Дисциплина: Системы автоматического управления полетом

РАЗДЕЛ 1. ВОЗДУШНОЕ СУДНО КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ.

Тема 1. Основные положения динамики управления полетом

ЛЕКЦИЯ № 5 УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Учебные вопросы:

1 Кинематические уравнения движения самолета.

2 Нелинейная модель пространственного движения самолета.

3 Разделение пространственного движения самолета на продольное и боковое.

Задание на самостоятельную работу:

[1] Вавилов Ю.А. Системы автоматического управления полетом. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А Гагарина, 2009. с. 19…22, 24...32.

[2] Мигунов А.И., Иванов Р.В., Серов А.Н. Системы автоматического управления полетом. Электронный учебник. ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. Л-5, тематический план, учебная программа

[3] Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И. Системы автоматического управления летательных аппаратов. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986. с. 17…24.

[7] Кичигин Е.К., Демчук В.А., Лущик А. В., Агеев А.М. Системы автоматического управления полетом. Ч. 1: Учебное пособие. -Воронеж: ВАИУ, 2011. с. 9…13.

Вопрос №1
Кинематические уравнения движения самолета

На предыдущей лекции были получены **нелинейные динамические уравнения пространственного движения** самолета как ТТ в связанной СК:

$$m\left(\begin{bmatrix}\dot{V}_x\\ \dot{V}_y\\ \dot{V}_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{bmatrix}$$

$$I_x\dot{\omega}_x+\omega_y\omega_z\left(I_z-I_y\right)=M_x;$$

$$I_y\dot{\omega}_y+\omega_x\omega_z\left(I_x-I_z\right)=M_y;$$

$$I_z\dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y\left(I_y-I_x\right)=M_z.$$

В результате решения этих дифференциальных уравнений можно получить текущие значения линейной земной скорости $\vec{V}_K$ и угловой скорости движения $\vec{\omega}$ ЛА в проекциях на оси связанной СК.

Кроме векторов управления и возмущения необходимо иметь значения углов Эйлера ϑ, γ, ψ, атаки α, скольжения β, скорости (воздушной) $\vec{V}$, высоты полета H самолета, а также, угол наклона траектории θ и путевой угол Ψ.
Они вычисляются по кинематическим уравнениям движения и уравнений связи.

<u>Кинематическими называют уравнения</u>, которые связывают кинематические параметры движения тела ($\vec{V}, \vec{\omega}$) с параметрами его положения $L, H, Z, \psi, \gamma, \vartheta$ в данном случае нормальной земной СК (инерциальной) $0_o X_g Y_g Z_g$.

Кинематические уравнения поступательного движения определяют положение ЦМ ЛА в пространстве (в нормальной земной СК) и имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_g \\ \dot{Y}_g \\ \dot{Z}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{H} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{Xg} \\ W_{Yg} \\ W_{Zg} \end{bmatrix} = M_{gc} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \left(M_\gamma M_\vartheta M_\psi \right)^T \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

В развернутом виде

$$\begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{H} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \begin{matrix}\sin\psi\sin\gamma - \\ -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\psi\cos\gamma + \\ +\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma\end{matrix} \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \begin{matrix}\cos\psi\sin\gamma + \\ +\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma\end{matrix} & \begin{matrix}\cos\psi\cos\gamma - \\ -\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma\end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} \qquad (2)$$

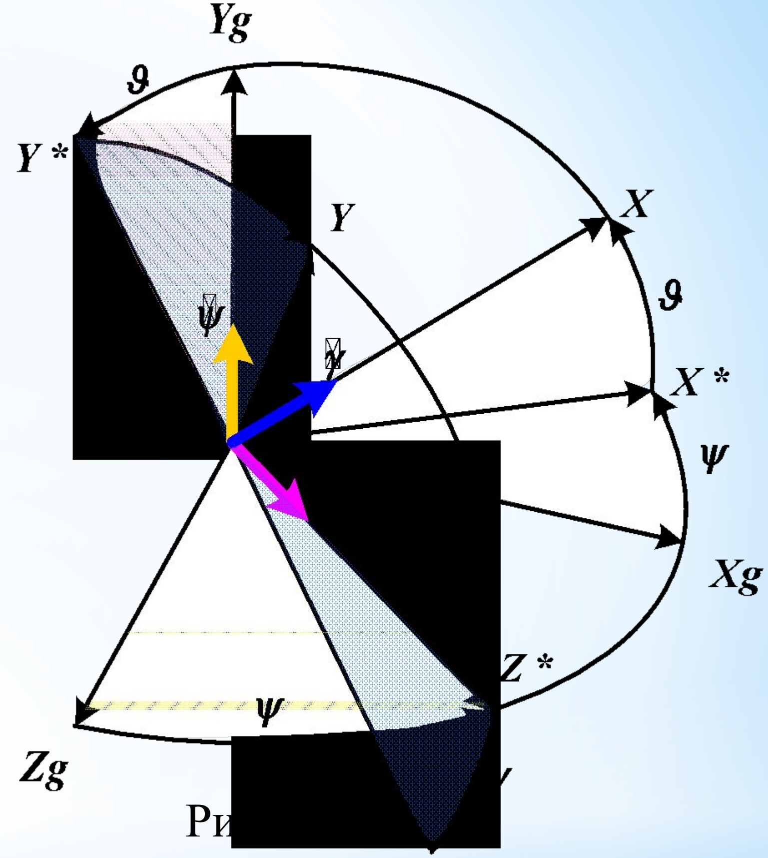
Для определения ***угловых параметров движения Ψ, θ*** самолета относительно Земли представим вектор земной скорости $\vec{W}$, в проекциях на оси нормальной СК $OX_gY_gZ_g$:

$$\begin{bmatrix} W_{xg} \\ W_{yg} \\ W_{zg} \end{bmatrix}_g = M_{gc}(\psi,\vartheta,\gamma)\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}_c = M_{gk}(\Psi,\theta)\begin{bmatrix} W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k = W\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi \\ \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\Psi \end{bmatrix}_g$$

Кинематические уравнения поступательного движения <u>в векторно-матричной форме</u>

$$M_{gk} = (M_\theta M_\Psi)^T = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi & \sin\theta & -\sin\Psi\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\Psi & \cos\theta & \sin\theta\sin\Psi \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix}^T \qquad M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad M_\Psi = \begin{bmatrix} \cos\Psi & 0 & -\sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Для определения параметров углового положения самолета - углов $\vartheta,\ \gamma,\ \psi$ пространственной ориентации самолета (связанной СК) воспользуемся следующими соображениями. Последовательно поворачивая нормальную СК $OX_gY_gZ_g$ относительно OY_g, OZ^*, OX осей соответственно на углы $\vartheta,\ \gamma,\ \psi$ ее можно совместить со связанной СК $OXYZ$

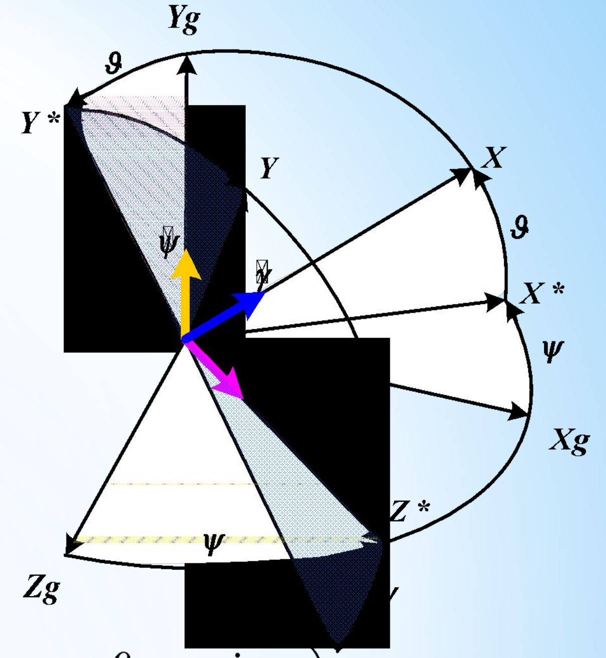


Ри[redacted]

Очевидно, что угловые скорости $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$, направленные вдоль осей OY_g, OZ^*, OX, являются проекциями угловой скорости $\vec{\omega}$ ЛА относительно нормальной СК.

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\vartheta}} + \dot{\vec{\gamma}}$$

Проецируя это векторное выражение на оси связанной СК, получим:



$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = M_\gamma\begin{bmatrix}\dot{\gamma}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + M_\gamma M_\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\vartheta}\end{bmatrix} + M_\gamma M_\vartheta M_\psi\begin{bmatrix}0\\ \dot{\psi}\\ 0\end{bmatrix},$$

$$M_\gamma = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix};\quad M_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta & 0\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad M_\psi = \begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix} \qquad (4)$$

В результате имеем ***кинематические уравнения вращательного движения*** **самолета**:

$$\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta$$

$$\omega_y = \dot{\vartheta}\sin\gamma + \dot{\psi}\cos\gamma\cos\vartheta$$

$$\omega_z = \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\sin\gamma\cos\vartheta$$

Вопрос №2
Нелинейная модель пространственного движения самолета

Динамические уравнения поступательного движения

$$m\left(\begin{bmatrix}\dot{V}_{Kx}\\ \dot{V}_{Ky}\\ \dot{V}_{Kz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{Kx}\\ V_{Ky}\\ V_{Kz}\end{bmatrix}\right)=M_{ca}(\alpha,\beta)\begin{bmatrix}-X_a\\ Y_a\\ Z_a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\\ P_z\end{bmatrix}+M_{cg}(\psi,\vartheta,\gamma)\begin{bmatrix}0\\ -G\\ 0\end{bmatrix} \qquad (5)$$

Динамические уравнения вращательного движения

$$\begin{aligned}
&I_x\dot{\omega}_x+\omega_y\omega_z\left(I_z-I_y\right)=M_x+M_{Px};\\
&I_y\dot{\omega}_y+\omega_x\omega_z\left(I_x-I_z\right)=M_y+M_{Py};\\
&I_z\dot{\omega}_z+\omega_x\omega_y\left(I_y-I_x\right)=M_z+M_{Pz},
\end{aligned} \qquad (6)$$

Кинематические уравнения вращательного движения самолета

$$\omega_x=\dot{\gamma}+\dot{\psi}\,sin\vartheta$$

$$\omega_y=\dot{\vartheta}\,sin\gamma+\dot{\psi}\,cos\gamma\,cos\vartheta$$

$$\omega_z=\dot{\vartheta}\,cos\gamma-\dot{\psi}\,sin\gamma\,cos\vartheta$$

Кинематические уравнения поступательного движения

$$\begin{bmatrix}W_{xg}\\ W_{yg}\\ W_{zg}\end{bmatrix}_g=M_{gc}(\psi,\vartheta,\gamma)\begin{bmatrix}W_x\\ W_y\\ W_z\end{bmatrix}_c=M_{gk}(\Psi,\theta)\begin{bmatrix}W\\ 0\\ 0\end{bmatrix}_k=W\begin{bmatrix}cos\theta\,cos\Psi\\ sin\theta\\ -cos\theta\,sin\Psi\end{bmatrix}_g \qquad (7)$$

Приведем эти уравнения к одной форме записи и получим нелинейную математическую модель пространственного движения ВС в общем виде:

Динамические уравнения поступательного движения

$$m\left(\begin{bmatrix}\dot{V}_{Kx}\\ \dot{V}_{Ky}\\ \dot{V}_{Kz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{Kx}\\ V_{Ky}\\ V_{Kz}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}
m(\dot{V}_{Kx}-\omega_z V_{Ky}+\omega_y V_{Kz}) &= F_x\\
m(\dot{V}_{Ky}-\omega_x V_{Kz}+\omega_z V_{Kx}) &= F_y \qquad (9)\\
m(\dot{V}_{Kz}-\omega_y V_{Kx}+\omega_x V_{Ky}) &= F_z
\end{aligned}$$

Динамические уравнения поступательного движения, полученные в проекциях на оси связанной СК *OXYZ,* можно существенно упростить, если записать их в проекциях на оси скоростной СК $OX_aY_aZ_a$.

В скоростной системе координат составляющие скорости V_{Ya} и V_{Za} становятся тождественно равными нулю, а $V_{xa} = V$, где V – модуль скорости.

$$\left.\begin{aligned} m(\dot V_{Kx} - \cancel{\omega_z V_{Ky}} + \cancel{\omega_y V_{Kz}}) &= F_x \\ m(\cancel{\dot V_{Ky}} - \cancel{\omega_x V_{Kz}} + \omega_z V_{Kx}) &= F_y \\ m(\cancel{\dot V_{Kz}} - \omega_y V_{Kx} + \cancel{\omega_x V_{Ky}}) &= F_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{m\dot V = F_{Xa}};\\ &\boldsymbol{mV\omega_{VZa} = F_{Ya}}; \qquad (10)\\ &\boldsymbol{-mV\omega_{VYa} = F_{Za}}. \end{aligned}$$

Здесь, ω_V *- угловая скорость вращения не самого самолета (системы OXYZ), а Скоростной СК* $OX_aY_aZ_a$ *в проекциях на оси* $OX_aY_aZ_a$. Получим кинематические уравнения, устанавливающие взаимосвязь между проекциями ω_V и параметрами движения самолета.

Проекции вектора угловой скорости вращения траекторной СК относительно Земли на оси траекторной СК выглядят следующим образом:

$$\omega_{x_к} = \dot{\Psi} \sin\theta$$

$$\omega_{y_к} = \dot{\Psi} \cos\theta$$

$$\omega_{z_к} = \dot{\theta}$$

$$\boldsymbol{m\dot{V} = F_{Xa};}$$

$$\boldsymbol{mV\omega_{VZa} = F_{Ya};}$$

$$\boldsymbol{-mV\omega_{VYa} = F_{Za}.}$$

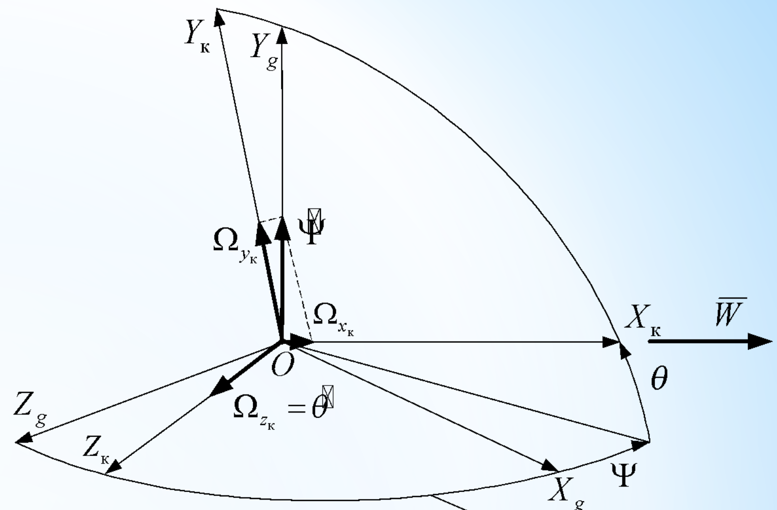


Рис. 2

$$\left.\begin{aligned} & m\dot{V} = F_{Xk} \\ & mV\dot{\theta} = F_{Yk} \\ & -mV\dot{\Psi}\cos\theta = F_{Zk} \end{aligned}\right\}$$ ***Динамические уравнения поступательного движения***

Динамические и кинематические уравнения вращательного движения, по-прежнему, записываются в проекциях на оси Связанной СК *OXYZ*

$$
\left.\begin{aligned}
I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) &= M_x + M_{Px}\\
I_y\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z\left(I_x - I_z\right) &= M_y + M_{Py}\\
I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y\left(I_y - I_x\right) &= M_z + M_{Pz}
\end{aligned}\right\} \quad (11)
$$

Динамические уравнения вращательного движения

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\psi}\, sin\vartheta\\
\omega_y &= \dot{\vartheta}\, sin\gamma + \dot{\psi}\, cos\gamma\, cos\vartheta\\
\omega_z &= \dot{\vartheta}\, cos\gamma - \dot{\psi}\, sin\gamma\, cos\vartheta
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

Кинематические уравнения вращательного движения самолета

Кинематические уравнения поступательного движения

$$\begin{bmatrix} W_{xg} \\ W_{yg} \\ W_{zg} \end{bmatrix}_g = M_{gc}(\psi,\vartheta,\gamma)\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}_c = M_{gk}(\Psi,\theta)\begin{bmatrix} W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k = W\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi \\ \sin\theta \\ -\cos\theta\sin\Psi \end{bmatrix}_g \quad (13)$$

Обозначим проекцию вектора Земной скорости на оси нормальной СК

$W_{xg} = \dot{x}_g$, $W_{yg} \to \dot{y}_g$, $W_{zg} \to \dot{z}_g$, а сам вектор земной скорости W

$$\left.\begin{aligned} x_g &= W\cos\theta\cos\Psi \\ y_g &= W\sin\theta \\ z_g &= -W\cos\theta\sin\Psi \end{aligned}\right\}$$

Т. о. полная система уравнений пространственного движения воздушного судна выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&m\dot{W} = F_{x_к}\\
&mW\dot{\theta} = F_{y_к}\\
&-mW\dot{\Psi}\cos\theta = F_{z_к}\\
&J_x\dot{\omega}_x - \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z = M_x,\\
&J_y\dot{\omega}_y - \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x = M_y,\\
&J_z\dot{\omega}_z - \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y = M_z
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta,\\
&\omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma,\\
&\omega_z = \dot{\vartheta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma\\
&\dot{x}_g = W\cos\theta\cos\Psi;\\
&\dot{y}_g = W\sin\theta;\\
&\dot{z}_g = -W\cos\theta\sin\Psi.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Динамические уравнения поступательного и вращательного движений

Кинематические уравнения вращательного и поступательного движений

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений, необходимо раскрыть структуру проекций сил и моментов , что и будет сделано в дальнейшем при выводе уравнений продольного и бокового движения самолета.

Вопрос №3
Разделение пространственного движения самолета на продольное и боковое.

<u>К ПРОДОЛЬНОМУ ДВИЖЕНИЮ САМОЛЕТА</u> относят движение центра масс в вертикальной плоскости и вращение относительно поперечной связанной оси *OZ* (изменение угла тангажа).
<u>Движение центра масс вдоль осей OX и OY и вращательное движение относительно оси OZ.</u>

<u>К БОКОВОМУ</u> – движение центра масс в плоскости горизонта и угловые движения рыскания (вращение относительно *OY*) и крена (вращение относительно *OX*).
<u>Движение центра масс вдоль оси OZ и вращательное движение относительно осей OX и OY.</u>

Рассмотрение изолированных движений возможно при определенных условиях, поскольку в пространственном движении значительную роль играют некоторые перекрестные связи – аэродинамические, кинематические и инерционные, которые будут рассмотрены в следующей лекции.

Вопросы для подготовки

1. Какие уравнения называются кинематическими?
2. Чем обусловлена необходимость разделения пространственного движения?
3. Какое движение относят к продольному?
4. Какое движение относят к боковому?
5. Природа возникновения аэродинамических перекрестных связей?