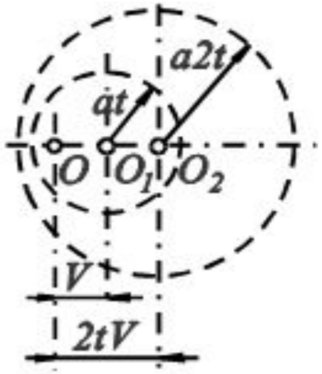
Одномерные изоэнтропические течения газа

Лекция 6

- Сжатие (расширение) газа сопровождается повышением (понижением) давления - газ обладает свойствами упругого тела. Местное уплотнение малой интенсивности ($\partial\rho/\rho << 1$, $\partial p/p << 1$) будет распространяться в виде волны возмущения с некоторой скоростью . Такую же природу имеет звуковая волна, представляющая собой продольные волны малой интенсивности.
- Поэтому скорость распространения любых малых возмущений в газе равна скорости звука.

6.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. СКОРОСТЬ ЗВУКА

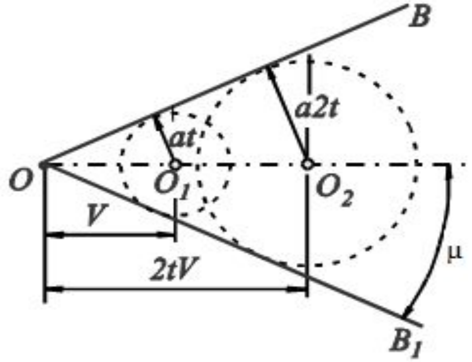
- Если газ покоится $(V = 0)$, то возмущения в моменты времени t_1, t_2, t_3 и т. д. образуют ряд концентрических сферических волн с центрами в точке O и радиусом от нуля до at_i на рассматриваемом отрезке времени.



При движении точечного источника возмущений с дозвуковой скоростью $V < a$ сферические волны смещаются в сторону движения источника, но опережают его, т.е. источник находится внутри вызванной им сферической волны.

- При звуковой скорости источника передний край волны возмущения и положение источника совпадают

- Когда скорость источника возмущений становится больше скорости распространения волн ($V > a$), тело обгоняет волны, оставляя их позади себя в виде расширяющегося конуса, вершиной которого является само тело. Возмущения при сверхзвуковых скоростях навстречу потоку не распространяются, т.е. не проникают вперед в невозмущенную область.



Этот конус является огибающей сферических волн возмущений и называется *конусом возмущения*, или *конусом Маха.*

- На плоскости, проходящей через ось конуса, получаем прямые OB и OB_1, называемые *линиями слабых возмущений* (*линиями Маха*) - ударные волны бесконечно малой интенсивности.

- Угол *μ*, равный половине угла при вершине конуса, называют *углом возмущений* $\sin\mu = \frac{at}{Vt} = \frac{a}{V}$, $\boxed{\sin\mu = \frac{1}{\mathrm{M}}}$
- При увеличении числа М угол *μ* уменьшается, т. е. зона возмущений сужается (М → ∞, *μ* → 0).
- Скорость звука определяется как $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$.
- Т.е. скорость звука зависит от закона, связывающего изменение давления с изменением плотности.

Для изоэнтропического процесса $\boxed{a = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}}$

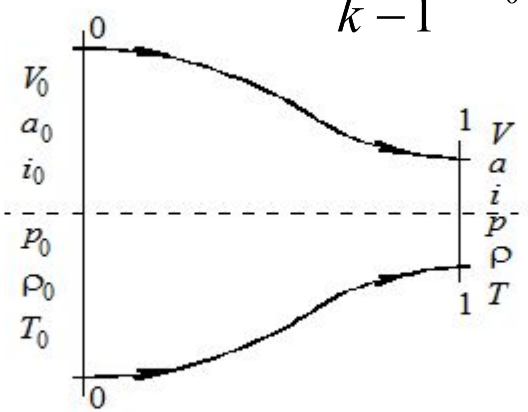
Для воздуха k = 1,4, R=287 Дж/кг/К $\boxed{a = 20{,}1\sqrt{T} \text{ (м/с)}}$

6.2.СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ГАЗА

- Изоэнтропическое течение газа вдоль трубки тока.

Уравнение Бернулли $\frac{V_0^2}{2}+i_0=\frac{V^2}{2}+i$ при $V_0=0$ $i_0=i+\frac{V^2}{2}$

или $\frac{k}{k-1}RT_0=\frac{k}{k-1}RT+\frac{V^2}{2}$



газа, соответствующие сос-тоянию покоя,

параметра-ми изоэнтропически

нного потока или *параметрами*

я.

- Давление p_0 называют еще *полным давлением*.

При торможении газа происходит повышение темпера-

туры, равное $\Delta T=T_0-T=\frac{k-1}{2k}\frac{V^2}{R}$; для воздуха $\boxed{\Delta T\approx\frac{V^2}{2009}}$

- Все теплосодержание i_0 переходит в кинетическую энергию $V_{max}^2/2$ при расширении газа до абсолютного вакуума ($p=0$) – поток достигает *теоретической максимальной скорости течения газа* $V_{max}=\sqrt{2i_0}$

$$V_{max}=\sqrt{2i_0}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0}=\sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}}$$

- Т.к. при изоэнтропическом течении идеального газа

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$$ и $$\frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{T}{T_0},$$ то $$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$ и $$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

- Формулы для расчета p, ρ, T при изоэнтропическом течении газа:

$$\boxed{\frac{T}{T_0}=1-\frac{V^2}{V_{max}^2}}\quad \boxed{\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}\quad \boxed{\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{V^2}{V_{max}^2}\right)^{\frac{k}{k-1}};}$$

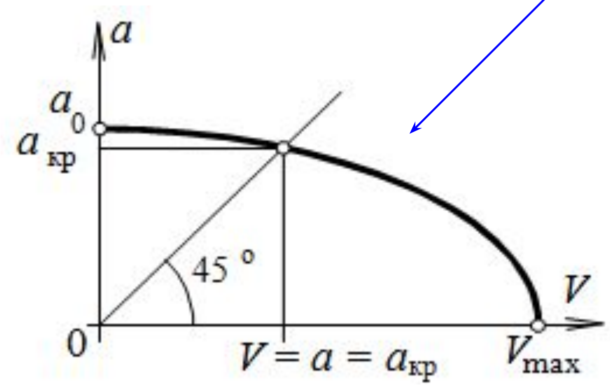
- При изоэнтропическом течении газа увеличение его кинетической энергии может происходить только при понижении теплосодержания (потенциальной энергии), при этом p, ρ, T - уменьшаются

При изоэнтропическом (или адиабатическом) течении газа с ростом скорости происходит расширение газа

- Т.к. $\frac{T}{T_0} = \frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_{max}^2}$, то можно записать $\frac{a^2}{a_0^2} + \frac{V^2}{V_{max}^2} = 1$

Изоэнтропический эллипс

- Местная скорость потока, равная местной скорости звука, называется критической $V = a = a_{кр}$
- Сечение струи газа, в котором достигается это условие, называют критическим



- Параметры состояния газа в этом сечении также называются критическими $p_{кр}$, $\rho_{кр}$, $T_{кр}$.

$$a_{кр}^2 = \frac{k-1}{k+1} V_{max}^2; \qquad a_{кр}^2 = \frac{k-1}{k+1} 2i_0 = \frac{2k}{k+1} RT_0 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \qquad a_{кр}^2 = \frac{2}{k+1} a_0^2$$

$$\boxed{T_{кр} = \frac{2}{k+1} T_0.} \qquad \boxed{\rho_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \rho_0} \qquad \boxed{p_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} p_0}$$

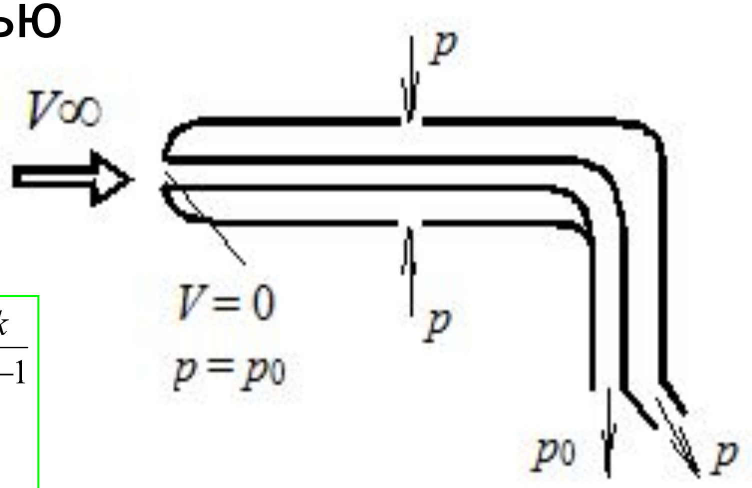
- В аэродинамике удобнее пользоваться формулами для определения параметров не через V_{max}, а через число Маха. В газовой динамике – через коэффициент скорости $\lambda = \dfrac{V}{a_{кр}}$

(A) $$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \qquad \boxed{\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}} \qquad \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}^2}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2.$$

Скорость потока, V	0	дозвук	$a_{кр}$	сверхзвук	V_{max}
Число Маха, М	0	$0< M<1$	1	$1< M<\infty$	∞
Коэффициент скорости, λ	0	$0< \lambda<1$	1	$1< \lambda< \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$	$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

Формула (А) имеет большое практическое значение для нахождения числа М в дозвуковом потоке. Определяя экспериментально давление торможения p_0 и статическое давление в потоке *p* с помощью специального насадка – трубки Пито–Прандтля, по формуле (А) можно рассчитать число Маха набегающего потока

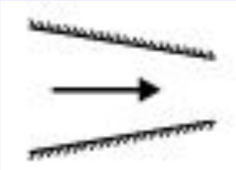
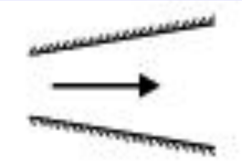
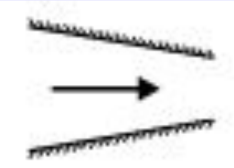


$$\text{(A)} \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

7.1.СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ФОРМОЙ ЕГО СТРУИ

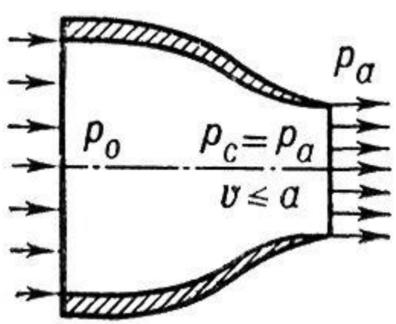
- Уравнение неразрывности для установившегося движения идеальной жидкости в трубке тока в форме массового расхода $\rho VF = \mathrm{const}$ после дифференцирования примет вид $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dF}{F} = 0$
- Из уравнения Бернулли и формулы для скорости звука $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{a^2}\frac{dV}{V}$
- Следовательно $\frac{dF}{F} = -\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)\frac{dV}{V}$ или $\boxed{\frac{dF}{F} = -(1 - \mathrm{M}^2)\frac{dV}{V}}$
- 1. Если *V* < a, т. е. $\left(1 - \mathrm{M}^2\right) > 0$, то *dF* ~ –*dV*. В дозвуковом потоке скорость газа меняется так же, как и в потоке несжимаемой жидкости: с увеличением площади поперечного сечения *F* скорость *V* убывает и наоборот

- 2. Если $V > a$, т. е. , то $dF \sim dV$. С увеличением F скорость V также увеличивается, а с уменьшением F – уменьшается.
- 3. При $V = a$ $dF = 0$. При непрерывном изменении ско-рости течения это условие может быть реализовано только в экстремальном, а именно в минимальном, сечении потока.

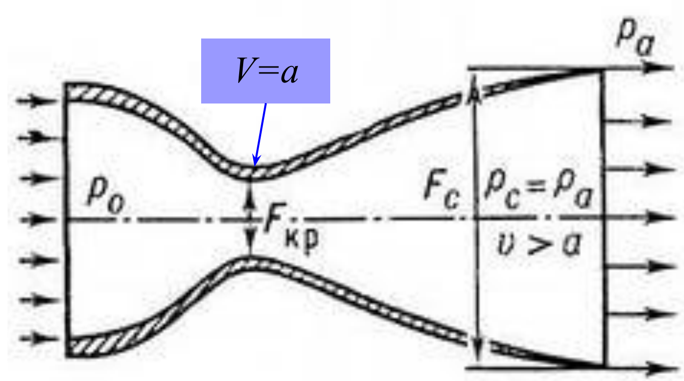
Скорость течения	**Форма канала**		**Наименование, изменение** ***p***
	$M < 1$	$M > 1$	
Возрастает			Конфузор или сопло (давление уменьшается)
Убывает			Диффузор (давление возрастает)

7.2.СВЕРХЗВУКОВОЕ СОПЛО (СОПЛО ЛАВАЛЯ)

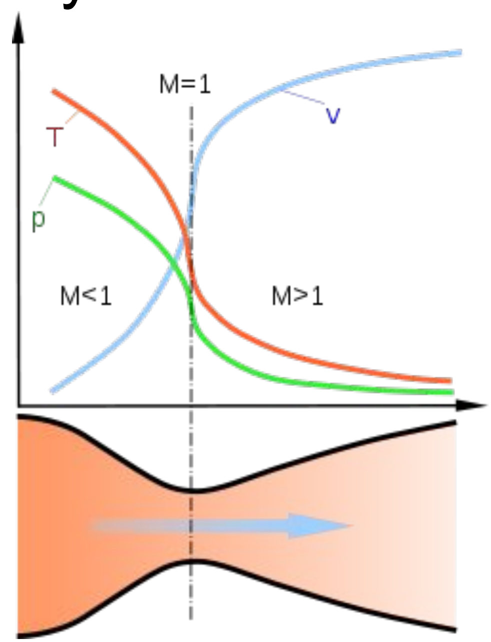
- Сверхзвуковое сопло, называемое соплом Лаваля, имеет форму насадка, вначале сужающегося, для того чтобы увеличить скорость от $V_0 = 0$ (внутри резервуара, камеры сгорания) до $V = a$ (в наиболее узком сечении – *критическом*), затем – расширяющегося – для обеспечения дальнейшего увеличения сверхзвуковой скорости.



Дозвуковое сопло



Сверхзвуковое сопло – сопло Лаваля



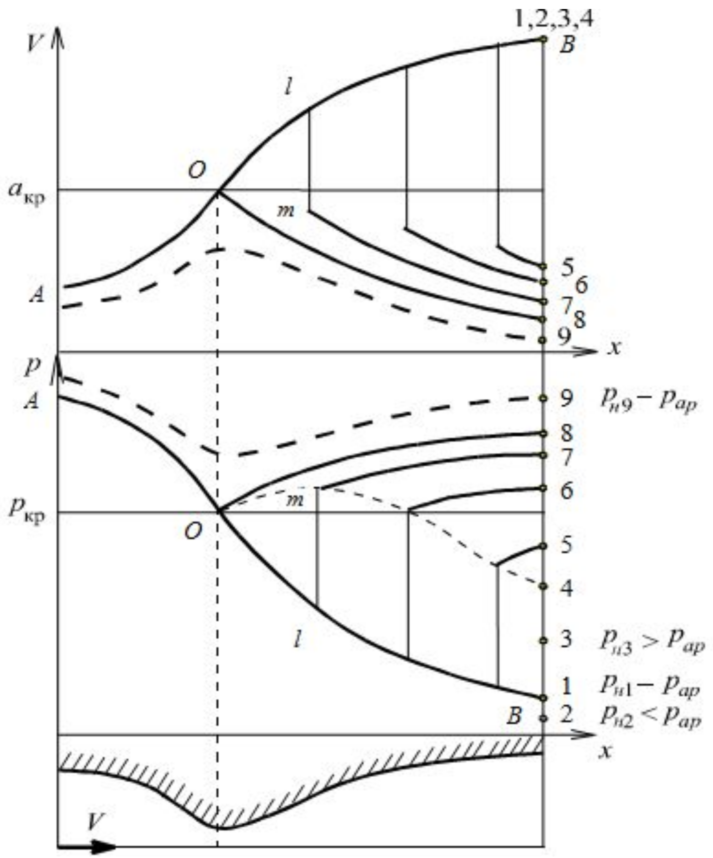
- Т.к. площадь поперечного сечения струи связана со скоростью течения газа, то зависимость отношения площадей от числа Маха для сопла Лаваля показывает, что при изоэнтропическом течении газа число Маха, которое необходимо получить в данном сечении, зависит только от отношения площадей и физических свойств газа (строения его молекулы).

$$\frac{F_{\text{кр}}}{F} = \mathrm{M}\left(\frac{k+1}{2+(k-1)\mathrm{M}^2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

- Таким образом можно найти число Маха в любом сечении сопла. Затем при помощи газодинамических функций и соответствующих параметров торможения можно рассчитать p, ρ, T , а также величину скорости течения в этом сечении (в т.ч. и на срезе сопла).

7.3.РЕЖИМЫ РАБОТЫ СВЕРХЗВУКОВОГО СОПЛА

- Характер распределения параметров течения газа в сопле зависит от степени нерасчетности струи *n*, равной отношению давления на выходе из сопла p_a к давлению окружающей среды $p_н$ $(n = p_a / p\ )$. В зависимости от величины нерасчетности *n* сопло может работать в следующих режимах: расчетном, недорасширения и перерасширения.
- Расчетный режим – давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды: $p_a = p\ \ (n = 1)$.
- Режим недорасширения – давление на срезе сопла больше давления окружающей среды: $p_a > p$ ($n > 1$). Характер изменения скорости и давления газа в тракте сопла на этом режиме совпадает с расчетным.

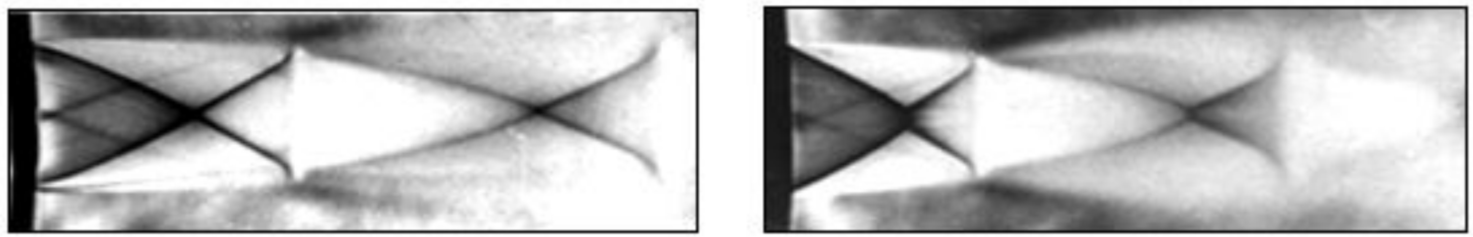


- **Режим перерасширения** – давление на срезе сопла меньше давления окружающей среды: $p_a < p$ $(n<1)$. До некоторого предела повышение $p_н$ не влияет на течение по соплу, которое остается расчетным. Такое истечение возможно лишь при $p_н < 2,5 p_a$ $(0,4 < n < 1)$ - **перерасширение без отрыва** потока от стенок сопла.

При значительном противодавлении среды $(n < 0,4)$ поток отрывается от стенок сопла. Место отрыва приближается к критическому сечению по мере уменьшения степени нерасчетности – **перерасширение с отрывом** потока.

7.4.Истечение из сопла на режиме перерасширения

- без отрыва потока от стенок сопла



- с отрывом потока от стенок сопла