

**Одномерные изоэнтропические
течения газа**

Лекция 6

- Сжатие (расширение) газа сопровождается повышением (понижением) давления - газ обладает свойствами упругого тела. Местное уплотнение малой интенсивности ($\partial\rho/\rho \ll 1$, $\partial p/p \ll 1$) будет распространяться в виде волны возмущения с некоторой скоростью. Такую же природу имеет звуковая волна, представляющая собой продольные волны малой интенсивности.
- Поэтому **скорость распространения любых малых возмущений в газе равна скорости звука.**

6.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. СКОРОСТЬ ЗВУКА

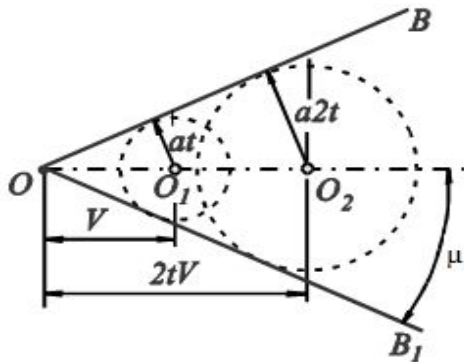
- Если газ покоится ($V = 0$), то возмущения в моменты времени t_1, t_2, t_3 и т. д. образуют ряд концентрических сферических волн с центрами в точке O и радиусом от нуля до at_i на рассматриваемом отрезке времени.



При движении точечного источника возмущений с дозвуковой скоростью $V < a$ сферические волны смещаются в сторону движения источника, но опережают его, т.е. источник находится внутри вызванной им сферической волны.

- При звуковой скорости источника передний край волны возмущения и положение источника совпадают

- Когда скорость источника возмущений становится больше скорости распространения волн ($V > a$), тело обгоняет волны, оставляя их позади себя в виде расширяющегося конуса, вершиной которого является само тело. **Возмущения при сверхзвуковых скоростях навстречу потоку не распространяются**, т.е. не проникают вперед в невозмущенную область.



Этот конус является огибающей сферических волн возмущений и называется **конусом возмущения**, или **конусом Маха**.

- На плоскости, проходящей через ось конуса, получаем прямые OB и OB_1 , называемые **линиями слабых возмущений** (**линиями Маха**) - ударные волны бесконечно малой интенсивности.

- Угол μ , равный половине угла при вершине конуса, называют *углом возмущений* $\sin \mu = \frac{at}{Vt} = \frac{a}{V}$, $\sin \mu = \frac{1}{M}$

- При увеличении числа M угол μ уменьшается, т. е. зона возмущений сужается ($M \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$).

- Скорость звука определяется как $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$.

- Т.е. скорость звука зависит от закона, связывающего изменение давления с изменением плотности.

Для изэнтропического процесса

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Для воздуха $k = 1,4, R=287$ Дж/кг/К

$$a = 20 \sqrt{T} \text{ (м/с)}$$

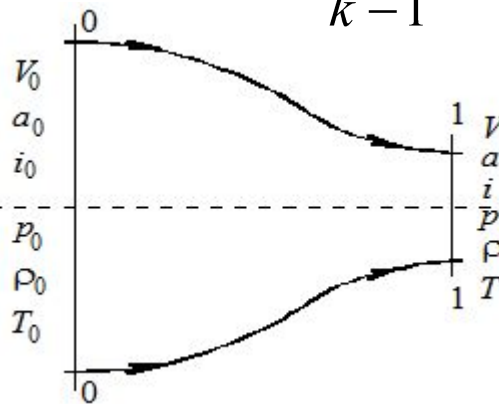
6.2. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ

ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ГАЗА

- Изоэнтропическое течение газа вдоль трубки тока.

Уравнение Бернулли $\frac{V_0^2}{2} + i_0 = \frac{V^2}{2} + i$ при $V_0 = 0$ $i_0 = i + \frac{V^2}{2}$

или $\frac{k}{k-1} RT_0 = \frac{k}{k-1} RT + \frac{V^2}{2}$



газа, соответствующие состоянию покоя, **параметрами изоэнтропического потока** или **параметрами**.

- Давление p_0 называют еще **полным давлением**.

При торможении газа происходит повышение темпера-

туры, равное $\Delta T = T_0 - T = \frac{k-1}{2k} \frac{V^2}{R}$; для воздуха $\Delta T \approx \frac{V^2}{2009}$

- Все теплосодержание i_0 переходит в кинетическую энергию $V_{\max}^2 / 2$ при расширении газа до абсолютного вакуума ($p = 0$) – поток достигает **теоретической максимальной скорости течения газа** $V_{\max} = \sqrt{2i_0}$

$$V_{\max} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}$$

- Т.к. при изэнтропическом течении идеального газа

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} \text{ и } \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0}, \text{ то } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \text{ и } \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

- Формулы для расчета p , ρ , T при изэнтропическом течении газа:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} ;$$

- При изоэнтропическом течении газа увеличение его кинетической энергии может происходить только при понижении теплосодержания (потенциальной энергии), при этом p , ρ , T - уменьшаются

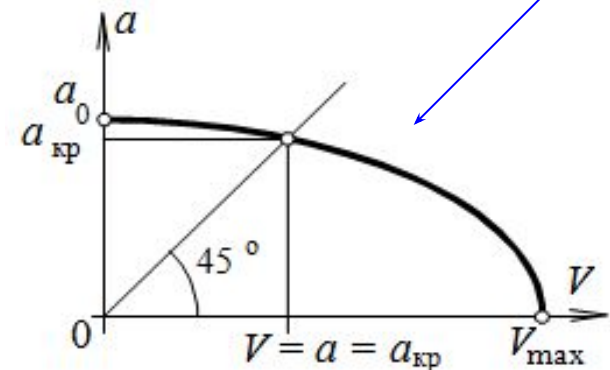
При изоэнтропическом (или адиабатическом) течении газа с ростом скорости происходит расширение газа

- Т.к. $\frac{T}{T_0} = \frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}$, то можно записать $\frac{a^2}{a_0^2} + \frac{V^2}{V_{\max}^2} = 1$

- Местная скорость потока, равная местной скорости звука, называется **критической** $V = a = a_{\text{кр}}$

- Сечение струи газа, в котором достигается это условие, называют **критическим**

Изоэнтропический эллипс



- Параметры состояния газа в этом сечении также называются критическими $p_{кр}$, $\rho_{кр}$, $T_{кр}$.

$$a_{кр}^2 = \frac{k-1}{k+1} V_{\max}^2; \quad a_{кр}^2 = \frac{k-1}{k+1} 2i_0 = \frac{2k}{k+1} RT_0 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad a_{кр}^2 = \frac{2}{k+1} a_0^2$$

$$T_{кр} = \frac{2}{k+1} T_0.$$

$$\rho_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \rho_0$$

$$p_{кр} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} p_0$$

- В аэродинамике удобнее пользоваться формулами для определения параметров не через V_{\max} , а через число Маха. В газовой динамике – через коэффициент скорости

$$\lambda = \frac{V}{a_{кр}}$$

$$(A) \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

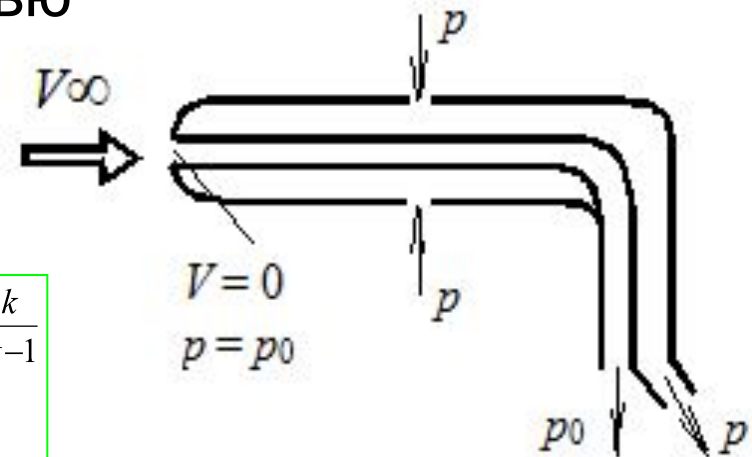
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2.$$

Скорость потока, V	0	дозвук	$a_{кр}$	сверхзвук	V_{max}
Число Маха, M	0	$0 < M < 1$	1	$1 < M < \infty$	∞
Коэффициент скорости, λ	0	$0 < \lambda < 1$	1	$1 < \lambda < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$	$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

Формула (А) имеет большое практическое значение для нахождения числа M в дозвуковом потоке. Определяя экспериментально давление торможения p_0 и статическое давление в потоке p с помощью специального насадка – трубки Пито–Прандтля, по формуле (А) можно рассчитать число Маха набегающего потока

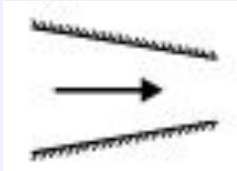
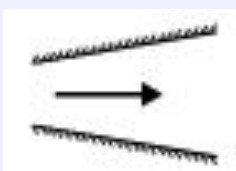
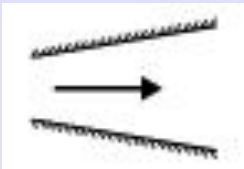
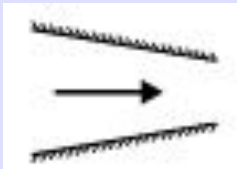
$$(A) \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$



7.1. СВЯЗЬ МЕЖДУ СКОРОСТЬЮ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ФОРМОЙ ЕГО СТРУИ

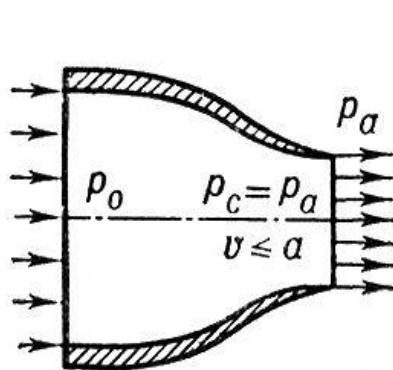
- Уравнение неразрывности для установившегося движения идеальной жидкости в трубке тока в форме массового расхода $\rho VF = \text{const}$ после дифференцирования примет вид
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dF}{F} = 0$$
- Из уравнения Бернулли и формулы для скорости звука
$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V^2}{a^2} \frac{dV}{V}$$
- Следовательно $\frac{dF}{F} = -\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \frac{dV}{V}$ или
$$\frac{dF}{F} = -(1 - M^2) \frac{dV}{V}$$
- 1. Если $V < a$, т. е. $(1 - M^2) > 0$, то $dF \sim -dV$. В дозвуковом потоке скорость газа меняется так же, как и в потоке несжимаемой жидкости: с увеличением площади поперечного сечения F скорость V убывает и наоборот

- 2. Если $V > a$, т. е. , то $dF \sim dV$. С увеличением F скорость V также увеличивается, а с уменьшением F – уменьшается.
- 3. При $V = a$ $dF = 0$. При непрерывном изменении скорости течения это условие может быть реализовано только в экстремальном, а именно в минимальном, сечении потока.

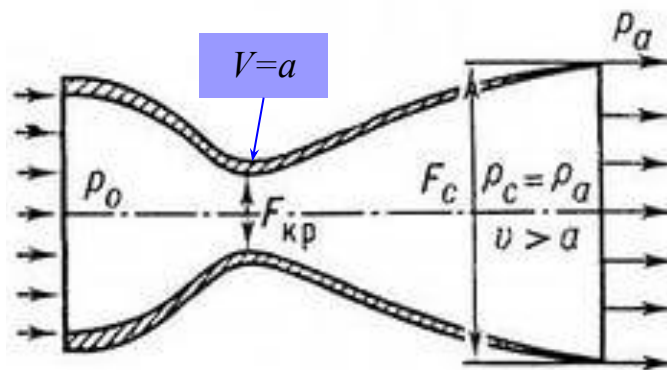
Скорость течения	Форма канала		Наименование, изменение p
	$M < 1$	$M > 1$	
Возрастает			Конфузор или сопло (давление уменьшается)
Убывает			Диффузор (давление возрастает)

7.2. СВЕРХЗВУКОВОЕ СОПЛО (СОПЛО ЛАВАЛЯ)

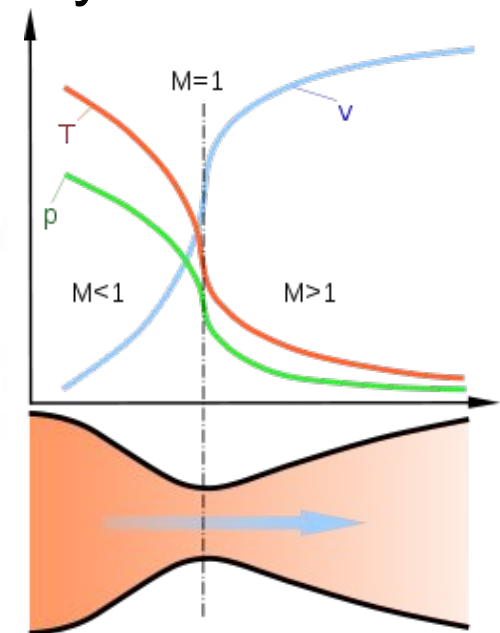
- Сверхзвуковое сопло, называемое **соплом Лавалья**, имеет форму насадка, вначале сужающегося, для того чтобы увеличить скорость от $V_0 = 0$ (внутри резервуара, камеры сгорания) до $V = a$ (в наиболее узком сечении – **критическом**), затем – расширяющегося – для обеспечения дальнейшего увеличения сверхзвуковой скорости.



Дозвуковое сопло



Сверхзвуковое сопло – сопло Лавалья



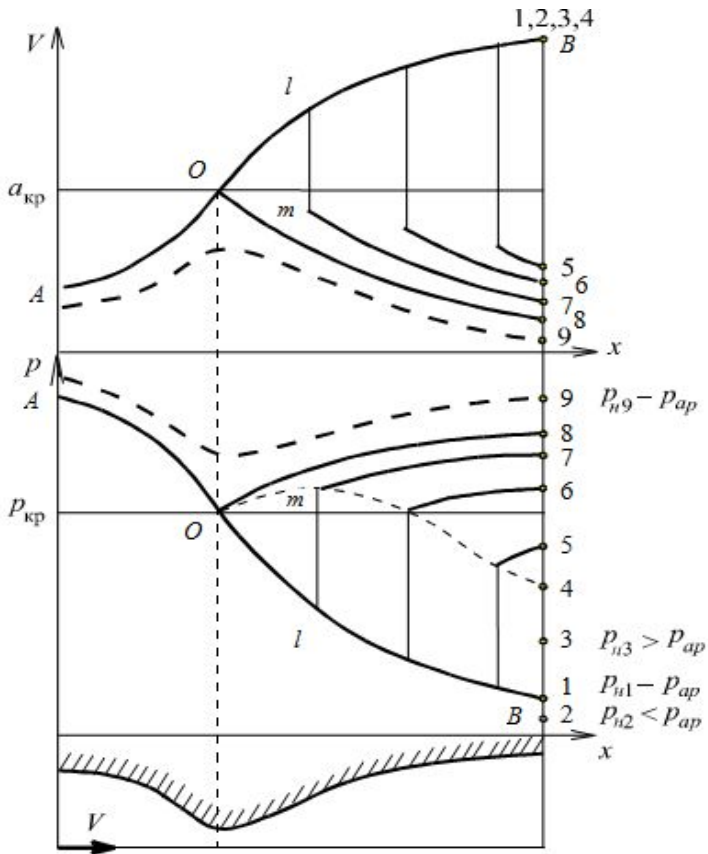
- Т.к. площадь поперечного сечения струи связана со скоростью течения газа, то зависимость отношения площадей от числа Маха для сопла Лавалья показывает, что при изоэнтропическом течении газа **число Маха**, которое необходимо получить в данном сечении, **зависит только от отношения площадей и физических свойств газа** (строения его молекулы).

$$\frac{F_{кр}}{F} = M \left(\frac{k+1}{2+(k-1)M^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

- Таким образом можно найти число Маха в любом сечении сопла. Затем при помощи газодинамических функций и соответствующих параметров торможения можно рассчитать p , ρ , T , а также величину скорости течения в этом сечении (в т.ч. и на срезе сопла).

7.3. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СВЕРХЗВУКОВОГО СОПЛА

- Характер распределения параметров течения газа в сопле зависит от степени нерасчетности струи n , равной отношению давления на выходе из сопла p_a к давлению окружающей среды p_n ($n = p_a / p$). В зависимости от величины нерасчетности n сопло может работать в следующих режимах: расчетном, недорасширения и перерасширения.
- **Расчетный режим** – давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды: $p_a = p$ ($n = 1$).
- **Режим недорасширения** – давление на срезе сопла больше давления окружающей среды: $p_a > p$ ($n > 1$). Характер изменения скорости и давления газа в тракте сопла на этом режиме совпадает с расчетным.

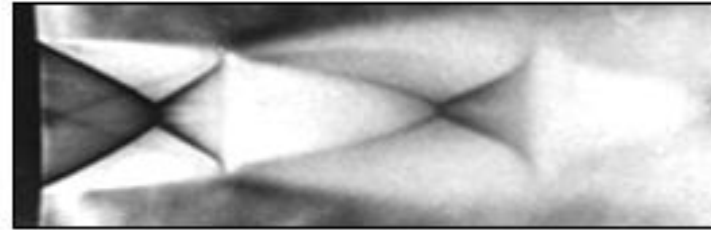
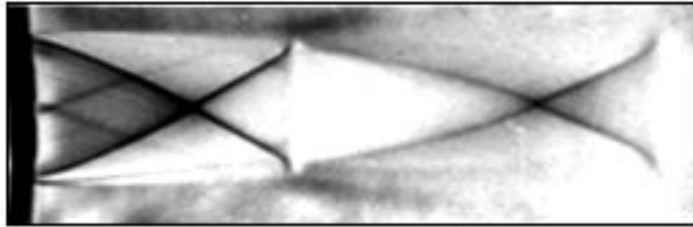


- **Режим перерасширения** – давление на срезе сопла меньше давления окружающей среды: $p_n < p$ ($n < 1$). До некоторого предела повышение p_n не влияет на течение по соплу, которое остается расчетным. Такое истечение возможно лишь при $p_n < 2,5 p_a$ ($0,4 < n < 1$) - **перерасширение без отрыва** потока от стенок сопла.

При значительном противодавлении среды ($n < 0,4$) поток отрывается от стенок сопла. Место отрыва приближается к критическому сечению по мере уменьшения степени нерасчетности – **перерасширение с отрывом** потока.

7.4.Истечение из сопла на режиме перерасширения

- без отрыва потока от стенок сопла



- с отрывом потока от стенок сопла

