Исследование функций и построение графиков

§7. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** (***неубывающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** (***невозрастающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется убывающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует меньшее значение функции.

Интервалы возрастания и убывания функции называются ***интервалами монотонности функции***.

ТЕОРЕМА 1(необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции).

Пусть $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*

1) *если* $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на* $(a;b)$, *то на этом интервале ее производная неотрицательна (неположительна)*, т.е. $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a;b)$ ($f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a;b)$);

(необходимое условие возрастания (убывания) функции)

2) *если* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a;b)$ ($f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;b)$), *то функция* $y = f(x)$ *на* $(a;b)$ *возрастает (убывает).*

(достаточное условие возрастания (убывания) функции)

2. Экстремумы функции

Пусть $x_0 \in D(f)$, x_0 – внутренняя точка $D(f)$ (т.е. существует некоторая окрестность точки x_0, целиком лежащая во множестве $D(f)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точка x_0 называется* ***точкой максимума функции*** $f(x)$ *если существует такая* δ*-окрестность* $U(x_0,\delta)$ *точки* x_0, *что* $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$.

Значение функции точке максимума называется ***максимумом функции***.

Точка x_0 называется ***точкой минимума функции*** $f(x)$ *если существует такая* δ*-окрестность* $U(x_0,\delta)$ *точки* x_0, *что*

$$f(x) > f(x_0)\ ,\quad \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Значение функции точке минимума называется ***минимумом функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

Исследование функций на монотонность и нахождение точек экстремумов

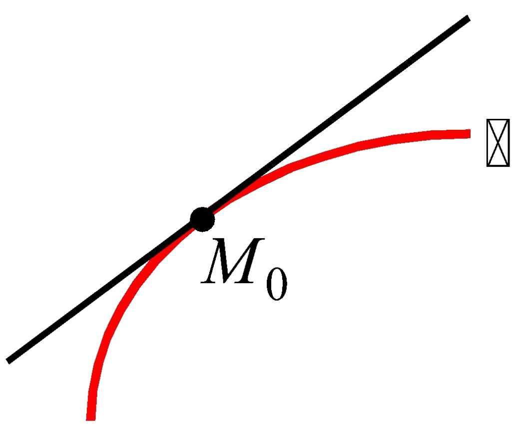
$$y = \frac{5x}{4 - x^2} \quad y = \ln(4 - x^2) \quad y = \frac{(x+3)^2}{x-4} \quad y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

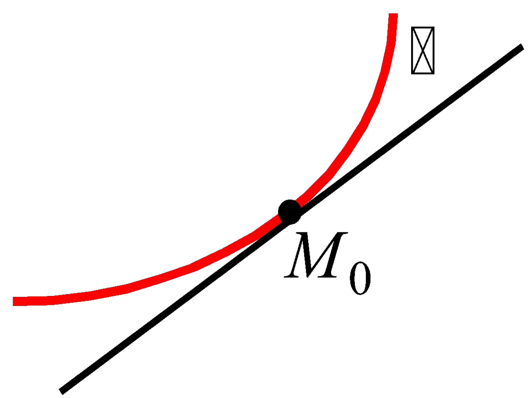
3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* ℓ *– кривая,* M_0 *– точка кривой, причем в* M_0 *существует невертикальная касательная к* ℓ.

Кривую ℓ *называют* ***выпуклой в точке*** $\boldsymbol{M_0}$, *если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к* ℓ *в точке* M_0.

Кривую ℓ *называют* ***вогнутой в точке*** $\boldsymbol{M_0}$, *если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к* ℓ *в точке* M_0.

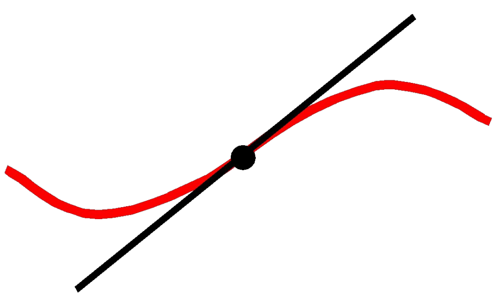


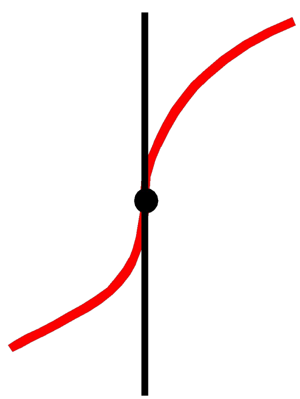


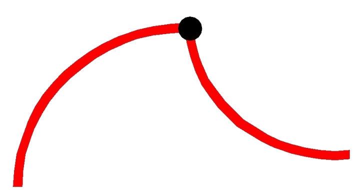
Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются ***точками перегиба*** *кривой.*

Замечания.

1) Выпуклость и вогнутость кривой в точке – локальные понятия. Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания. В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.
2) В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).







Исследование функций на выпуклость и вогнутость

$$y = \frac{5x}{4 - x^2} \quad y = \ln(4 - x^2) \quad y = \frac{(x+3)^2}{x-4} \quad y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

4. Асимптоты кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямая* ℓ *называется* ***асимптотой*** *кривой, если при неограниченном удалении точки М кривой от начала координат расстояние от точки М до прямой* ℓ *стремится к нулю.*

Выделяют 3 вида асимптот: горизонтальные, вертикальные и наклонные.

Условием существования вертикальной асимптоты является наличие у функции точек разрыва второго рода, или существование бесконечного предела в граничной конечной точке области определения.

ТЕОРЕМА 8 (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой кривой* $y = f(x) \Leftrightarrow$ *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = b$$

$$\left(\text{или} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = b\right).$$

Замечания.

1) Из теоремы 8 следует, что график функции $y = f(x)$ может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности $+\infty$ или $-\infty$.

   Причем, наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при $x \to +\infty$) и для левой ветви (т.е. при $x \to -\infty$).

2) Если $$\lim_{x\to+(-)\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+(-)\infty} f(x) = b,$$
   то наклонная асимптота имеет уравнение $y = b$, т.е. является горизонтальной.

ТЕОРЕМА 9 (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $x = a$ *является вертикальной асимптотой кривой* $y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ *точка* $x = a$ *является точкой разрыва* II *рода функции* $y = f(x)$, *причем, хотя бы один из односторонних пределов* $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ *равен бесконечности*.

Найти асимптоты функций

$y = \frac{5x}{4 - x^2}$ $\quad y = \ln(4 - x^2)$ $\quad y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$ $\quad y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

ПОЛНАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность/нечетность.
3. Исследовать функцию на периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва функции (если существуют). Если имеются точки разрыва второго рода, то сделать вывод о существовании асимптот и написать их уравнения.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
6. Исследовать функцию с помощью первой производной: на монотонность и локальные экстремумы.
7. Исследовать функцию с помощью второй производной: на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.
8. Записать множество значений функции.
9. Построить график функции.

$$y = \frac{5x}{4 - x^2} \qquad y = \ln(4 - x^2) \qquad y = \frac{(x+3)^2}{x-4} \qquad y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

ИДЗ 6.4

2. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

$$\textbf{2.30.}\quad y = \frac{5x}{4 - x^2}.$$

3. Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

$$\textbf{3.30.}\quad y = \ln(4 - x^2).$$

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

$$\textbf{4.30.}\quad y = x^4/4 - 6x^3 + 7,\ [16;\ 20].$$