Вычислительная математика

Лекция 6

Темы занятий

- **Алгебра**

  1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

  2. Решение нелинейных алгебраических уравнений.

- **Математический анализ**

  3. Приближение функций.

  4. Вычисление определенных интегралов.

  5. Решение дифференциальных уравнений.

Тема 3. Приближение функций

Обобщенная постановка задачи:

- Дано:

  функция

  $$y = f(x)$$

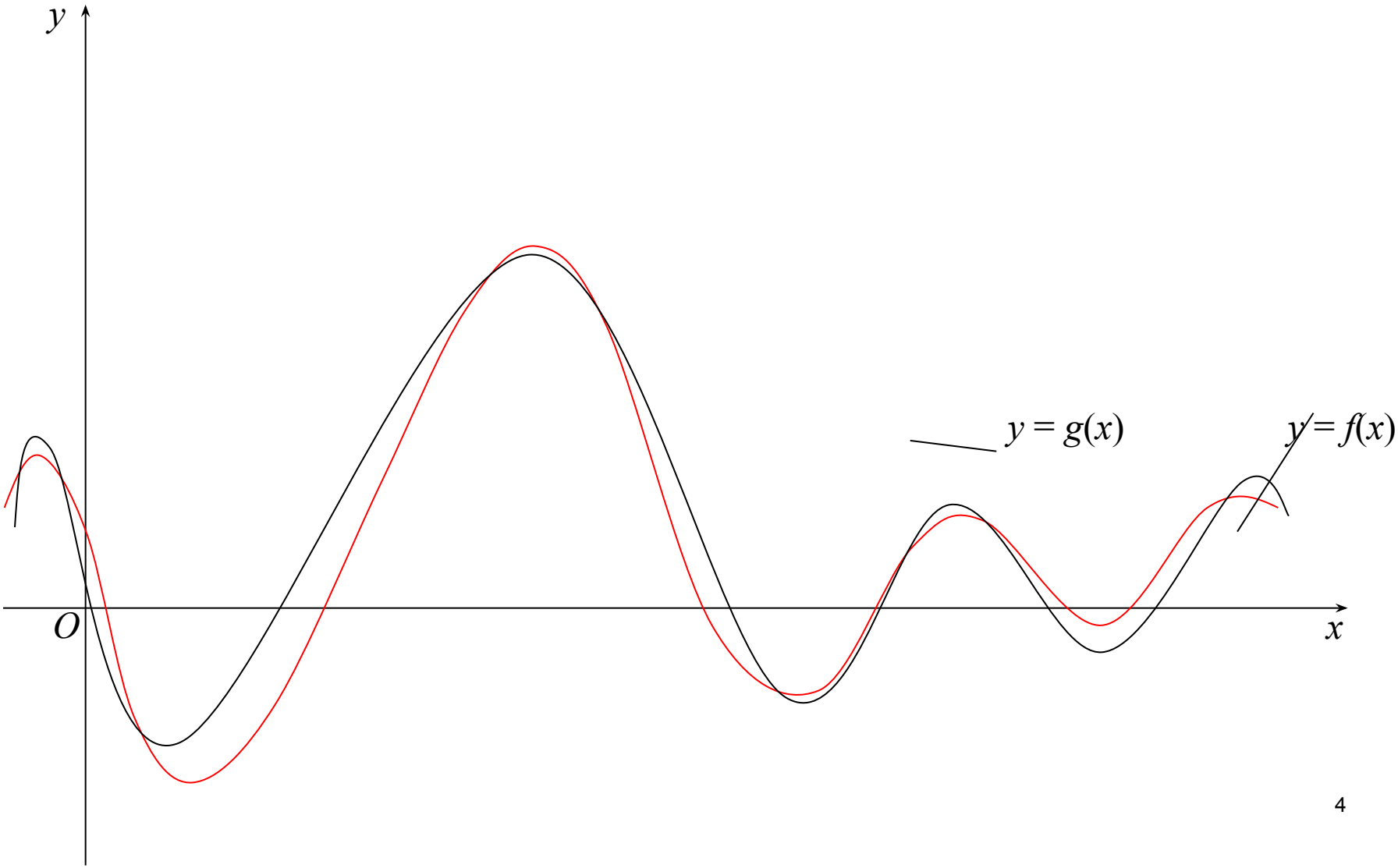
- Найти:

  функцию $y = g(x)$ такую, что $f(x) \approx g(x)$, то есть погрешность приближения $|f(x) - g(x)|$ достаточно мала для всех $x \in [a, b]$.

Нахождение функции $y = g(x)$ называется ***задачей аппроксимации*** функции $y = f(x)$. Функция $y = g(x)$ называется ***аппроксимирующей функцией***.

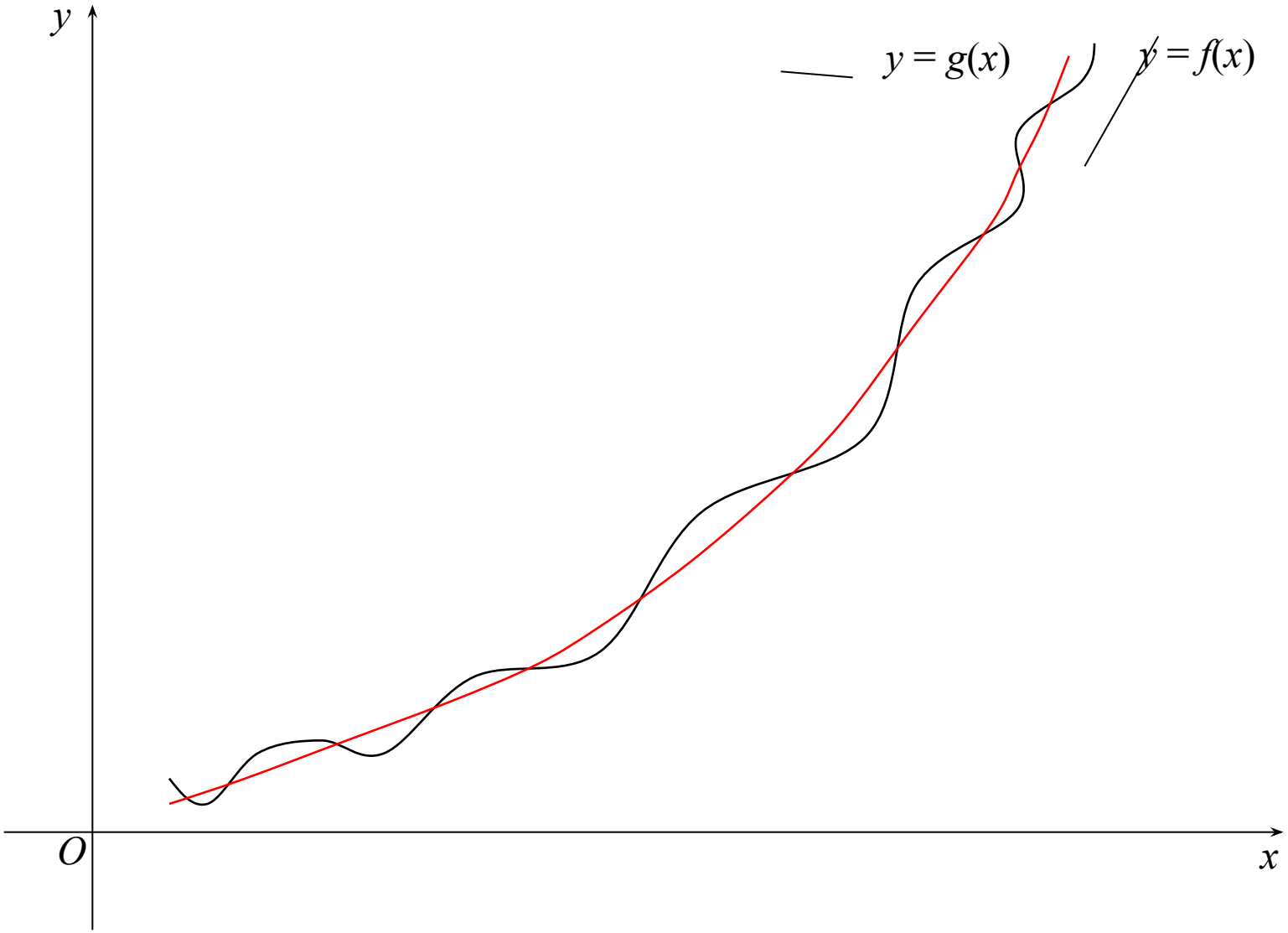
Тема 3. Приближение функций

Геометрический смысл:



Тема 3. Приближение функций

Геометрический смысл:



Тема 3. Приближение функций

Необходимость решения задачи аппроксимации возникает, когда:

- функция $y = f(x)$ задана таблицей своих (в общем случае приближенных) значений:

$$y_i \approx f(x_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

при этом нужно вычислять значения функции $y = f(x)$ в точках $\tilde{x} \neq x_i$ (*такая задача возникает при экспериментальном вычислении значений функции* $y = f(x)$);

- функция $y = f(x)$ задана сложным аналитическим выражением, затрудняющим вычисления; при этом требуется заменить сложную функцию $y = f(x)$ на более простую функцию $y = g(x)$ (*такая задача возникает при необходимости многократного вычисления значений функции* $y = f(x)$ *или при необходимости выполнения операций над функцией* $y = f(x)$, *например, дифференцирования или интегрирования*).

<u>Тема 3.1</u> Аппроксимация по методу наименьших квадратов

Пусть аппроксимирующая функция имеет вид

$$y = Q(x, a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

где a_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) – числовые параметры, значения которых находятся из условия

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left[Q(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i \right]^2 \to \min$$

Тогда значения параметров находятся из системы уравнений, полученной из необходимого условия экстремума функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

Пусть

$$Q(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m.$$

Тогда

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i \right]^2$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 2\sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{m} \left(a_j x_i^j - y_i\right) x_i^k \right] =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n} \left[\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m - y_i\right) x_i^k \right] =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n} \left[a_0 x_i^k + a_1 x_i^{k+1} + a_2 x_i^{k+2} + \ldots + a_m x_i^{k+m} - y_i x_i^k \right] =$$

$$= 2\left[\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^k \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{k+1} \right) a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{k+m} \right) a_m - \left(\sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k \right) \right].$$

Метод наименьших квадратов

Таким образом, получена СЛАУ на нахождение значений параметров a_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) имеет вид:

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i; \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

В частном случае при $m = 4$ имеем СЛАУ :

$$\begin{cases}
(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^6\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2; \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^6\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^7\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^3; \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^4\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^5\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^6\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^7\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^8\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^4.
\end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

Пусть $m = 1$, $a_0 = b$, $a_1 = k$.

Тогда получим

$$\begin{cases} (n+1)b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)k = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)b + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Отсюда

$$k = \frac{c_{11}d_2 - c_{12}d_1}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad b = \frac{c_{22}d_1 - c_{12}d_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2},$$

где

$$c_{11} = n+1, \quad c_{12} = \sum_{i=0}^{n} x_i, \quad c_{22} = \sum_{i=0}^{n} x_i^2, \quad d_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i, \quad d_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i.$$

Виды эмпирической зависимости

№	Преобразование переменных	Эмпирическая формула
1	$X_i = x_i, \quad Y_i = x_i y_i$	$y = \alpha + \beta/x, \quad \alpha = k, \beta = b$
2	$X_i = x_i, \quad Y_i = 1/y_i$	$y = 1/(\alpha x + \beta), \quad \alpha = k, \beta = b$
3	$X_i = x_i, \quad Y_i = x_i/y_i$	$y = x/(\alpha x + \beta), \quad \alpha = k, \beta = b$
4	$X_i = x_i, \quad Y_i = \ln y_i$	$y = \alpha\beta^x, \quad \alpha = e^b, \beta = e^k$
5	$X_i = \ln x_i, \quad Y_i = y_i$	$y = \alpha \ln x + \beta, \quad \alpha = k, \beta = b$
6	$X_i = \ln x_i, \quad Y_i = \ln y_i$	$y = \alpha x^\beta, \quad \alpha = e^b, \beta = k$

Метод наименьших квадратов

Пусть

$$Q(x, a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x).$$

Тогда

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m} a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right]^2$$

Следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 2\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}\left(a_j\varphi_j(x_i) - y_i\right)\varphi_k(x_i)\right] =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\left[\left(a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) + \ldots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i\right)\varphi_k(x_i)\right] =$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\left[a_0\varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i) + a_1\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i) + a_2\varphi_2(x_i)\varphi_k(x_i) + \ldots + a_m\varphi_m(x_i)\varphi_k(x_i) - y_i\varphi_k(x_i)\right] =$$

$$= 2\left[\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\varphi_k(x_i)\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_k(x_i)\right)a_1 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_k(x_i)\right)a_m - \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_k(x_i)\right)\right].$$

Метод наименьших квадратов

Таким образом, получена СЛАУ уравнений на нахождение значений параметров a_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) имеет вид:

$$
\begin{cases}
\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_0^2(x_i)\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i); \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1^2(x_i)\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i)\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_1(x_i)\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i); \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i)\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_2^2(x_i)\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_2(x_i)\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_2(x_i); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_0(x_i)\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_1(x_i)\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m(x_i)\varphi_2(x_i)\right)a_2 + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{n}\varphi_m^2(x_i)\right)a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_m(x_i).
\end{cases}
$$

Метод наименьших квадратов

Например, пусть $m = 2k + 1$ и

$$Q(x, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k) = a_0 + \sum_{j=1}^{k} \left(a_j \cos jx + b_j \sin jx \right).$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\sum_{i=0}^{n} \cos jx_i \right) + \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\sum_{i=0}^{n} \sin jx_i \right) = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\ \left(\sum_{i=0}^{n} \cos px_i \right) a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\sum_{i=0}^{n} (\cos jx_i \cdot \cos px_i) \right) + \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\sum_{i=0}^{n} (\sin jx_i \cdot \cos px_i \right) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \cos px_i); \\ \left(\sum_{i=0}^{n} \sin px_i \right) a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\sum_{i=0}^{n} (\cos jx_i \cdot \sin px_i) \right) + \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\sum_{i=0}^{n} (\sin jx_i \cdot \sin px_i) \right) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \sin px_i); \end{cases}$$

$p = 1, 2, \ldots, k$

Метод наименьших квадратов

В частном случае при $k = 2$ получим СЛАУ

$$
\begin{cases}
(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\cos x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos^2 x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos 2x_i \cos x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin x_i \cos x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin 2x_i \cos x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \cos x_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\cos 2x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos x_i \cos 2x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos^2 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin x_i \cos 2x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin 2x_i \cos 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \cos 2x_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\sin x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos x_i \sin x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos 2x_i \sin x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin^2 x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin 2x_i \sin x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \sin x_i; \\
\left(\sum_{i=0}^{n}\sin 2x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos x_i \sin 2x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\cos 2x_i \sin 2x_i\right)a_2 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin x_i \sin 2x_i\right)b_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}\sin^2 2x_i\right)b_2 = \sum_{i=0}^{n} y_i \sin 2x_i;
\end{cases}
$$

Тема 3.2 Интерполяция

Обобщенная постановка задачи интерполяции:

- Дано:

  значения функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$:

  $$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\ (x_i \in [a, b]).$$

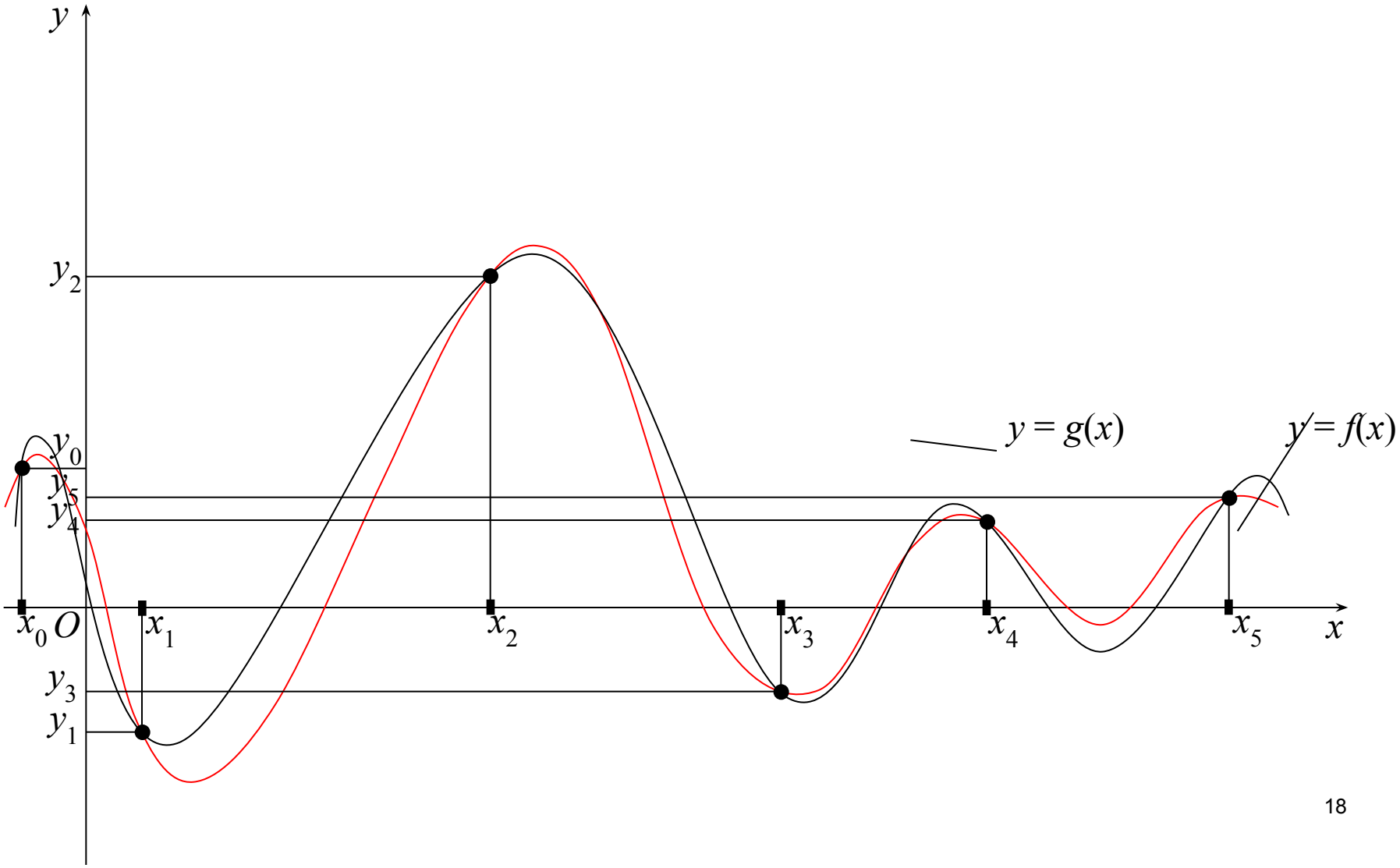
- Найти:

  функцию $y = g(x)$ такую, что

  $$g(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Тема 3.2 Интерполяция

Геометрический смысл:



<u>Тема 3.2</u> Интерполяция

<u>Задача интерполяции обобщенным многочленом:</u>

Пусть задана система функций:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x).$$

<u>Обобщенным многочленом</u> называется функция

$$\Phi_n(x) = a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x),$$

такая, что

$$\Phi_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

<u>Тема 3.2</u> Интерполяция

Коэффициенты a_j (j = 0, 1, 2, …, n) находятся из условия:

$$\begin{cases} a_0\varphi_0(x_0)+a_1\varphi_1(x_0)+a_2\varphi_2(x_0)+\ldots+a_n\varphi_n(x_0)=y_0, \\ a_0\varphi_0(x_1)+a_1\varphi_1(x_1)+a_2\varphi_2(x_1)+\ldots+a_n\varphi_n(x_1)=y_1, \\ a_0\varphi_0(x_2)+a_1\varphi_1(x_2)+a_2\varphi_2(x_2)+\ldots+a_n\varphi_n(x_2)=y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\varphi_0(x_n)+a_1\varphi_1(x_n)+a_2\varphi_2(x_n)+\ldots+a_n\varphi_n(x_n)=y_n; \end{cases}$$

– СЛАУ.

Для решения СЛАУ необходимо, чтобы для любых x_i (i = 0, 1, 2, …, n), $x_i \underset{i\neq j}{\neq} x_j$,

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

система функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=0,1,\ldots,n}$, удовлетворяющая условию (1), называется ***<u>чебышевской системой функций</u>***.

Тема 3.2 Интерполяция

Задача полиномиальной интерполяции:

Пусть задана система функций вида:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = x^n.$$

Интерполяционным многочленом (полиномом)

называется функция

$$P_n(x) = a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

такая, что

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Тема 3.2 Интерполяция

Теорема

Система функций $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ является чебышевской.

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$ – определитель Вандермонда.

<u>Тема 3.2.1</u> Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

<u>Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа</u>
имеет следующий вид:

$$L_n(x) = y_0 P_n^0(x) + y_1 P_n^1(x) + y_2 P_n^2(x) + \ldots + y_n P_n^n(x),$$

где многочлен степени n такой, что $P_n^j(x_i) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

Многочлен $P_n^i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n),$

$$P_n^i(x_i) = 1 \Rightarrow C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$P_n^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Тема 3.2.1 Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

Интерполяционный многочлен (полином) Лагранжа

Общая формула:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_n^i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Частные случаи:

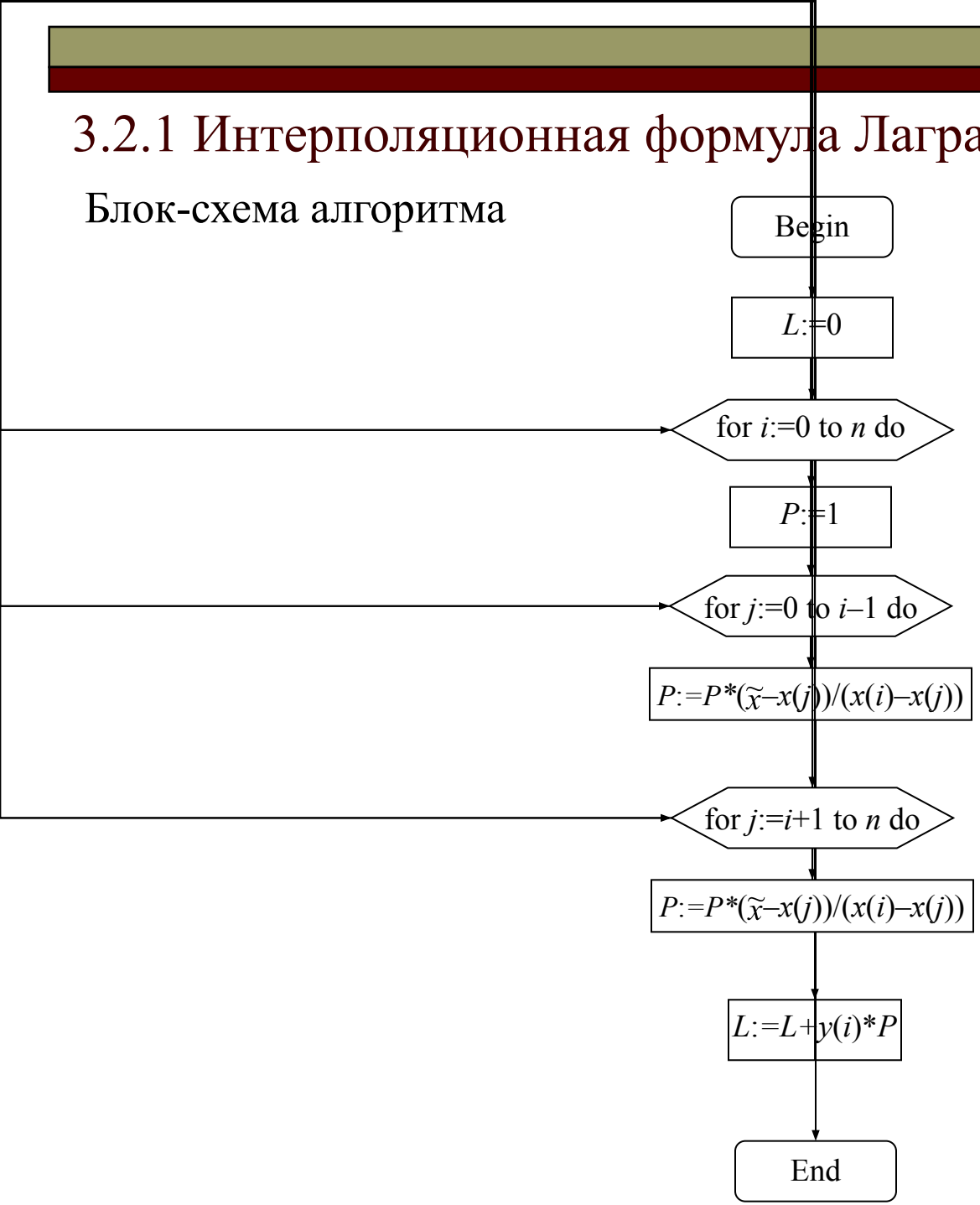
n = 1: $L_1(x) = y_0 \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

n = 2: $L_2(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

n = 3: $L_3(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$

3.2.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Блок-схема алгоритма



Ввод исходных данных в программу на языке Pascal

```
const
  n = 10;
  a = 0;
  b = 1;
var
  x[n], y[n], L, P, h: double;
  i, j: integer;
function f(x: double): double;
begin
  f := sqrt(x);
end;
begin
  h := (b–a)/n;
  x[0] := a;
  for i:=1 to n do
    x[i] := x[i–1] + h;
  for i:=0 to n do
    y[i] := f(x[i]);
  ...
end.
```

<u>3.2.2</u> Интерполяционный полином Ньютона

<u>Общий вид</u>:

- первая формула Ньютона:

$$P_n^{(1)}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

- вторая формула Ньютона:

$$P_n^{(2)}(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

<u>3.2.2</u> Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

<u>Конечные разности</u>:

$\Delta y_i = y_{i+1}-y_i$ – конечные разности первого порядка;

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1}-\Delta y_i$ – конечные разности второго порядка;

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i$ – конечные разности третьего порядка;

...

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1}-\Delta^{n-1} y_i$ – конечные разности n-го порядка;

<u>3.2.2</u> Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv$const)

<u>Конечные разности</u>:

$\Delta y_i = y_{i+1}-y_i$ – конечные разности первого порядка;

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1}-\Delta y_i$ – конечные разности второго порядка;

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i$ – конечные разности третьего порядка;

...

$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1}-\Delta^{n-1} y_i$ – конечные разности n-го порядка;

<u>3.2.2</u> Полином Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

<u>Таблица конечных разностей</u>:

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
4	y_4	Δy_4				
5	y_5					

3.2.2 1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv$const)

Условия на a_i:

$$
\begin{array}{lcl}
P_n^{(1)}(x_0)=y_0, & & a_0=y_0, \\
P_n^{(1)}(x_1)=y_1, & & a_0+a_1h=y_1, \\
P_n^{(1)}(x_2)=y_2, & \Rightarrow & a_0+2a_1h+2a_2h^2=y_2, \\
\ldots & & \ldots \\
P_n^{(1)}(x_n)=y_n; & & a_0+na_1h+n(n-1)a_2h^2+\ldots+n!a_nh^n=y_n.
\end{array}
$$

3.2.2 1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv$const)

$$a_0 = y_0,$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta y_1}{2h^2},$$

...

Общая формула a_i:

$$\boxed{a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! \cdot h^k}, k = 0,1,\ldots,n}$$

3.2.2 2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

Общая формула:

$$\boxed{P_n^{(1)}(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}$$

Для программной реализации:

$$P_n^{(1)}(x)=y_0+\Delta y_0\underbrace{\frac{(x-x_0)}{h}}_{c_1}+\Delta^2 y_0\underbrace{\frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{2h}}_{c_2}+\Delta^3 y_0\underbrace{\frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{2h}\frac{(x-x_2)}{3h}}_{c_3}+\ldots+$$

$$+\Delta^n y_0\underbrace{\frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{2h}\ldots\frac{(x-x_{n-1})}{nh}}_{c_n}.$$

$$c_1=\frac{(x-x_0)}{h},$$

$$c_{k+1}=c_k\frac{(x-x_k)}{(k+1)h},\ k=1,\ldots,n-1$$

2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv$const)

<u>Условия на b_i</u>:

$$
\begin{aligned}
&P_n^{(2)}(x_n)=y_n, && b_0=y_n,\\
&P_n^{(2)}(x_{n-1})=y_{n-1}, && b_0-b_1h=y_{n-1},\\
&P_n^{(2)}(x_{n-2})=y_{n-2}, \quad\Rightarrow && b_0-2b_1h+2b_2h^2=y_{n-2},\\
&\ldots && \ldots\\
&P_n^{(2)}(x_0)=y_0; && b_0-nb_1h+n(n-1)b_2h^2+\ldots+(-1)^n n!\,b_nh^n=y_0.
\end{aligned}
$$

2-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv$const)

$$b_0 = y_n,$$

$$b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

$$b_0 - 2b_1 h + 2a_2 h^2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta y_{n-2}}{2h^2},$$

...

<u>Общая формула b_i</u>:

$$\boxed{b_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!\cdot h^k}, k = 0,1,\ldots,n}$$

1-я формула Ньютона для равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h\equiv\text{const}$)

Общая формула:

$$\boxed{P_n^{(2)}(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)}$$

Для программной реализации:

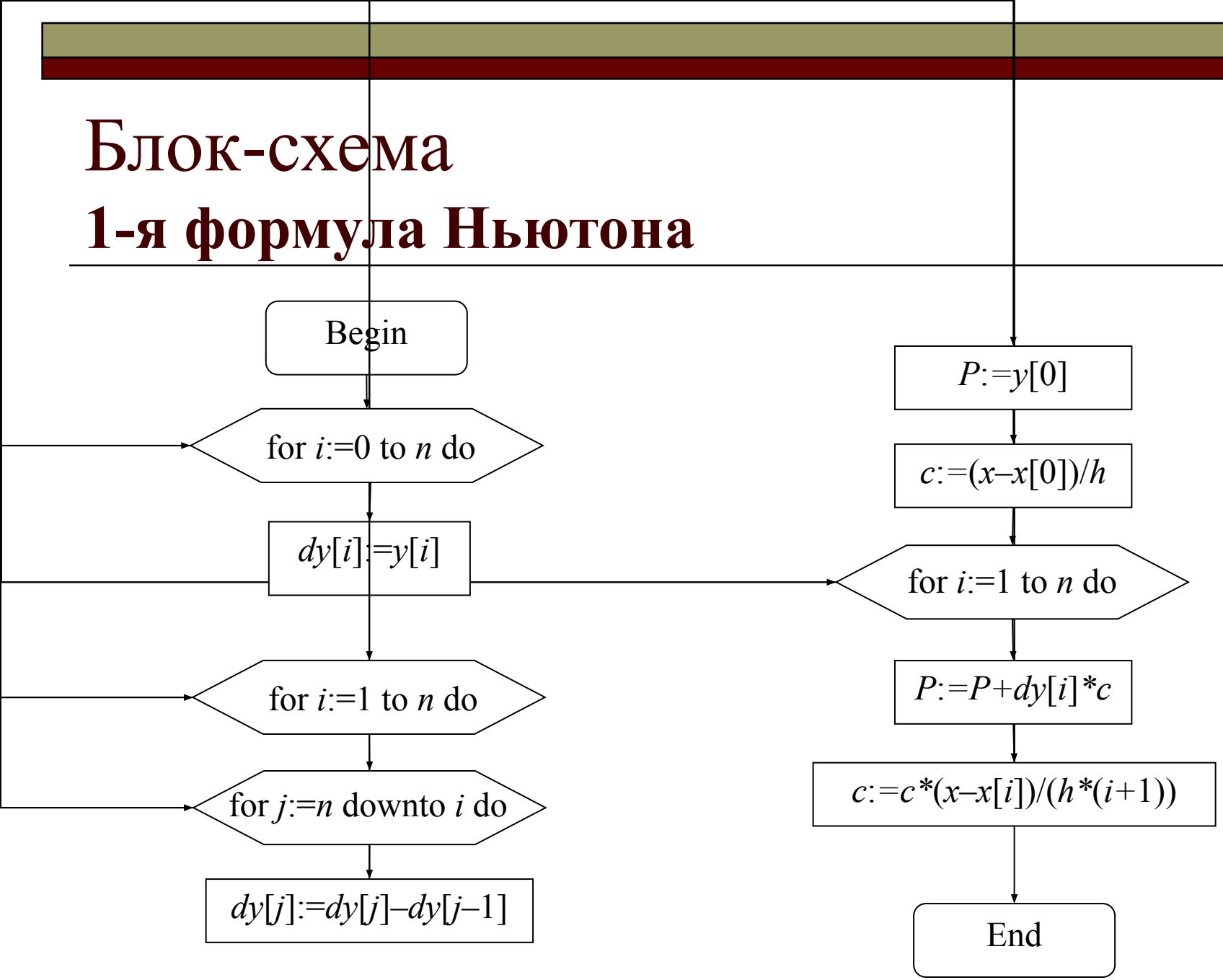
$$P_n^{(2)}(x)=y_n+\Delta y_{n-1}\underbrace{\frac{(x-x_n)}{h}}_{c_1}+\Delta^2 y_{n-1}\underbrace{\frac{(x-x_n)}{h}\frac{(x-x_{n-1})}{2h}}_{c_2}+\Delta^3 y_{n-2}\underbrace{\frac{(x-x_n)}{h}\frac{(x-x_{n-1})}{2h}\frac{(x-x_{n-2})}{3h}}_{c_3}+\ldots+$$

$$+\Delta^n y_0\underbrace{\frac{(x-x_n)}{h}\frac{(x-x_{n-1})}{2h}\ldots\frac{(x-x_1)}{nh}}_{c_n}.$$

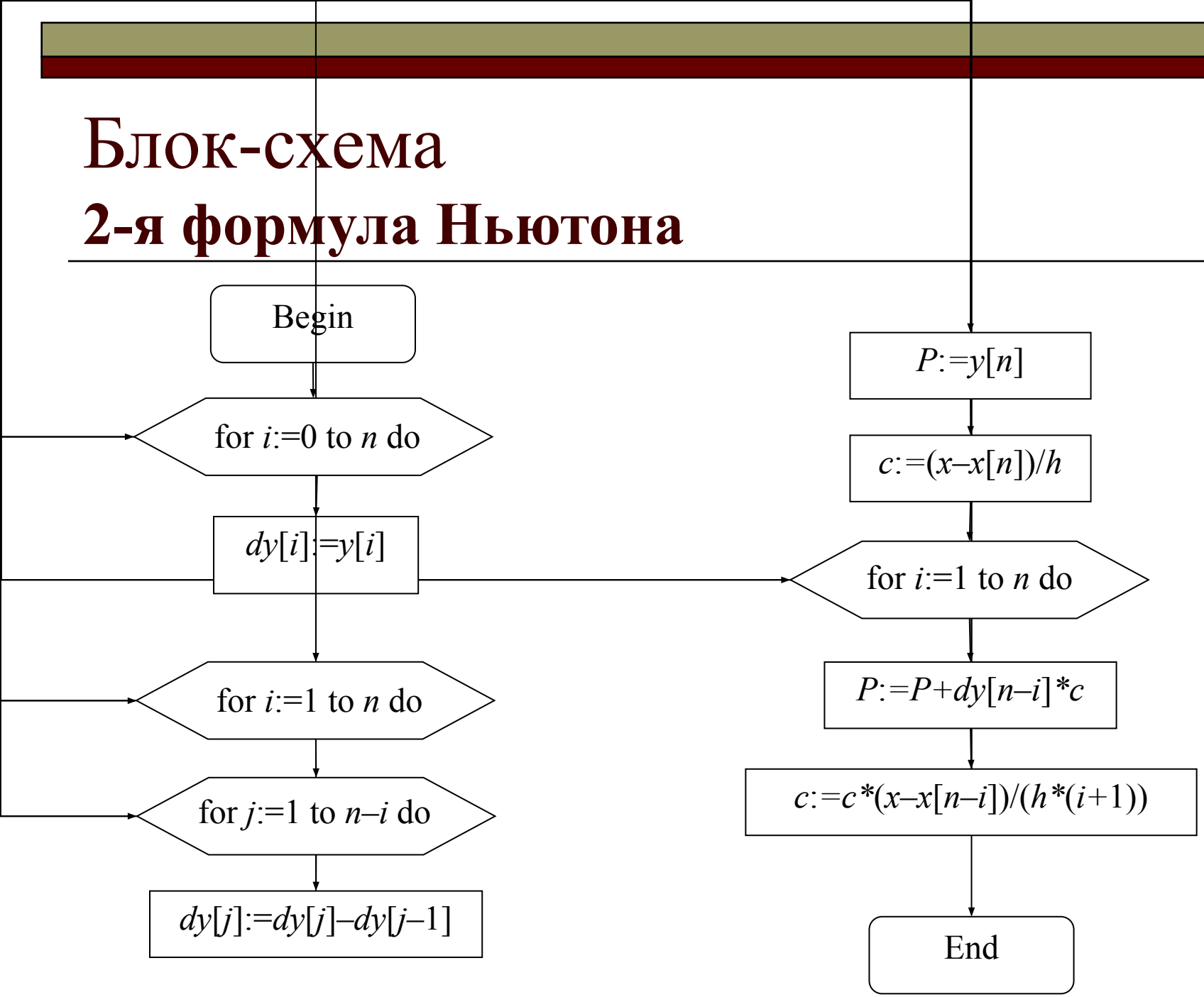
$$c_1=\frac{(x-x_n)}{h},$$

$$c_{k+1}=c_k\frac{(x-x_{n-k})}{(k+1)h},\ k=1,\ldots,n-1$$

Блок-схема
1-я формула Ньютона



Блок-схема
2-я формула Ньютона



Полином Ньютона для **не**равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h \neq \text{const}$)

<u>Разделенные разности</u>:

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$ – разделенные разности первого порядка;

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$ – разделенные разности второго порядка;

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$$ – разделенные разности третьего порядка;

...

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] = \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] - [x_i, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$ – разделенные разности n-го порядка.

Полином Ньютона для **не**равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h \neq \text{const}$)

<u>Таблица разделенных разностей</u>:

i	x_i	y_i	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	x_0	y_0	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
1	x_1	y_1	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
2	x_2	y_2	$[x_2, x_3]$	$[x_2, x_3, x_4]$		
3	x_3	y_3	$[x_3, x_4]$			
4	x_4	y_4				

Погрешность полиномиальной интерполяции

<u>Теорема</u>:

$$\left| f(\tilde{x}) - P_n(\tilde{x}) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| (\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1)\ldots(\tilde{x} - x_n) \right|,$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Полином Ньютона для **не**равноотстоящих узлов интерполяции ($x_{i+1}-x_i=h \neq \text{const}$)

<u>Общий вид</u>:

- первая формула Ньютона:

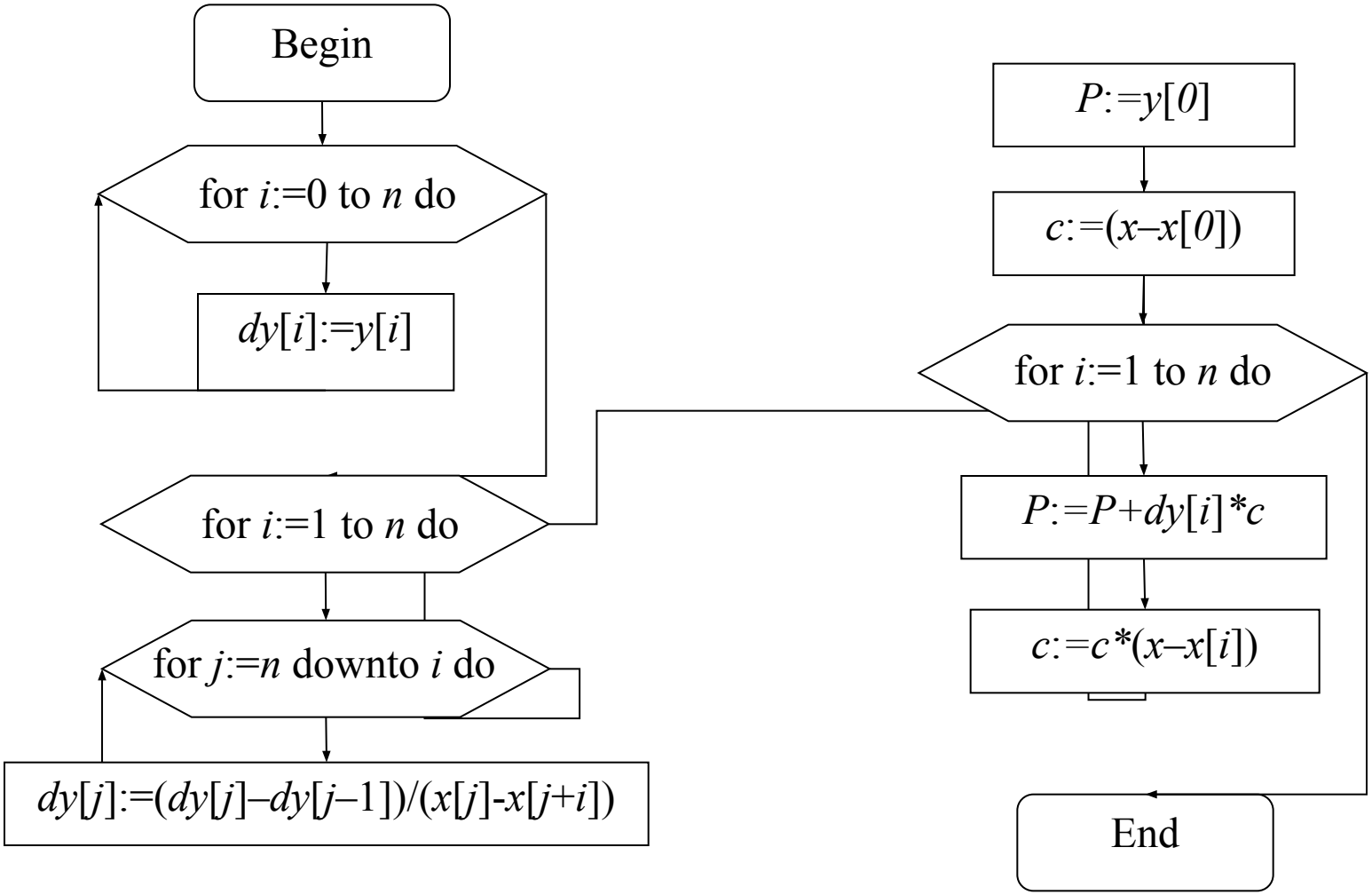
$$P_n^{(1)}(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ [x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1});$$

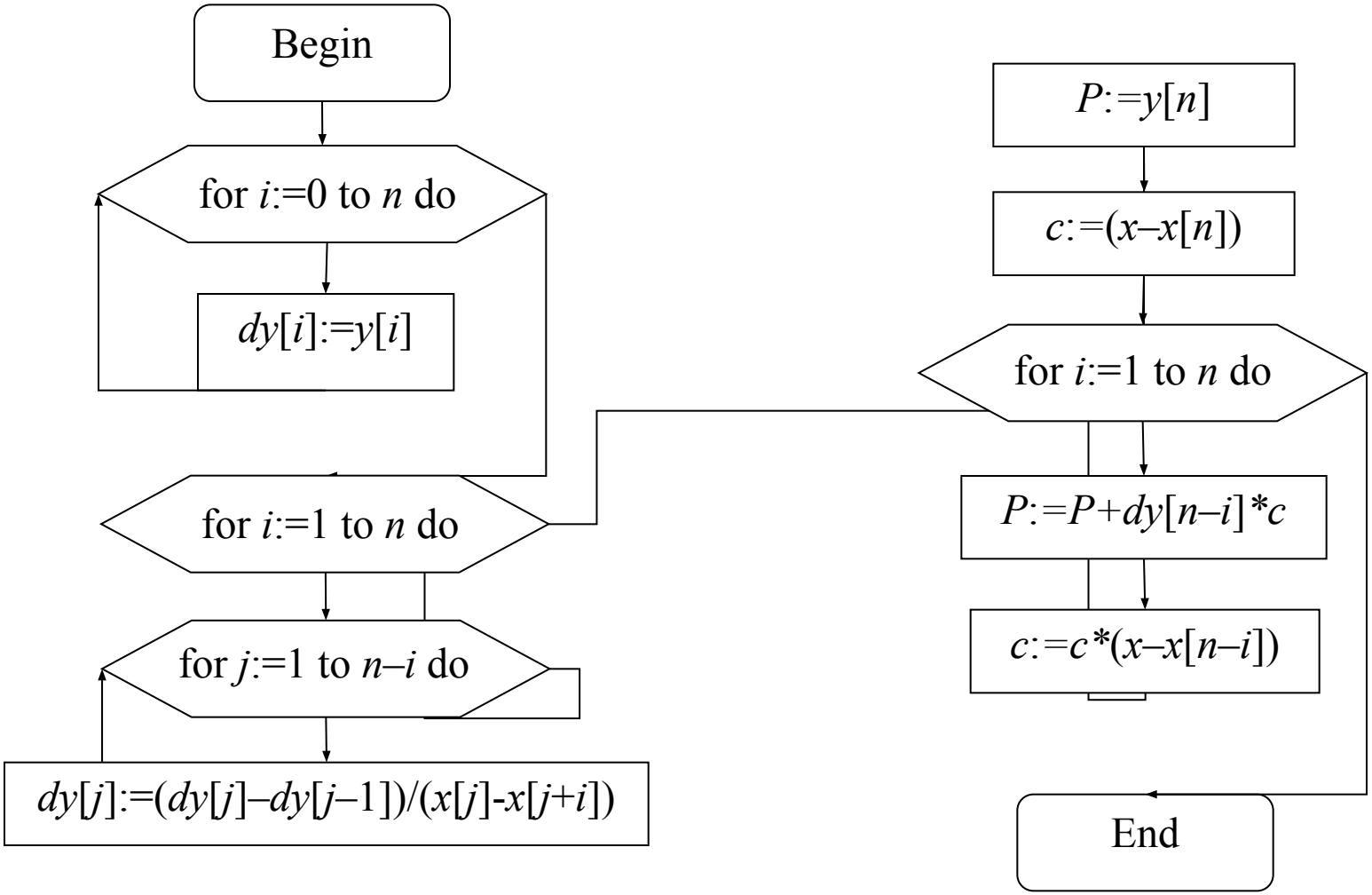
- вторая формула Ньютона:

$$P_n^{(2)}(x) = y_n + [x_{n-1}, x_n](x - x_n) + [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$
$$+ [x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1).$$

Блок-схема

1-я формула Ньютона (в разделенных разностях)



Блок-схема

2-я формула Ньютона (в разделенных разностях)