

Вычислительная математика

Лекция 6

Темы занятий

□ Алгебра

1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Решение нелинейных алгебраических уравнений.

□ Математический анализ

3. Приближение функций.
4. Вычисление определенных интегралов.
5. Решение дифференциальных уравнений.

Тема 3. Приближение функций

Обобщенная постановка задачи:

□ Дано:

функция

$$y = f(x)$$

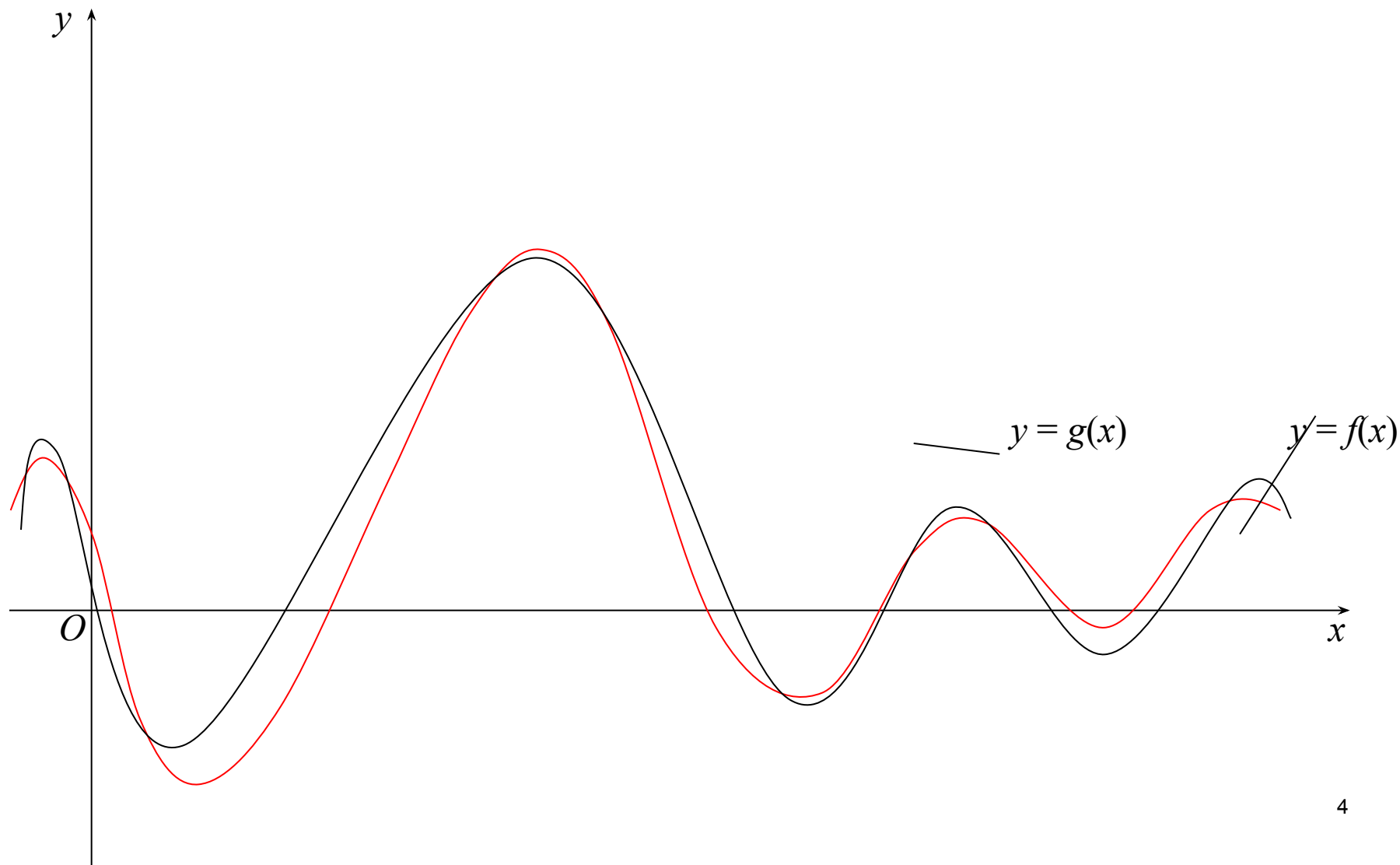
□ Найти:

функцию $y = g(x)$ такую, что $f(x) \approx g(x)$, то есть погрешность приближения $|f(x) - g(x)|$ достаточно мала для всех $x \in [a, b]$.

Нахождение функции $y = g(x)$ называется **задачей аппроксимации** функции $y = f(x)$. Функция $y = g(x)$ называется **аппроксимирующей функцией**.

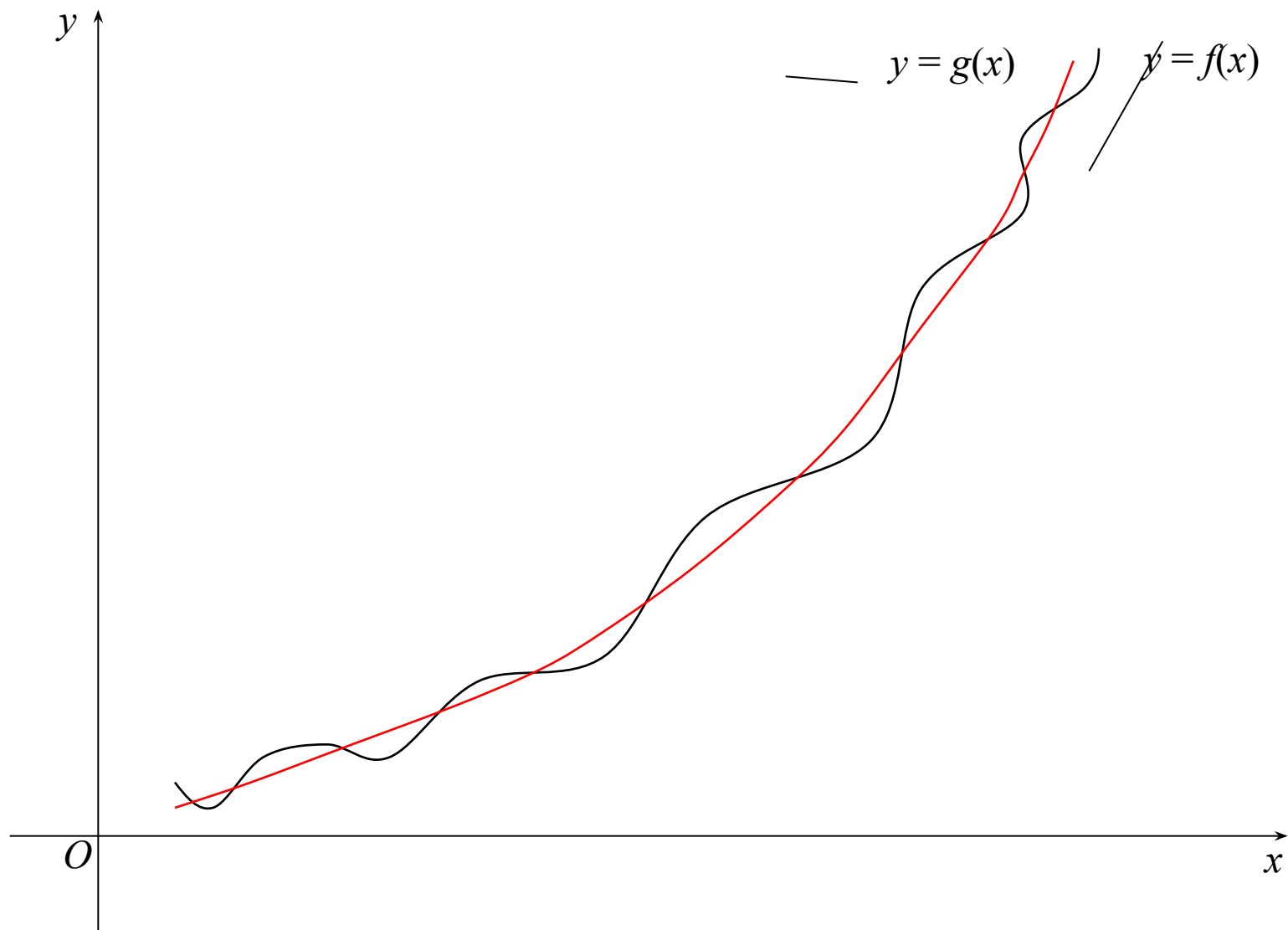
Тема 3. Приближение функций

Геометрический смысл:



Тема 3. Приближение функций

Геометрический смысл:



Тема 3. Приближение функций

Необходимость решения задачи аппроксимации возникает, когда:

- функция $y = f(x)$ задана таблицей своих (в общем случае приближенных) значений:

$$y_i \approx f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

при этом нужно вычислять значения функции $y = f(x)$ в точках $\tilde{x} \neq x_i$ (такая задача возникает при экспериментальном вычислении значений функции $y = f(x)$);

- функция $y = f(x)$ задана сложным аналитическим выражением, затрудняющим вычисления; при этом требуется заменить сложную функцию $y = f(x)$ на более простую функцию $y = g(x)$ (такая задача возникает при необходимости многократного вычисления значений функции $y = f(x)$ или при необходимости выполнения операций над функцией $y = f(x)$, например, дифференцирования или интегрирования).

Тема 3.1 Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Пусть аппроксимирующая функция имеет вид

$$y = Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

где a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) – числовые параметры, значения которых находятся из условия

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n [Q(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2 \rightarrow \min$$

Тогда значения параметров находятся из системы уравнений, полученной из необходимого условия экстремума функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{array} \right.$$

Метод наименьших квадратов

Пусть

$$Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

Тогда

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j x_i^j - y_i \right]^2$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= 2 \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m (a_j x_i^j - y_i) x_i^k \right] = \\ &= 2 \sum_{i=0}^n \left[(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^k \right] = \\ &= 2 \sum_{i=0}^n \left[a_0 x_i^k + a_1 x_i^{k+1} + a_2 x_i^{k+2} + \dots + a_m x_i^{k+m} - y_i x_i^k \right] = \\ &= 2 \left[\left(\sum_{i=0}^n x_i^k \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{k+1} \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{k+m} \right) a_m - \left(\sum_{i=0}^n y_i x_i^k \right) \right]. \end{aligned}$$

Метод наименьших квадратов

Таким образом, получена СЛАУ на нахождение значений параметров a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^m \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3 \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3 \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4 \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2; \\ \dots\dots\dots \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^m \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+2} \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{2m} \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i x_i^m. \end{array} \right.$$

Метод наименьших квадратов

В частном случае при $m = 4$ имеем СЛАУ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^5\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^5\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^6\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^3\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^5\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^6\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^7\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^3; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^4\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^5\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^6\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^7\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^8\right)a_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^4. \end{array} \right.$$

Метод наименьших квадратов

Пусть $m = 1$, $a_0 = b$, $a_1 = k$.

Тогда получим

$$\begin{cases} (n+1)b + \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)k = \sum_{i=0}^n y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)b + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2\right)k = \sum_{i=0}^n y_i x_i. \end{cases}$$

Отсюда

$$k = \frac{c_{11}d_2 - c_{12}d_1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad b = \frac{c_{22}d_1 - c_{12}d_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

где

$$c_{11} = n+1, \quad c_{12} = \sum_{i=0}^n x_i, \quad c_{22} = \sum_{i=0}^n x_i^2, \quad d_1 = \sum_{i=0}^n y_i, \quad d_2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i.$$

Виды эмпирической зависимости

№	Преобразование переменных	Эмпирическая формула
1	$X_i = x_i, \quad Y_i = x_i y_i$	$y = \alpha + \beta/x, \quad \alpha = k, \beta = b$
2	$X_i = x_i, \quad Y_i = 1/y_i$	$y = 1/(\alpha x + \beta), \quad \alpha = k, \beta = b$
3	$X_i = x_i, \quad Y_i = x_i/y_i$	$y = x/(\alpha x + \beta), \quad \alpha = k, \beta = b$
4	$X_i = x_i, \quad Y_i = \ln y_i$	$y = \alpha \beta^x, \quad \alpha = e^b, \beta = e^k$
5	$X_i = \ln x_i, \quad Y_i = y_i$	$y = \alpha \ln x + \beta, \quad \alpha = k, \beta = b$
6	$X_i = \ln x_i, \quad Y_i = \ln y_i$	$y = \alpha x^\beta, \quad \alpha = e^b, \beta = k^{12}$

Метод наименьших квадратов

Пусть

$$Q(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_m \varphi_m(x).$$

Тогда

$$S(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) - y_i \right]^2$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, a_1, \dots, a_m) &= 2 \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^m (a_j \varphi_j(x_i) - y_i) \varphi_k(x_i) \right] = \\ &= 2 \sum_{i=0}^n [(a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + a_2 \varphi_2(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) - y_i) \varphi_k(x_i)] = \\ &= 2 \sum_{i=0}^n [a_0 \varphi_0(x_i) \varphi_k(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) \varphi_k(x_i) + a_2 \varphi_2(x_i) \varphi_k(x_i) + \dots + a_m \varphi_m(x_i) \varphi_k(x_i) - y_i \varphi_k(x_i)] = \\ &= 2 \left[\left(\sum_{i=0}^n \varphi_0(x_i) \varphi_k(x_i) \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i) \varphi_k(x_i) \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_k(x_i) \right) a_m - \left(\sum_{i=0}^n y_i \varphi_k(x_i) \right) \right]. \end{aligned}$$

Метод наименьших квадратов

Таким образом, получена СЛАУ уравнений на нахождение значений параметров a_i ($i = 0, 1, \dots, m$) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=0}^n \varphi_0^2(x_i) \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_2(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_0(x_i); \\ \left(\sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_1^2(x_i) \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_2(x_i) \varphi_1(x_i) \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_1(x_i) \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_1(x_i); \\ \left(\sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_2(x_i) \varphi_1(x_i) \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_2^2(x_i) \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_2(x_i) \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_2(x_i); \\ \dots\dots\dots \\ \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_0(x_i) \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_1(x_i) \right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) \varphi_2(x_i) \right) a_2 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n \varphi_m^2(x_i) \right) a_m = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_m(x_i). \end{array} \right.$$

Метод наименьших квадратов

Например, пусть $m = 2k + 1$ и

$$Q(x, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k) = a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{i=0}^n \cos jx_i \right) + \sum_{j=1}^k b_j \left(\sum_{i=0}^n \sin jx_i \right) = \sum_{i=0}^n y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n \cos px_i \right) a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{i=0}^n (\cos jx_i \cdot \cos px_i) \right) + \sum_{j=1}^k b_j \left(\sum_{i=0}^n (\sin jx_i \cdot \cos px_i) \right) = \sum_{i=0}^n (y_i \cos px_i); \\ \left(\sum_{i=0}^n \sin px_i \right) a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \left(\sum_{i=0}^n (\cos jx_i \cdot \sin px_i) \right) + \sum_{j=1}^k b_j \left(\sum_{i=0}^n (\sin jx_i \cdot \sin px_i) \right) = \sum_{i=0}^n (y_i \sin px_i); \end{cases}$$

$p = 1, 2, \dots, k$

Метод наименьших квадратов

В частном случае при $k = 2$ получим СЛАУ

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \cos x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \cos 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n \sin x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^n \sin 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^n y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n \cos x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \cos^2 x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \cos 2x_i \cos x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n \sin x_i \cos x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^n \sin 2x_i \cos x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^n y_i \cos x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n \cos 2x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \cos x_i \cos 2x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \cos^2 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n \sin x_i \cos 2x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^n \sin 2x_i \cos 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^n y_i \cos 2x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n \sin x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \cos x_i \sin x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \cos 2x_i \sin x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n \sin^2 x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^n \sin 2x_i \sin x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^n y_i \sin x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^n \sin 2x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^n \cos x_i \sin 2x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^n \cos 2x_i \sin 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^n \sin x_i \sin 2x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^n \sin^2 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^n y_i \sin 2x_i; \end{cases}$$

Тема 3.2 Интерполяция

Обобщенная постановка задачи интерполяции:

□ Дано:

значения функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$:

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n \ (x_i \in [a, b]).$$

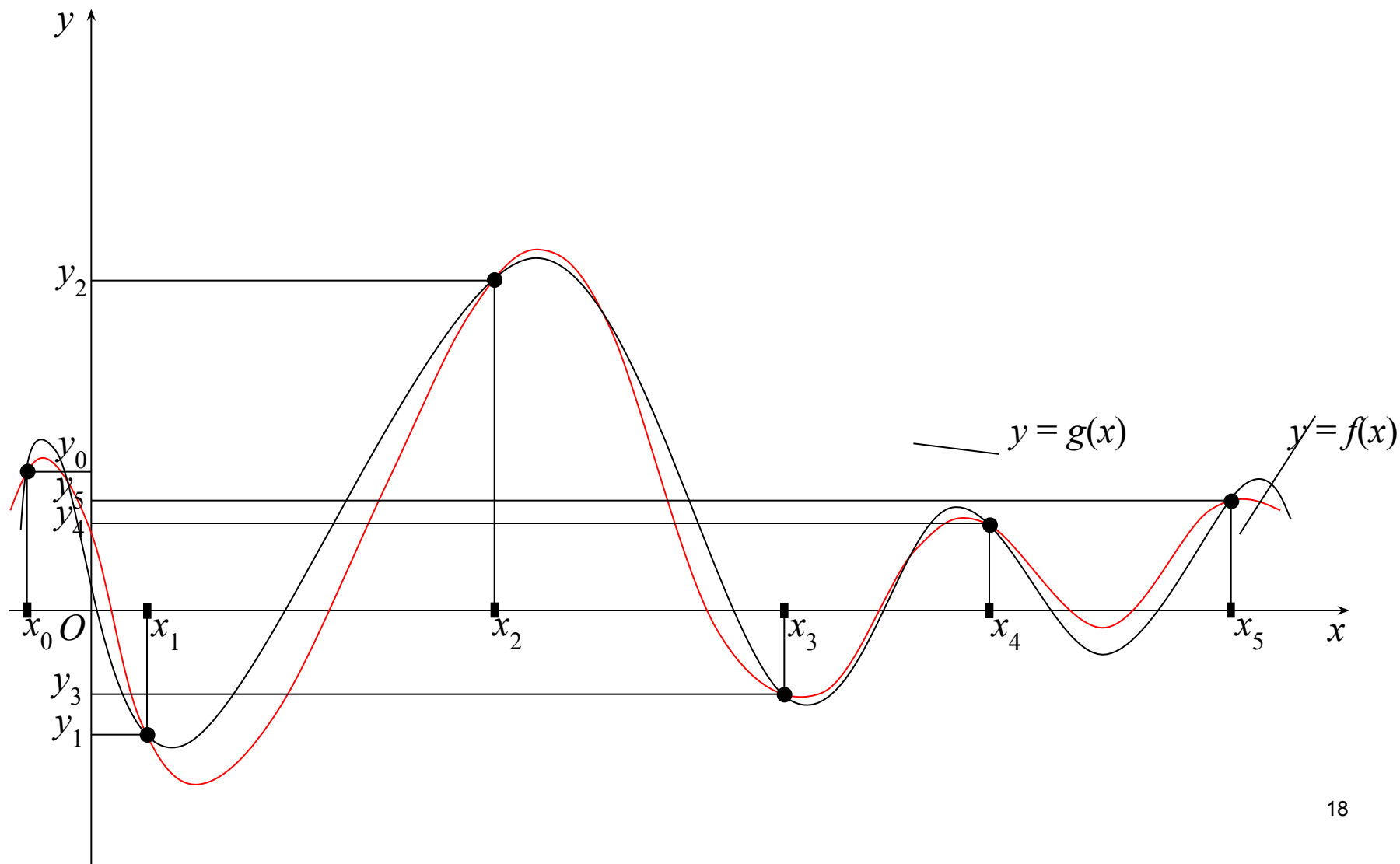
□ Найти:

функцию $y = g(x)$ такую, что

$$g(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Тема 3.2 Интерполяция

Геометрический смысл:



Тема 3.2 Интерполяция

Задача интерполяции обобщенным многочленом:

Пусть задана система функций:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x).$$

Обобщенным многочленом называется функция

$$\Phi_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x),$$

такая, что

$$\Phi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Тема 3.2 Интерполяция

Коэффициенты a_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) находятся из условия:

[illegible]

Для решения СЛАУ необходимо, чтобы для любых x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), $x_i \neq x_j$, $i \neq j$,

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

система функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=0,1,\dots,n}$, удовлетворяющая условию (1), называется **чебышевской системой функций**.

Тема 3.2 Интерполяция

Задача полиномиальной интерполяции:

Пусть задана система функций вида:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^n.$$

Интерполяционным многочленом (полиномом)

называется функция

$$P_n(x) = a_0x + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j,$$

такая, что

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Тема 3.2 Интерполяция

Теорема

Система функций $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ является чебышевской.

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 - \text{определитель Вандермонда.}$$

Тема 3.2.1 Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

имеет следующий вид:

$$L_n(x) = y_0 P_n^0(x) + y_1 P_n^1(x) + y_2 P_n^2(x) + \dots + y_n P_n^n(x),$$

где многочлен степени n такой, что $P_n^j(x_i) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

Многочлен $P_n^i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$

$$P_n^i(x_i) = 1 \Rightarrow C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$P_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Тема 3.2.1 Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

Общая формула:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i P_n^i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Частные случаи:

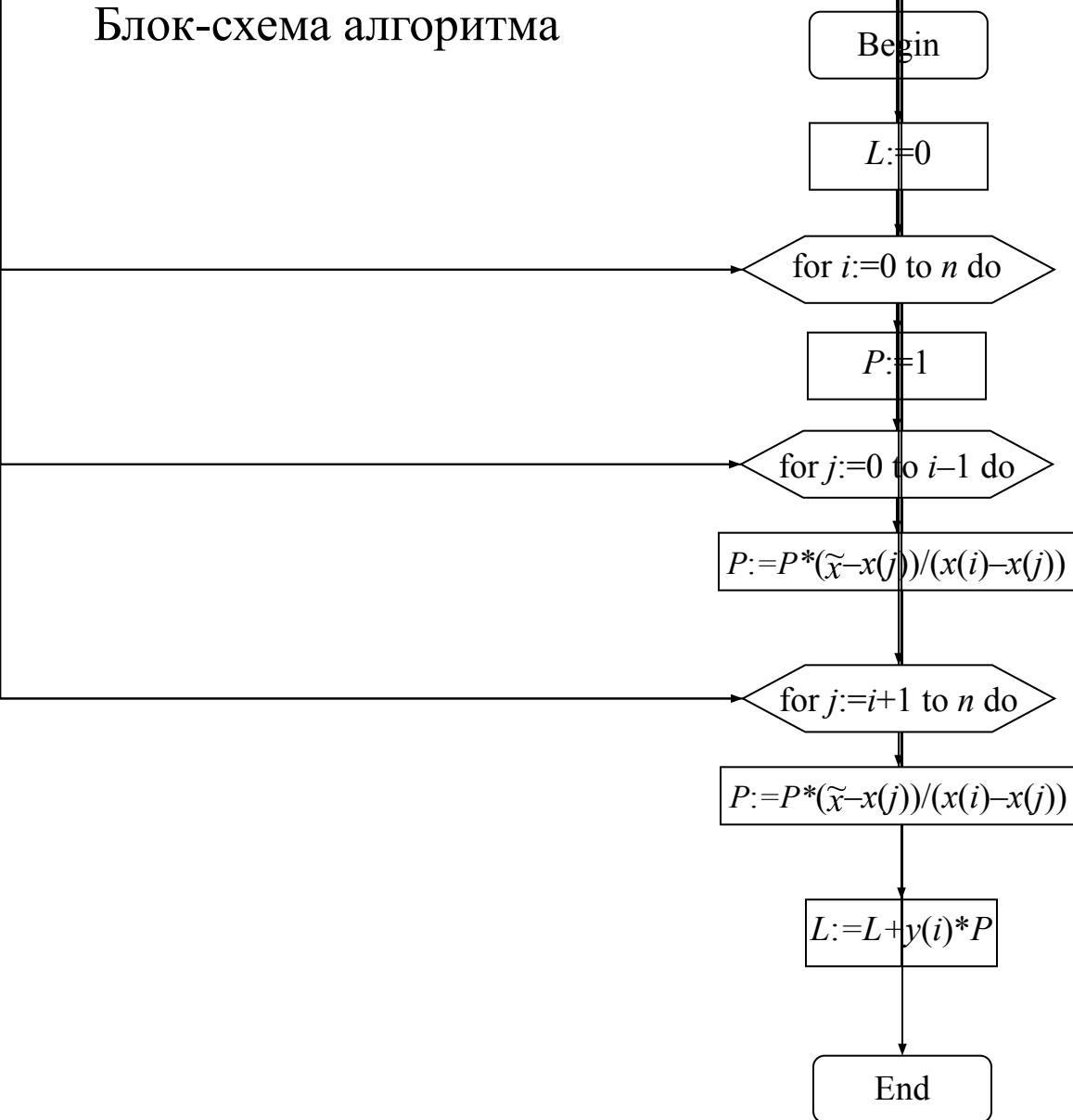
$$n = 1: L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$n = 2: L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$n = 3: L_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

3.2.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Блок-схема алгоритма



Ввод исходных данных в программу на языке Pascal

const

n = 10;

a = 0;

b = 1;

var

x[n], y[n], L, P, h: **double**;

i, j: **integer**;

function f(x: **double**): **double**;

begin

f := sqrt(x);

end;

begin

h := (b-a)/n;

x[0] := a;

for i:=1 **to** n **do**

x[i] := x[i-1] + h;

for i:=0 **to** n **do**

y[i] := f(x[i]);

...

end.

3.2.2 Интерполяционный полином Ньютона

Общий вид:

- первая формула Ньютона:

$$P_n^{(1)}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

- вторая формула Ньютона:

$$P_n^{(2)}(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)$$

3.2.2 Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

Конечные разности:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – конечные разности первого порядка;

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – конечные разности второго порядка;

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$ – конечные разности третьего порядка;

...

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ – конечные разности n -го порядка;

3.2.2 Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

Конечные разности:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – конечные разности первого порядка;

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – конечные разности второго порядка;

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$ – конечные разности третьего порядка;

...

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ – конечные разности n -го порядка;

3.2.2 Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

Таблица конечных разностей:

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
4	y_4	Δy_4				
5	y_5					

3.2.2 1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

Условия на a_i :

$$\begin{array}{ll} P_n^{(1)}(x_0) = y_0, & a_0 = y_0, \\ P_n^{(1)}(x_1) = y_1, & a_0 + a_1 h = y_1, \\ P_n^{(1)}(x_2) = y_2, & \Rightarrow a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2, \\ \dots & \dots \\ P_n^{(1)}(x_n) = y_n; & a_0 + na_1 h + n(n-1)a_2 h^2 + \dots + n! a_n h^n = y_n. \end{array}$$

3.2.2 1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

$$a_0 = y_0,$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_0 + 2a_1h + 2a_2h^2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta y_1}{2h^2},$$

...

Общая формула a_i :

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! \cdot h^k}, k = 0, 1, \dots, n$$

3.2.2 2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

Общая формула:

$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Для программной реализации:

$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{(x - x_0)}{h} + \Delta^2 y_0 \frac{(x - x_0)}{h} \frac{(x - x_1)}{2h} + \Delta^3 y_0 \frac{(x - x_0)}{h} \frac{(x - x_1)}{2h} \frac{(x - x_2)}{3h} + \dots +$$

$$+ \Delta^n y_0 \frac{(x - x_0)}{h} \frac{(x - x_1)}{2h} \dots \frac{(x - x_{n-1})}{nh}.$$

$$c_1 = \frac{(x - x_0)}{h},$$

$$c_{k+1} = c_k \frac{(x - x_k)}{(k+1)h}, k = 1, \dots, n-1$$

2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

Условия на b_i :

$$P_n^{(2)}(x_n) = y_n,$$

$$b_0 = y_n,$$

$$P_n^{(2)}(x_{n-1}) = y_{n-1},$$

$$b_0 - b_1 h = y_{n-1},$$

$$P_n^{(2)}(x_{n-2}) = y_{n-2}, \quad \Rightarrow \quad b_0 - 2b_1 h + 2b_2 h^2 = y_{n-2},$$

...

...

$$P_n^{(2)}(x_0) = y_0;$$

$$b_0 - nb_1 h + n(n-1)b_2 h^2 + \dots + (-1)^n n! b_n h^n = y_0.$$

2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

$$b_0 = y_n,$$

$$b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

$$b_0 - 2b_1h + 2a_2h^2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta y_{n-2}}{2h^2},$$

...

Общая формула b_i :

$$b_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! \cdot h^k}, k = 0, 1, \dots, n$$

1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \equiv \text{const}$)

Общая формула:

$$P_n^{(2)}(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Для программной реализации:

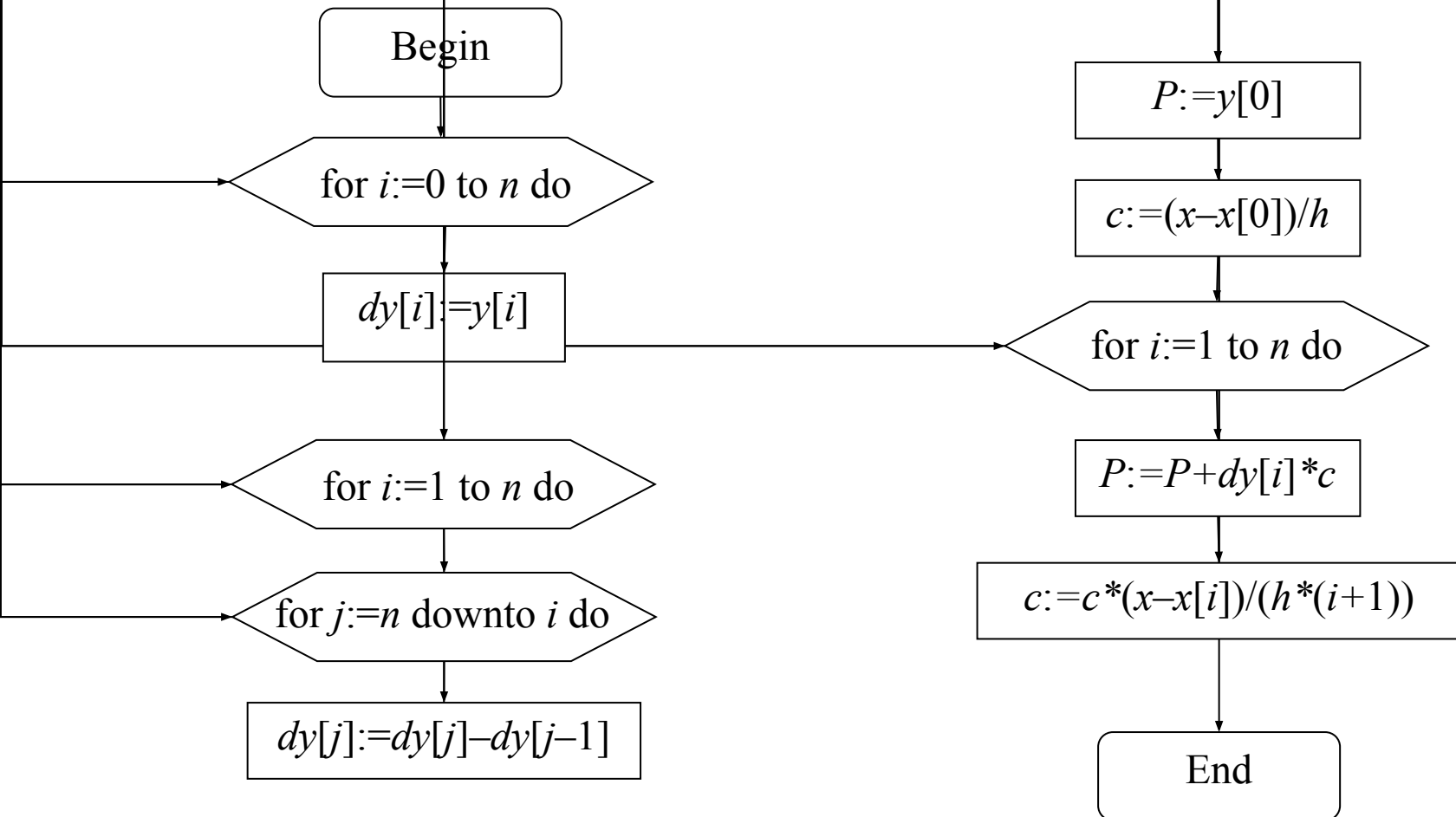
$$P_n^{(2)}(x) = y_n + \Delta y_{n-1} \frac{(x - x_n)}{c_1} + \Delta^2 y_{n-1} \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{c_2} + \Delta^3 y_{n-2} \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{c_3} + \dots +$$

$$+ \Delta^n y_0 \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)}{c_n}.$$

$$c_1 = \frac{(x - x_n)}{h},$$

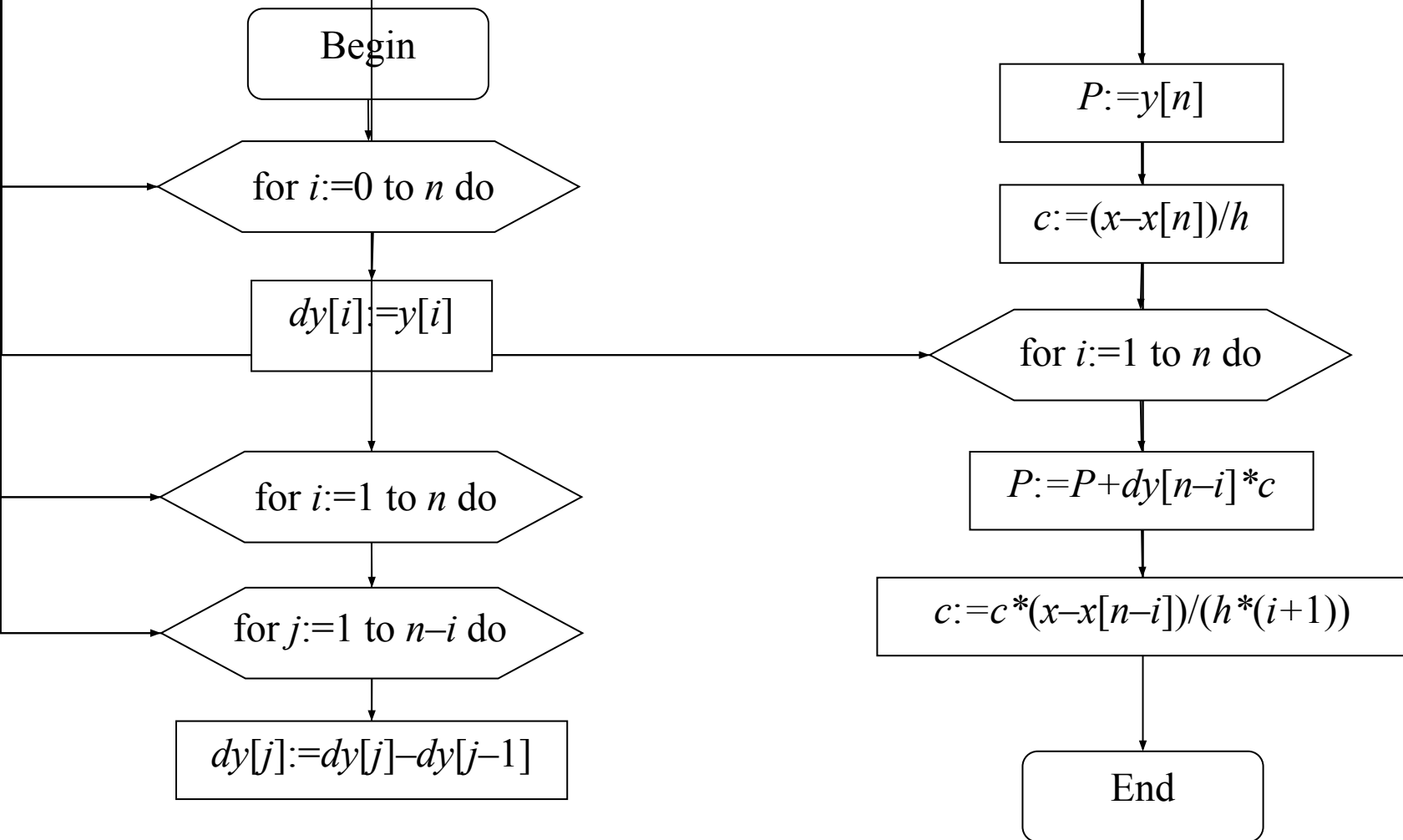
$$c_{k+1} = c_k \frac{(x - x_{n-k})}{(k+1)h}, k = 1, \dots, n-1$$

Блок-схема 1-я формула Ньютона



Блок-схема

2-я формула Ньютона



Полином Ньютона для **неравноотстоящих** узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \neq \text{const}$)

Разделенные разности:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{— разделенные разности первого порядка;}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad \text{— разделенные разности второго порядка;}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} \quad \text{— разделенные разности третьего порядка;}$$

...

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - [x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \quad \text{— разделенные разности } n\text{-го порядка.}$$

Полином Ньютона для **неравноотстоящих** узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \neq \text{const}$)

Таблица разделенных разностей:

i	x_i	y_i	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	x_0	y_0	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
1	x_1	y_1	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
2	x_2	y_2	$[x_2, x_3]$	$[x_2, x_3, x_4]$		
3	x_3	y_3	$[x_3, x_4]$			
4	x_4	y_4				

Погрешность полиномиальной интерполяции

Теорема:

$$|f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \dots (\tilde{x} - x_n)|,$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Полином Ньютона для **неравноотстоящих** узлов интерполяции ($x_{i+1} - x_i = h \neq \text{const}$)

Общий вид:

- первая формула Ньютона:

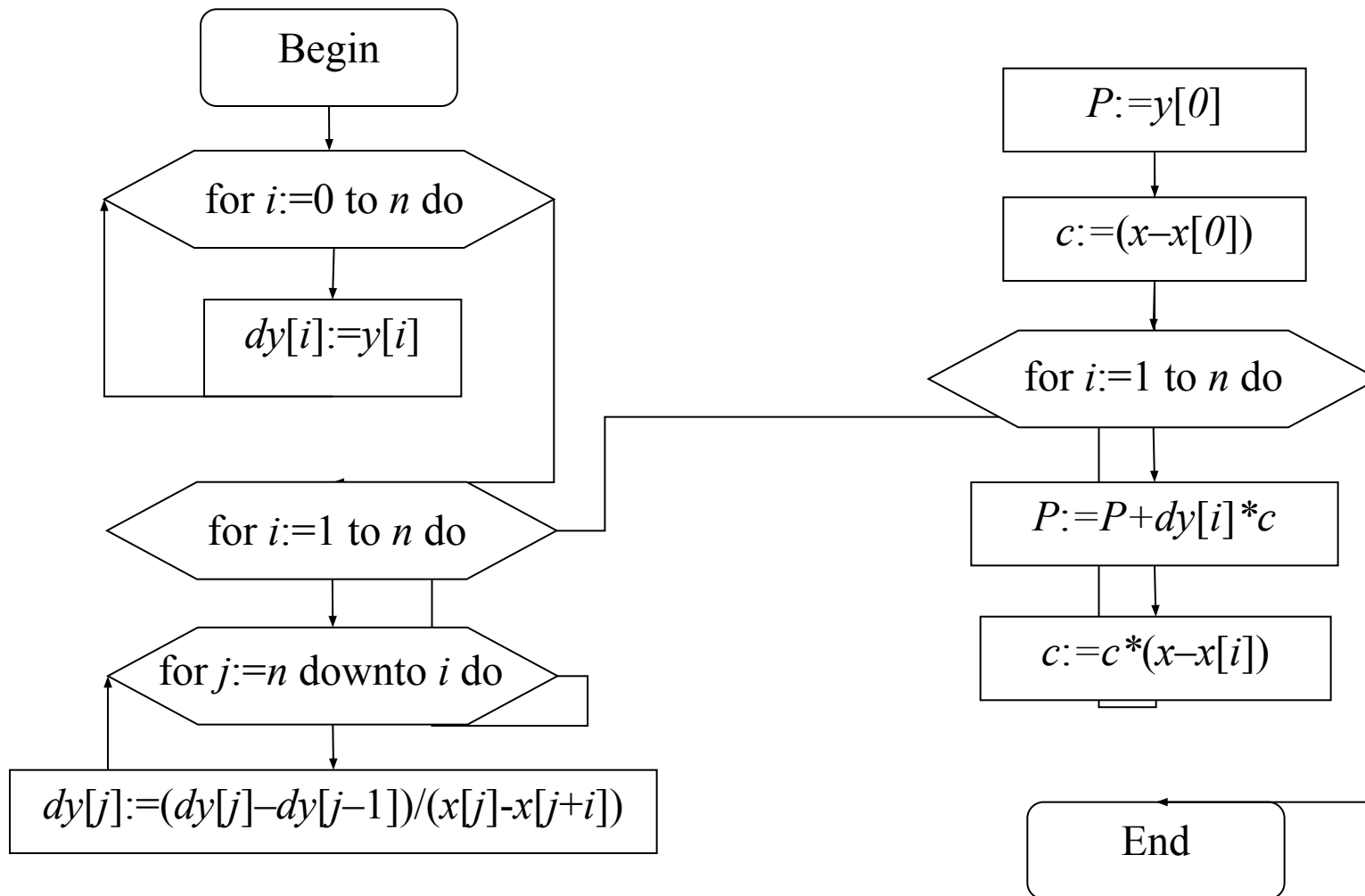
$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1});$$

- вторая формула Ньютона:

$$P_n^{(2)}(x) = y_n + [x_{n-1}, x_n](x - x_n) + [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Блок-схема

1-я формула Ньютона (в разделенных разностях)



Блок-схема

2-я формула Ньютона (в разделенных разностях)

