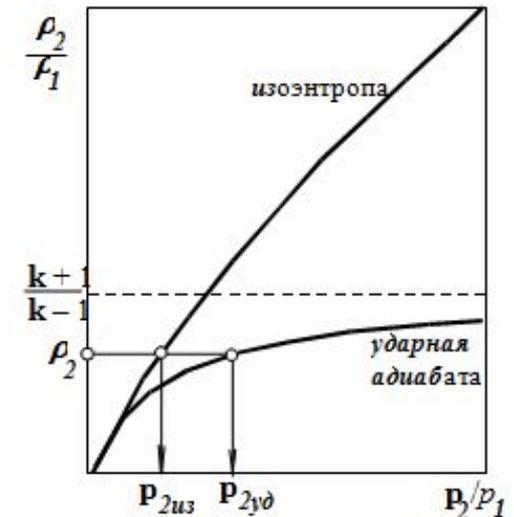


# Сверхзвуковые течения со скачками уплотнения

# 12.1. Сравнение сжатия в прямом скачке с изоэнтропическим сжатием

- При изоэнтропическом сжатии - адиабата Пуассона  $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$ , при ударном – адиабата Гюгонио. При неограниченном возрастании давления плотность растет не более чем в  $\frac{k+1}{k-1}$  раз, т. е. процесс скачкообразного изменения параметров газа **в скачке не изоэнтропический** и может рассматриваться лишь как адиабатический, если пренебречь рассеянием тепла, выделяющегося в скачке. Отсюда следует, что энтропия при ударном сжатии должна возрастать.



- При изоэнтропическом сжатии параметры газа изменяются от  $p_1, \rho_1$  до  $p_{\text{из}}, \rho_2$ . При ударном – от  $p_1, \rho_1$  до  $p_2$  и  $p_{\text{зд}} = p_2$  ( $p_{\text{из}} > p_2$ ).

- Выражение для энтропии:

$$s = c_V \ln \frac{p}{\rho^k}$$

Для изоэнтропического процесса

$$S_{\text{из}} = s = c_V \ln \frac{p_1}{\rho_1^k} = c_V \ln \frac{p_{\text{из}}}{\rho_2^k}$$

- Для процесса ударного сжатия

$$S_2 = c_V \ln \frac{p_2}{\rho_2^k}$$

- Т.к.  $p_{\text{из}} > p_2$ , то  $S_2 - S_1 = c_V \ln \frac{p_2}{\rho_2^k} - c_V \ln \frac{p_{\text{из}}}{\rho_2^k} = c_V \ln \frac{p_2}{p_{\text{из}}} > 0$

- Таким образом, при ударном сжатии, т. е. при переходе через фронт скачка уплотнения энтропия действительно возрастает

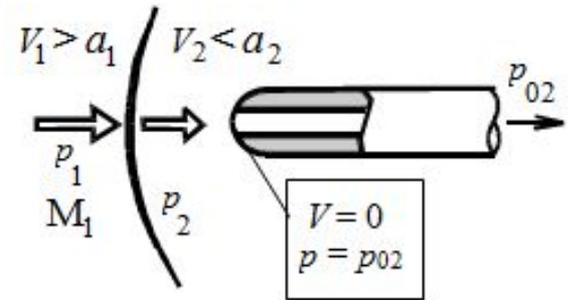
- Так как при ударном сжатии энтропия увеличивается, то **ударное сжатие – процесс необратимый**

- Т. е. при процессах, происходящих по закону ударной адиабаты, наблюдается необратимый переход части механической (кинетической) энергии в тепловую (температура газа повышается значительно сильнее, чем при изоэнтропическом сжатии), которая уже не может быть полностью преобразована обратно в кинетическую энергию без дополнительных затрат механической энергии.
- **Необратимое превращение механической энергии в тепловую энергию на скачке уплотнения является источником дополнительного так называемого волнового сопротивления**

## 12.2. Давление в критической точке за прямым скачком уплотнения

- Перед затупленным телом образуется отсоединенный криволинейный скачок уплотнения. До скачка параметры потока  $V_1, p_1$ , за скачком –  $V_2, p_2$ .

- В передней критической точке тела  $V_2 = 0$  и  $p_2 = p_{02}$ , причем давление  $p_{02}$  не будет равно давлению  $p_{01}$  при изоэнтропическом торможении газа.



- Это в определенной мере препятствует прямому использованию метода определения скорости потока с помощью трубки полного напора. Найдем отношение давлений  $\frac{p_{02}}{p_1}$ . Запишем его как  $\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1}$

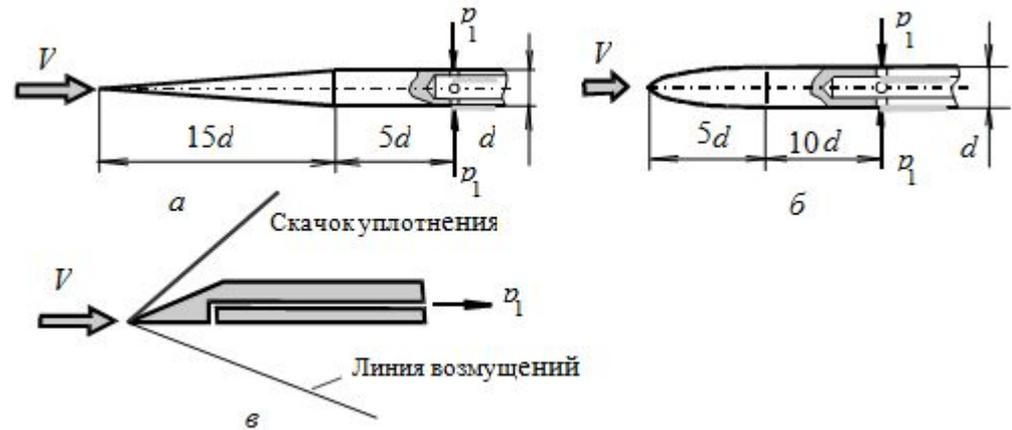
- Т.к.  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}$        $\frac{p_{02}}{p_2} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$
- После преобразований с учетом  $\Rightarrow M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}$  получим **формулу Рэля** – формулу для расчета числа М сверхзвукового потока через отношение давления торможения за скачком уплотнения к статическому давлению набегающего потока:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{k-1}{k+1} \left[ \frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \frac{M_1^2}{\left( \frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}}$$

- При  $k=1$   $\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{166,7 M_1^2}{(7 - M_1^{-2})^{2,5}}$

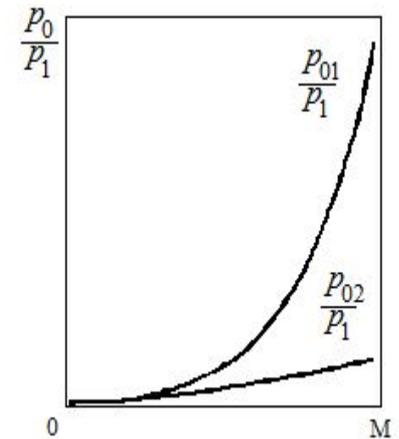
## 12.3. Зонды для измерения статического давления

- Для измерения статического давления в сверхзвуковом потоке применяются специальные зонды, позволяющие измерять статическое давление не за скачком уплотнения, а за волнами возмущения. Изменения давления в этом случае настолько малы, что ими можно пренебречь.
- Измерив давление торможения за скачком уплотнения и статическое давление в набегающем потоке, можно при помощи формулы Рэлея рассчитать число Маха набегающего потока



## 12.4. Коэффициент восстановления полного давления

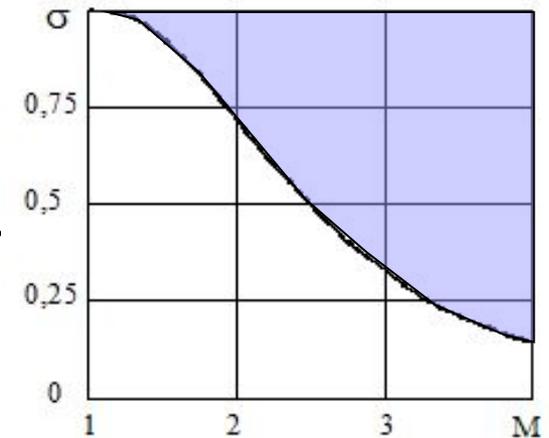
- Зависимости  $\frac{p_{02}}{p_1}$  для ударного и  $\frac{p_{01}}{p_1}$  для изоэнтропического торможения от числа  $M$  показывают, что при течении со скачком уплотнения наблюдаются потери полного давления (потери напора), т. е. необратимые потери механической энергии. Потери механической энергии характеризует коэффициент потерь полного напора (*коэффициент восстановления полного давления*)



$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad \text{при } k = 1,4$$

$$\sigma = \frac{166,7M_1^2}{(7 - M_1^{-2})^{2,5} (1 + 0,2M_1^2)^{3,5}}$$

- Зависимость коэффициента восстановления полного давления от числа Маха указывает на существенный рост потерь полного напора при увеличении числа Маха



- При переходе через скачок уплотнения температура торможения  $T_0$  не изменяется, поэтому из уравнения состояния следует, что плотность заторможенного потока при переходе через скачок уплотнения уменьшается пропорционально полному давлению, т. е.  $\rho_{02} / \rho_{01} = p_{02} / p_{01}$ .
- Зависимость  $\sigma = \sigma(M)$  показывает, что при числах  $1 < M_1 < 1,5$  коэффициент  $\sigma$  мало отличается от единицы как для прямых, так и для косых скачков уплотнения.

- Это обстоятельство используют для торможения сверхзвукового потока до дозвуковой скорости с наименьшими потерями механической энергии в системе скачков уплотнения.
- Коэффициент  $\sigma$  для системы скачков уплотнения, состоящей из косых скачков и одного прямого, может быть найден как

$$\sigma = \frac{P_{0n}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{01}} \frac{P_{03}}{P_{02}} \dots \frac{P_{0n}}{P_{0(n-1)}} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$$

- Для системы скачков  $\sigma$  будет максимальным тогда, когда интенсивности скачков, характеризуемые величинами  $M_i \sin \beta_i$ , будут одинаковыми. Такую систему косых скачков уплотнения называют **оптимальной**.

# 13.1. Связь между углом поворота потока и углом наклона косоугольного скачка уплотнения

- Из рисунка следует  $\operatorname{tg}(\beta - \Theta) = \frac{V_{2n}}{V_{\tau}}$
- Из формулы Прандтля для косоугольного скачка

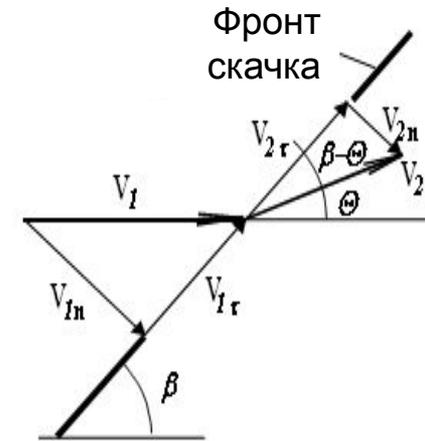
$$V_{\text{кр}} = \frac{1}{V_{1n}} \left( a^2 - \frac{k-1}{k+1} V_{\tau}^2 \right)$$

- Т.к.  $V_{1n} = V_1 \sin \beta$   $V_{\tau} = V_1 \cos \beta$ , то

$$\operatorname{tg}(\beta - \Theta) = \frac{a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} V_1^2 \cos^2 \beta}{V_1^2 \sin \beta \cos \beta} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(\beta - \Theta) = \frac{\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2} - \frac{k-1}{k+1} M_1^2 \cos^2 \beta}{M_1^2 \sin \beta \cdot \cos \beta}$$

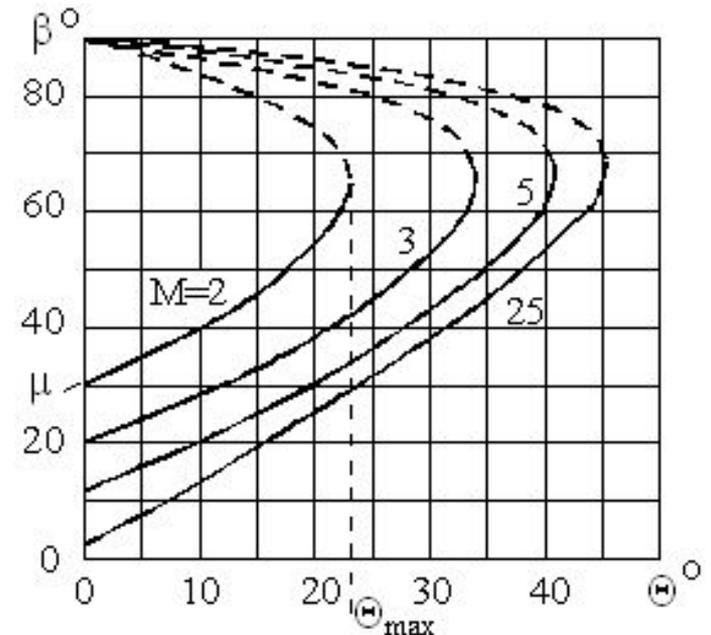
Т.к.  $a^2 = kRT$   $\frac{a_{\text{кр}}^2}{a_1^2} = \frac{T_{\text{кр}}}{T_1} = \frac{T_{\text{кр}}}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)$ , тогда

$$\operatorname{tg}(\beta - \Theta) = \frac{2 + (k-1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(k+1) M_1^2 \sin \beta \cdot \cos \beta} \quad . \quad \text{Поскольку} \quad \operatorname{tg}(\beta - \Theta) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \Theta}{1 + \operatorname{tg} \Theta \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

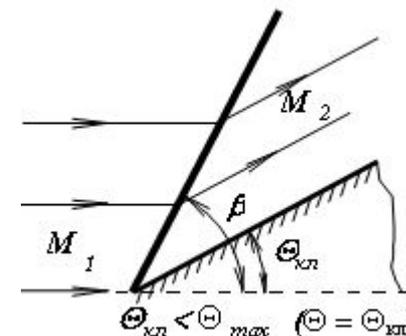


- После преобразований
- Угол поворота потока в скачке уплотнения равен нулю в двух случаях:
  - 1) когда  $M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0$ , скачок вырождается в **волну слабых возмущений**  $\beta = \mu$ ;
  - 2) когда  $\text{ctg} \beta = 0$ , т. е. при  $\beta = 90^\circ$  — **прямой скачок уплотнения**
- Каждому числу Маха соответствует некоторое максимальное значение угла поворота потока  $\Theta_{\max} = f(M_1)$ . на который сверхзвуковой поток может повернуть, пройдя фронт **косого** скачка уплотнения

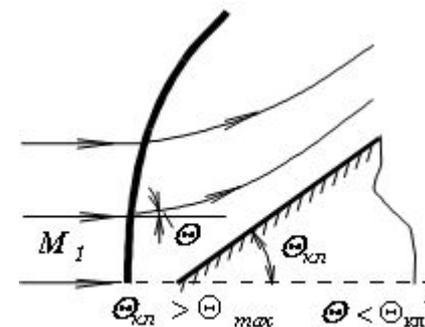
$$\text{ctg} \Theta = \beta \cdot \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{1 + M_1^2 \left( \frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta \right)}$$



- При данном  $M_1$  одному и тому же значению  $\Theta$  соответствуют два значения  $\beta$ , соответствующих **сильным** (штриховая часть линий) и **слабым** (сплошная часть кривых) скачкам уплотнения.
- Если угол клина  $\Theta_{\text{кл}} < \Theta_{\text{max}}$ , то возникает **присоединенный** (сравнительно слабый) **косой скачок уплотнения**. Угол поворота потока в таком скачке равен  $\Theta_{\text{кл}}$ . Угол наклона скачка определяется по сплошным кривым.
- Если  $\Theta_{\text{кл}} > \Theta_{\text{max}}$ , то образуется **отсоединенный криволинейный скачок уплотнения**. Ему отвечает целиком вся линия графика зависимости  $\beta$  от  $\Theta$ .



Косой присоединенный – слабый скачок



Криволинейный отсоединенный – сильный скачок

## 13.2. Ударная поляра

- Найдем уравнение годографа скорости в виде  $V_{2y} = f(V_{2x}, V_1)$ .
- В соответствии с рисунком можем записать выражения

$$V_{2x} = V_\tau \cos \beta + V_{2n} \sin \beta,$$

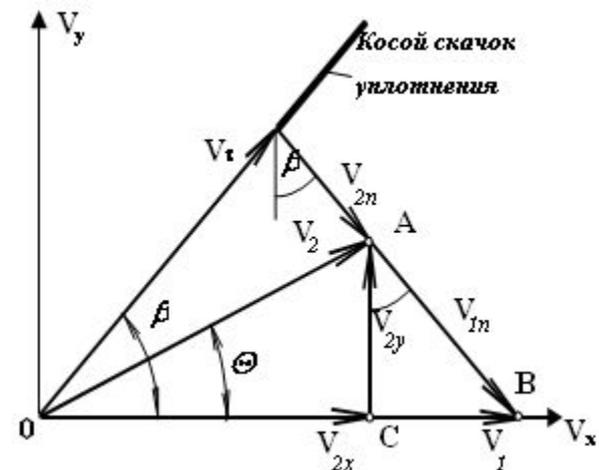
$$V_{2y} = V_\tau \sin \beta - V_{2n} \cos \beta.$$

- Т.к.  $V_{кр} V_{2n} = a^2 - \frac{k-1}{k+1} V_\tau^2$ ,  $V_{1n} = V_1 \sin \beta$  и  $V_\tau = V_1 \cos \beta$ , то из первого уравнения системы получаем

$$V_{2x} = \frac{a_{кр}^2}{V_1} + \frac{2}{k+1} V_1 \cos^2 \beta$$

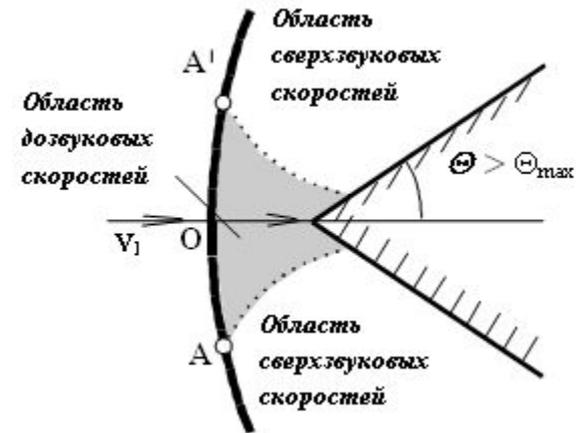
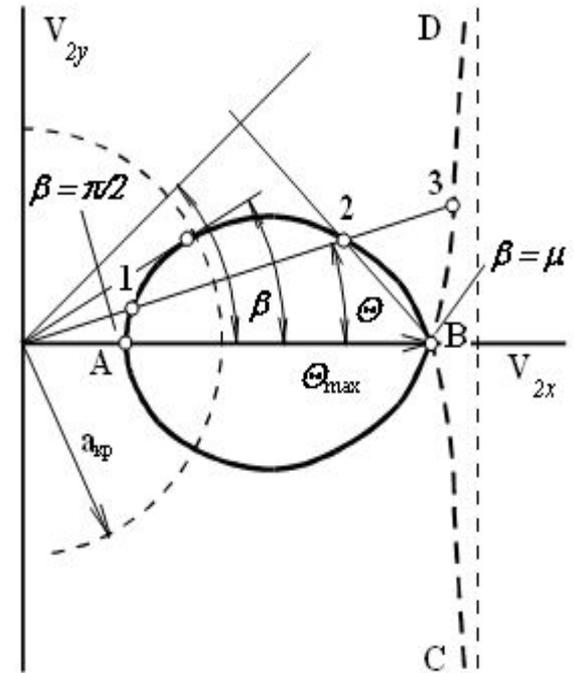
- Из  $\Delta ABC$ :  $\text{ctg} \beta = \frac{V_{2y}}{V_1 - V_{2x}}$ ,  $\Rightarrow \text{ctg}^2 \beta = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{V_{2y}^2}{(V_1 - V_{2x})^2}$

откуда  $\cos^2 \beta = \frac{V_{2y}^2}{(V_1 - V_{2x})^2 + V_{2y}^2}$  и



$$V_{2y}^2 = (V_1 - V_{2x})^2 \frac{V_{2x} - \frac{a_{кр}^2}{V_1}}{\frac{2}{k+1}V_1 + \frac{a_{кр}^2}{V_1} - V_{2x}}$$

- Из формулы следует, что годограф скорости за скачком уплотнения есть кривая, симметричная относительно оси абсцисс, с вертикальной асимптотой. Кривая пересекает ось абсцисс ( $V_{2y} = 0$ ) при значениях  $V_{2x}$ :
- $V_1 = V_2 = V_{2x}$  скачок уплотнения вырождается в волну слабых возмущений (точка В);
- $V_{2x} = V_2 = \frac{a_{кр}^2}{V}$  - прямой скачок уплотнения (точка А).



- Петлю этой кривой называют ударной полярой. Бесконечные ветви физического смысла не имеют, так как для них  $V_2 > V_1$ , что возможно только в скачке разрежения, который для адиабатического течения невозможен (например, точка 3).
- При  $\Theta > \Theta_{\max}$  образуется отсоединенный криволинейный (сильный) скачок уплотнения, угол наклона которого, при переходе от центральной линии тока к периферии течения, изменяется в пределах  $90^\circ > \beta \geq \mu$ . В центральной части скорость течения за криволинейным скачком дозвуковая