$$

Аналогично для моментов

$$M_{xa} = m_{xa} q_\infty S_M L, \quad M_{ya} = m_{ya} q_\infty S_M L, \quad M_{za} = m_{za} q_\infty S_M L$$

(момент крена, момент рыскания и момент тангажа и их коэффициенты)

- Анализ выражений для аэродинамических сил показывает, что каждую из этих сил можно представить в виде суммы двух составляющих:
  - 1 - обусловлена аэродинамическим давлением (присуща как **идеальной**, так и **реальной** жидкости);
  - 2 - обусловлена касательными напряжениями (присуща только для **реальной**, вязкой жидкости).

$$Y_a = Y_{ap} + Y_{af} \implies c_{ya} = c_{yap} + c_{yaf} \qquad X = X_p + X_f \implies c_x = c_{xp} + c_{xf}.$$

- В случае симметричного обтекания ( $\alpha = 0$ ) силы, обусловленные трением и давлением, с противоположных сторон тела взаимно компенсируются, и подъемная сила равна нулю. Поэтому подъемная сила появляется только в случае, когда  $\alpha \neq 0$ .
- Влияние трения оказывается существенным при обтекании длинных и тонких тел, для которых определение силы лобового сопротивления или продольной силы производится с учетом влияния трения.

## 25.2. Расчет сопротивления тел вращения

- Коэффициент сопротивления ЛА также можно представить в виде суммы составляющих  $c_x = c_{xp} + c_{xf}$ . При наличии у тела донного среза сопротивление от давления разделяется еще на две составляющие

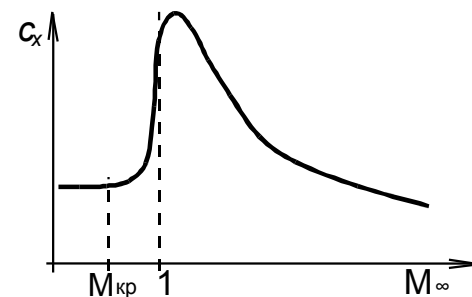
$$c_x = c_{\text{в}} + c_{\text{дм}} + c$$

сопротивление от давления на боковую поверхность; иногда его называют головным сопротивлением, а при сверхзвуковых скоростях полета это есть волновое сопротивление, создаваемое участками поверхности с переменной площадью сечения и следом за корпусом ЛА

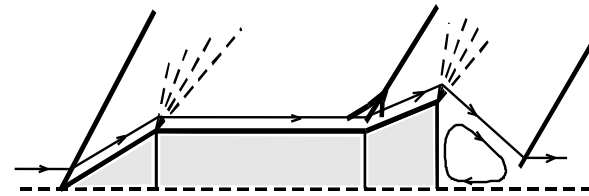
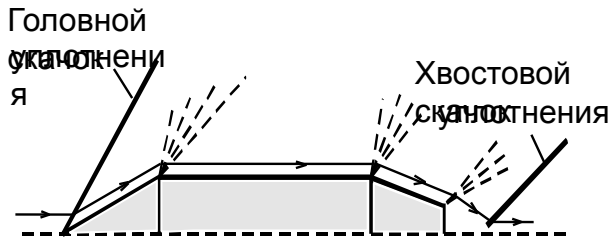
сопротивление от давления на донный срез – донное сопротивление, обусловленное пониженным давлением на поверхности донного среза; возникает во всем диапазоне скоростей полета при наличии донного среза и отсутствии за ним струи от работающей двигательной установки

## Волновое сопротивление

- При числах  $M_\infty > M_{кр}$  в диапазоне околозвуковых скоростей происходит резкое увеличение величины сопротивления, обусловленное появлением волнового сопротивления. Причина – необратимые потери механической энергии в скачках уплотнения.
- Для изолированного конуса  $c_{xв} = \bar{p}_к$ . Для прикидочных расчетов - приближенная полуэмпирическая зависимость: 
$$\bar{p}_к = c_{xв} = 0,002(0,8 + M_\infty^{-2})\Theta_k^{1,7}$$
- При сверхзвуковых скоростях скачки возникают в местах поджатия сверхзвукового потока, т. е. волновое сопротивление создают головные и хвостовые части тел вращения, а также переходные отсеки конической (параболической и т. д.) формы



Зависимость коэффициента сопротивления от числа Маха



- Головной конус и суживающаяся кормовая часть

$$c_{xв} = \bar{p}_\Gamma + \bar{p}_{xв} (1 - \bar{S}_{дн})$$

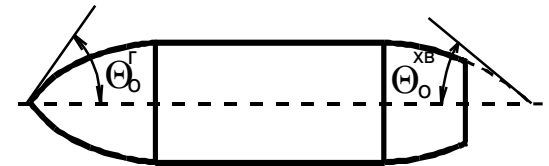
$$c_{xв} = 0,002 (0,8 + M_\infty^{-2}) \left[ \Theta_\Gamma^{1,7} + \Theta_{xв}^{1,7} (1 - \bar{S}_{дн}) \right]$$

- Лучше –

$$c_{xв} = c_{xв}^\Gamma \left[ 1 + \left( \frac{\Theta_{xв}}{\Theta_\Gamma} \right)^{1,7} \sqrt{1 - \bar{S}_{дн}} \right]$$

- Для тонких параболических или оживальных головных частей

$$c_{xв} = 0,332 \bar{p}_к$$



Корпус ЛА с носовой и кормовой частями параболической формы

- Для параболоидов вращения с удлинением  $\lambda_{ТВ} = l/d_M > 2,5$  при числах Маха  $M_\infty = 1,5 \dots 6,0$ :

$$c_{xв}^\Gamma = \frac{0,08 (15,5 + M_\infty)}{3 + M_\infty} \bar{p}_к$$

- Для тел вращения с кормовой частью параболической формы

$$c_{xВ}^{XB} = 0,4 \bar{p}_K^{XB} \left[ 1 - 2,41 \bar{S}_{дн}^{4/3} \left( 1 - 0,49 \bar{S}_{дн}^{1/2} + 0,056 \bar{S}_{дн} - 0,151 \bar{S}_{дн}^{3/2} \right) \right]$$

где  $\bar{p}_K^{XB}$  – коэффициент давления на конусе с углом  $\Theta_0^{XB}$

- Для тела с параболической головной частью и конической суживающейся хвостовой частью

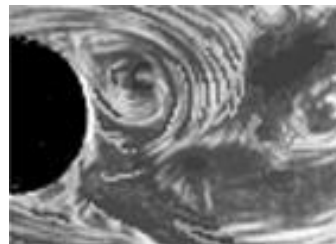
$$c_{xВ} = 0,332 \bar{p}_K^Г + \bar{p}_K^{XB} \sqrt{1 - \bar{S}_{дн}}$$

- Для очень тонкого тела вращения, когда его относительная толщина стремится к нулю,  $c_{xВ} = 1,17 \lambda_M^{-2}$  сверхзвуковое возмущенное течение около него не зависит от сжимаемости среды, т. е. от числа Маха



## Донное сопротивление

- Когда тело вращения имеет срез (дно) в кормовой части,



непосредственно за этим дном образуется сильное разрежение, увеличивающее лобовое сопротивление тела. Возникающее дополнительное сопротивление называется **донным**.

- Давление на донном срезе зависит от состояния пограничного слоя на задней кромке тела, (ламинарный или турбулентный). Т.е. относительное донное давление зависит от числа Рейнольдса. С другой стороны, его величина определяется углом поворота сверхзвукового потока, т.е. числом Маха

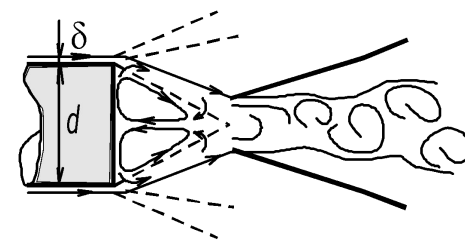


Схема течения в донной области

- Можно считать, что на плоскости донного среза давление практически постоянно. Тогда

$$X_{\text{дн}} = (p_{\infty} - p_{\text{дн}}) S_{\text{дн}} \longrightarrow c_{\text{хдн}} = \frac{X_{\text{дн}}}{q_{\infty} S_{\text{м}}} = \frac{p_{\infty} - p_{\text{дн}}}{q_{\infty}} \frac{S_{\text{дн}}}{S_{\text{м}}} \quad c_{\text{хдн}} = -\bar{p}_{\text{дн}} \bar{S}_{\text{дн}}$$

- Когда диаметр среза равен диаметру мидела  $c_{\text{хдн}} = -\bar{p}_{\text{дн}}$

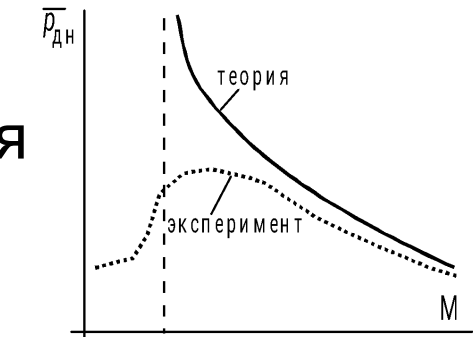
- С увеличением числа Маха  $p_{\text{дн}} \rightarrow 0$  и коэффициент донного давления  $\bar{p}_{\text{дн}} = \left( \frac{p_{\text{дн}}}{p_{\infty}} - 1 \right) \frac{2}{kM_{\infty}^2}$  стремится к величине  $\bar{p}_{\text{дн}} = -\frac{2}{kM_{\infty}^2}$ . Предельное значение коэффициента донного сопротивления при абсолютном вакууме в донной области

$$c_{\text{хдн}} = \frac{2}{kM_{\infty}^2} \bar{S}_{\text{дн}} \approx \frac{1,43}{M_{\infty}^2} \bar{S}_{\text{дн}}$$

- В реальных условиях коэффициент донного давления значительно отличается от своего предельного значения

- $\bar{p}_{\text{дн}}$  зависит не только от чисел Маха и Рейнольдса, но и от формы, удлинения тела, состояния пограничного слоя. Для учета отличия давления от абсолютного вакуума в расчетную зависимость вводится поправочный коэффициент:

$$K_{\text{дн}} = 0,8K_1(2 - K_1) \quad \longrightarrow$$



Зависимость коэффициента донного давления от числа Маха

$$c_{\text{хдн}} = K_{\text{дн}} \frac{1,43}{M_{\infty}^2} \bar{S}_{\text{дн}}$$

Здесь  $K_{\text{эф}} = \frac{M_{\infty}}{\lambda_{\text{эф}}}$ ;  $\lambda_{\text{к}} = \frac{\lambda_{\text{к}}}{\bar{S}_{\text{дн}}}$ ;  $\lambda = \frac{x_{\text{к}}}{d_{\text{м}}}$  :

- при  $K_1 \leq 1$  давление в донной области отличается от абсолютного вакуума

$$c_{\text{хдн}} = 1,144 \cdot K_1(2 - K_1) M_{\infty}^{-2} \bar{S}_{\text{дн}}$$

- При  $K_1 > 1$  за дном практически абсолютный вакуум

$$c_{\text{хдн}} = 1,43 \cdot M_{\infty}^{-2} \bar{S}_{\text{дн}}$$

## Сопротивление трения

- При дозвуковой скорости лобовое сопротивление состоит на 75...85 % из сопротивления трения. При расчете сопротивления трения для тела вращения определяют сначала коэффициент сопротивления трения пластины  $c_f$ , имеющей площадь, равную всей омываемой поверхности тела вращения  $S_{\text{бок}}$ , и обтекаемой несжимаемой жидкостью. При больших удлинениях корпуса ЛА эта площадь немного меньше, чем площадь боковой поверхности цилиндра той же длины, что и тело вращения. Приблизительно можно принять  $S_{\text{бок}} = K\lambda_{\text{т.в}} S_{\text{м}}$  ( $K \approx 3$ ).
- Сила трения равновеликой пластины домножается на коэффициенты, учитывающие отличие формы ЛА от пластины и сжимаемость среды:

$$X_{\text{тр}} \neq c_{\text{ф}} q_{\infty} S_{\text{бок}} \eta_c \eta_m = \text{тр} \infty \text{м} \longrightarrow c_{\text{xp}} = c_{\text{ф}} \eta_c \eta_m \bar{S}_{\text{бок}}$$

- $\eta_c$  – учитывает отличие тела вращения от плоской пластины (зависит от относительной толщины тела  $\bar{c}_{\text{т.б}} = 1/\lambda_{\text{т.б}}$ , например, для конуса при ламинарном пограничном слое  $\eta_c = \sqrt{3}$ , при турбулентном  $\eta_c = 1,17$ );
- $\eta_m$  – учитывает влияние сжимаемости:  
 ламинарный пограничный слой  $\eta_m = (1 + 0,03M_{\infty}^2)^{\frac{1}{3}}$   
 турбулентный –  $\eta_m = (1 + 0,12M_{\infty}^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\bar{S}_{\text{бок}} = S_{\text{бок}} / S_{\text{м}}$  - относительная площадь боковой поверхности
- Местный средний коэффициент трения рассчитываем по формулам, полученным для плоской пластинки в несжимаемой среде:
- Ламинарный пограничный слой -  $c_{\text{фл}} = \frac{1,32}{\sqrt{\text{Re}}} \left( \text{Re} = \frac{V_{\infty} L}{v_{\infty}} \right)$

- Турбулентный пограничный слой - если  $Re = 2 \cdot 10^6 \dots 10^{10}$ ,  

$$c_{fT} = 0,032 Re^{-0,145}$$
- Для более точного определения коэффициента трения следует учитывать, что поверхность ЛА покрыта частично ламинарным, частично турбулентным пограничным слоем. При смешанном пограничном слое необходимо правильно определить положение линии перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Для линии перехода можно написать следующее очевидное соотношение:
 
$$\frac{S_{\text{лам}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{Re_{\text{кр}}}{Re_{\text{т.в}}}$$
 где  $S_{\text{лам}}$  – площадь боковой поверхности тела, покрытая ламинарным пограничным слоем;  $Re_{\text{кр}}$  – критическое число Рейнольдса;  $Re_{\text{т.в}}$  – число Рейнольдса, рассчитанное по всей длине тела.

- Для сверхзвукового обтекания тел вращения среднее значение критического числа Рейнольдса  $Re_{кр} = (5...6,5) \cdot 10^6$
- После определения линии перехода можно найти местный коэффициент трения

$$c_f = c_{f_t} - \left( f_{т_{кр}} - f_{л_{кр}} \right) \frac{S_{лам}}{S_{бок}}$$

- где  $c_{f_{т_{кр}}}$  и  $c_{f_{л_{кр}}}$  – местные коэффициенты трения для турбулентного и ламинарного пограничных слоев, рассчитанные для линии перехода по  $Re_{кр}$ .  
Затем по величине  $c_f$  рассчитывают  $c_{хтр}$

## 26.1. Влияние высоты полета на коэффициенты сопротивления трения и донного сопротивления

- При постоянной высоте полета с ростом числа  $M_\infty$  коэффициент сопротивления трения убывает в связи с уменьшением толщины пограничного слоя.
- Влияние высоты полета  $H$  на  $c_{xтр}$  проявляется в изменении с высотой состояния и характеристик пограничного слоя и связанного с ними числа Рейнольдса:

$$Re_h = \frac{M_\infty a_h L}{v_h} :$$

- Значения параметров  $a_h$  ,  $v_h$  зависят от высоты над поверхностью Земли.

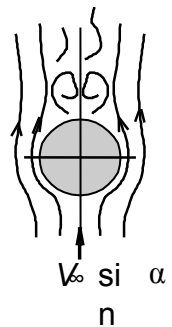


- С увеличением высоты полета коэффициент кинематической вязкости, ввиду опережающего влияния уменьшения плотности, все время возрастает, толщина пограничного слоя растет, происходит ламиниризация течения на поверхности ЛА.
- Высота и скорость полета оказывают противоположное влияние на величину  $C_{xT p}$  и скоростного напора  $q_{\infty}$ . Поэтому при анализе влияния  $H$  и  $V$  на силу сопротивления трения, коэффициенты  $C_{xT p}$  и  $C_{xдн}$  следует учитывать интенсивность и направление (увеличение или уменьшение) изменения параметров, определяющих их величину.
- При одновременном росте скорости и высоты полета большее влияние на характеристики пограничного слоя, величину сил и коэффициентов  $C_{xT p}$  и  $C_{xдн}$  оказывает  $H$  ввиду высокой интенсивности уменьшения давления и плотности атмосферы при увеличении  $H$ .

## 26.2. Нормальная сила тел вращения с учетом трения

- Для тел вращения более удобно вести расчеты в связанной системе координат, поэтому рассмотрим расчетные зависимости для нормальной силы  $Y$  (или  $N$ ). Коэффициент нормальной силы равен  $c_N = c_{Np} + c_{Nf}$
- Нормальная сила для тонкого тела вращения без учета вязкости газа, т. е. при отсутствии трения, равна  $c_{Np} = 2\alpha \cdot \bar{S}_{\text{дн}}$  (для головных частей  $c_{Np} = 2\alpha$ ). То есть в условиях идеальной модели среды нормальная сила появляется только на участках поверхности с переменной площадью поперечного сечения.
- Эта формула не учитывает зависимости коэффициента  $c_{Np}$  от числа Маха  $M_\infty$ .

- Линейный закон изменения  $c_N$  сохраняется лишь при малых углах атаки. С увеличением угла  $\alpha$  в зависимости  $c_N(\alpha)$  появляется нелинейность, обусловленная отрывом пограничного слоя на боковой поверхности корпуса за счет вязкости газа. Дополнительная нормальная сила возникает в основном за счет срыва потока на подветренной части тела, т. е. при поперечном обтекании тела вязкой средой со скоростью  $V_\infty \sin \alpha$ . Головная часть обтекается практически безотрывно.

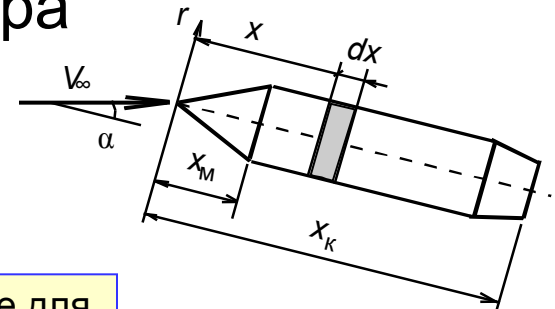


- Тогда на элемент поверхности цилиндра действует сила

$$dN_f = c \frac{\rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \alpha}{2} 2r dx = dc_{Nf} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \pi r_M^2$$

сила сопротивления корпуса, обтекаемого в поперечном направлении

обычное выражение для нормальной силы



- Тогда  $d_{Nf} = \frac{2}{\pi} \frac{r}{r_M^2} \sin^2 \alpha dx$  и  $c_{Nf} = c \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{r_M^2} \int_{x_M}^{x_K} r dx$

- В практических оценочных расчетах считаем:
  - дополнительную нормальную силу создает вся поверхность тела за пределами головной части, хотя место отрыва потока несколько ниже угловой точки;
  - при наличии хвостовой части с переменной в продольном направлении площадью поперечного сечения допустимо заменить кормовую часть любой формы цилиндром с удлинением  $\lambda_{XB} = \frac{L_{XB}}{d_M}$ .

- Таким образом  $c_{Nf} = c \frac{4}{\pi} \sin^2 \alpha (\lambda_{Ц} + \lambda_{XB})$

- Для углов атаки  $\alpha$  до  $10^\circ \dots 15^\circ$  с точностью до  $1 \dots 2 \%$   $\sin^2 \alpha \approx \alpha^2$ . Тогда расчетная зависимость для  $c_N = c_{Np} + c_{Nf}$  имеет вид

$$c_N = 2\alpha \bar{S}_{\text{дн}} + c \frac{4}{\pi} (\lambda_{\text{ц}} + \lambda_{\text{кв}}) \alpha^2$$

- Величину коэффициента  $c$  при прикидочных расчетах можно выбрать, исходя из следующих условий:
- а) для фюзеляжей самолетов и крупных ракетных снарядов в среднем  $c = 0,5$  (на большей части поверхности пограничный слой турбулентный, а в передней части снаряда – ламинарный);
- б) для турбулентного течения  $c = 0,35$  ;
- в) при числах  $M_\infty > 1,5$  можно считать  $c = 1,2$  .