ЛЕКЦИЯ 3

Соответствия между множествами. Отображения

Задание:

1. Изучить новый материал
2. Записать конспект

Основные понятия.

Пусть даны два множества A={a_1, a_2,...} и B={b_1, b_2,...}. Тогда пары (a_i, b_j) задают соответствие между множествами A и B, если указано правило R, по которому для элемента a_i множества A выбирается элемент b_j из множества B.

Например, соответствие между элементами множеств $x \in X$ *и* $y \in Y$ *задает точечное множество (x_i, y_j) координат точек на плоскости; русско-английский словарь устанавливает соответствие значений и написаний слов русского и английского языков.*

Пусть задано соответствие R между множествами A и B, т. е. R: (a; b), $a \in A, b \in B$

*Для некоторого элемента **a** множества **A** поставлен в соответствие некоторый элемент b из множества B, который называется образом элемента a и записывается b = R(a).*

Тогда a = R^{-1}(b) — прообраз элемента $b \in B$ *который обладает свойствами единственности и полноты:*

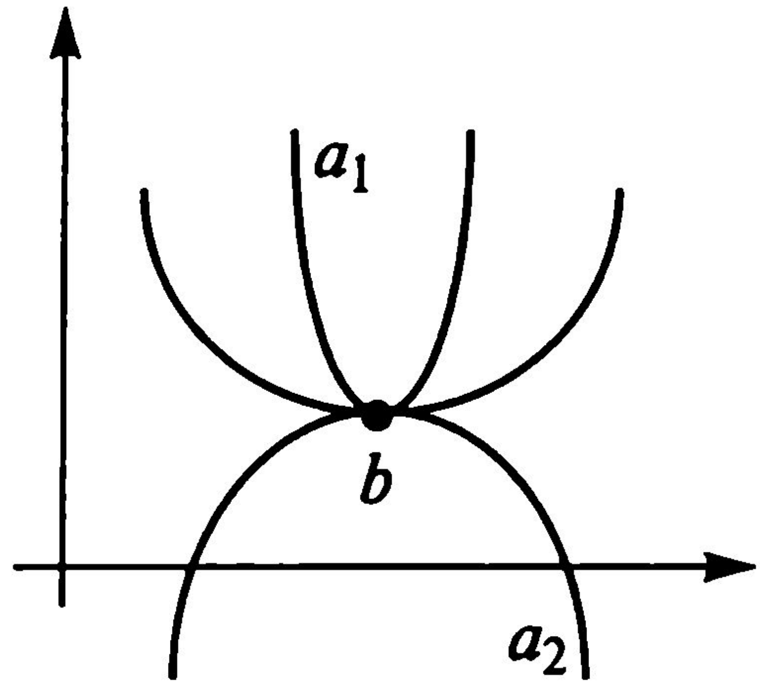
- *каждому прообразу соответствует единственный образ;*
- *образ должен быть полным, так же как полным должен быть и прообраз.*

<u>Например</u>, если

A — множество
парабол,

B — множество
точек плоскости

R — соответствие
«вершина параболы»,



то $R(a)$ — точка, являющаяся вершиной параболы a,

а $R^{-1}(b)$ состоит из всех парабол a_i с вершиной в точке b

Образ множества A при соответствии R называется множеством значений этого соответствия и обозначается R(A), если R(A) состоит из образов всех элементов множества A. Запись: $R(A)=\{b \mid \forall a \in A, b=R(a)\}$.

Прообраз множества B при некотором соответствии R называют областью определения этого соответствия и обозначают R^{-1}(B), т.е. $R^{-1}(B)=\{a \mid \forall b \in B, \exists a \in A: R(a)=b\}$.

R^{-1} является обратным соответствием для R.

Для описания соответствий между множествами используют понятие отображения (функции) одного множества на другое.

Функцией f , действующей из множества X в множество *Y* (*f: X* □ *Y*) называется правило или закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один или несколько $y \in Y$.

Задание отображений.

Для задания отображения необходимо указать:

* *множество, которое отображается (область определения данного отображения D(f));*
* *множество, в (на) которое отображается данная область определения (множество значений этого отображения E(f));*
* *закон или соответствие между этими множествами, по которому для элементов первого множества (прообразов, аргументов) выбраны элементы (образы) из второго множества.*

Приняты записи $A \xrightarrow{f} B$ *или f: A → B.*

Способ задания отображений в виде формул называется ***аналитическим****. Существуют еще табличный и графический способы.*

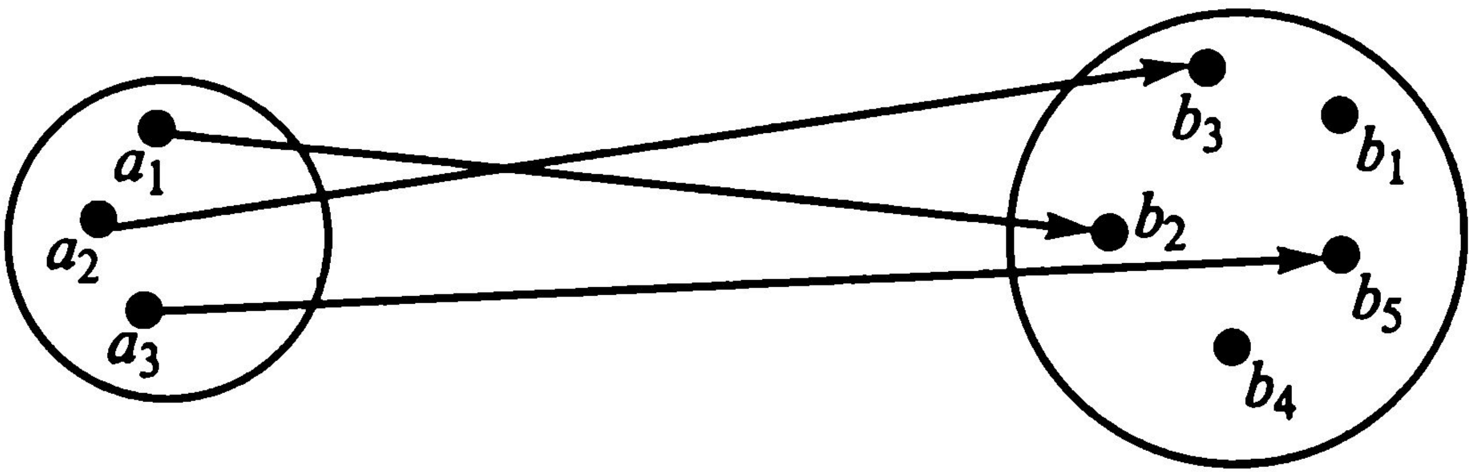
Для задания отображения множеств ***табличным*** *способом принято строить таблицу, в которой первую строку составляют элементы области определения (прообразы вида a), а вторую строку — их образы, т. е. элементы вида γ (x) при отображении γ : a □ γ (a), где* $a \in A$

x	a_1	a_2	…	a_n	…
$\gamma(x)$	$\gamma(a_1)$	$\gamma(a_2)$	…	$\gamma(a_n)$	…

Такой способ удобен при достаточно малой мощности прообраза (не более 10).

Графическое представление отображения связано со стрелочными схемами (диаграммами или графами).

Пример графического задания отображения множества $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ в $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$.



Отображения *f: A* □ *B и g: A* □ *B*

называются равными, если $\forall x \in A \; f(x) = g(x)$.

Отображения называются однозначными, если каждому аргументу поставлено в соответствие не более одного образа.

Виды отображений.

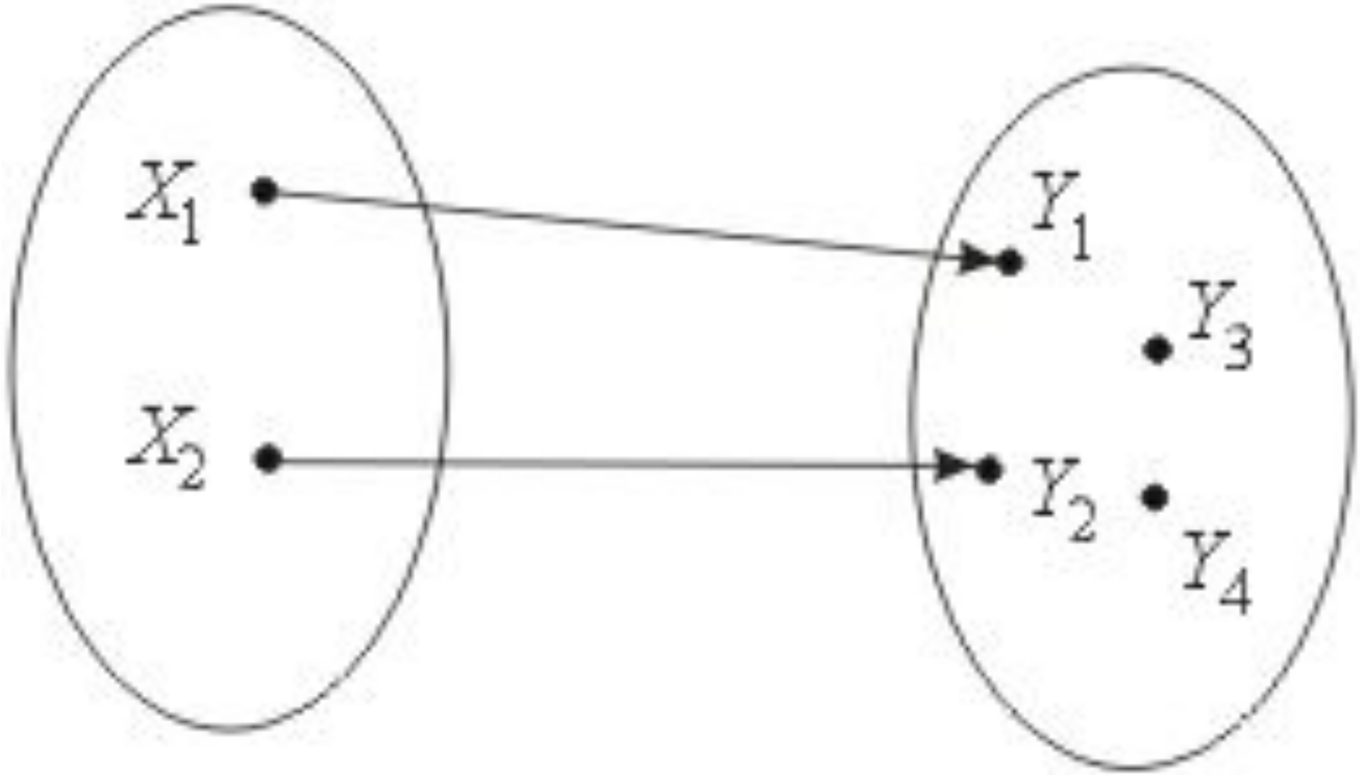
Различают два основных вида однозначных отображений (функций). По мощности они делятся на сюръективные и инъективные

Отображения

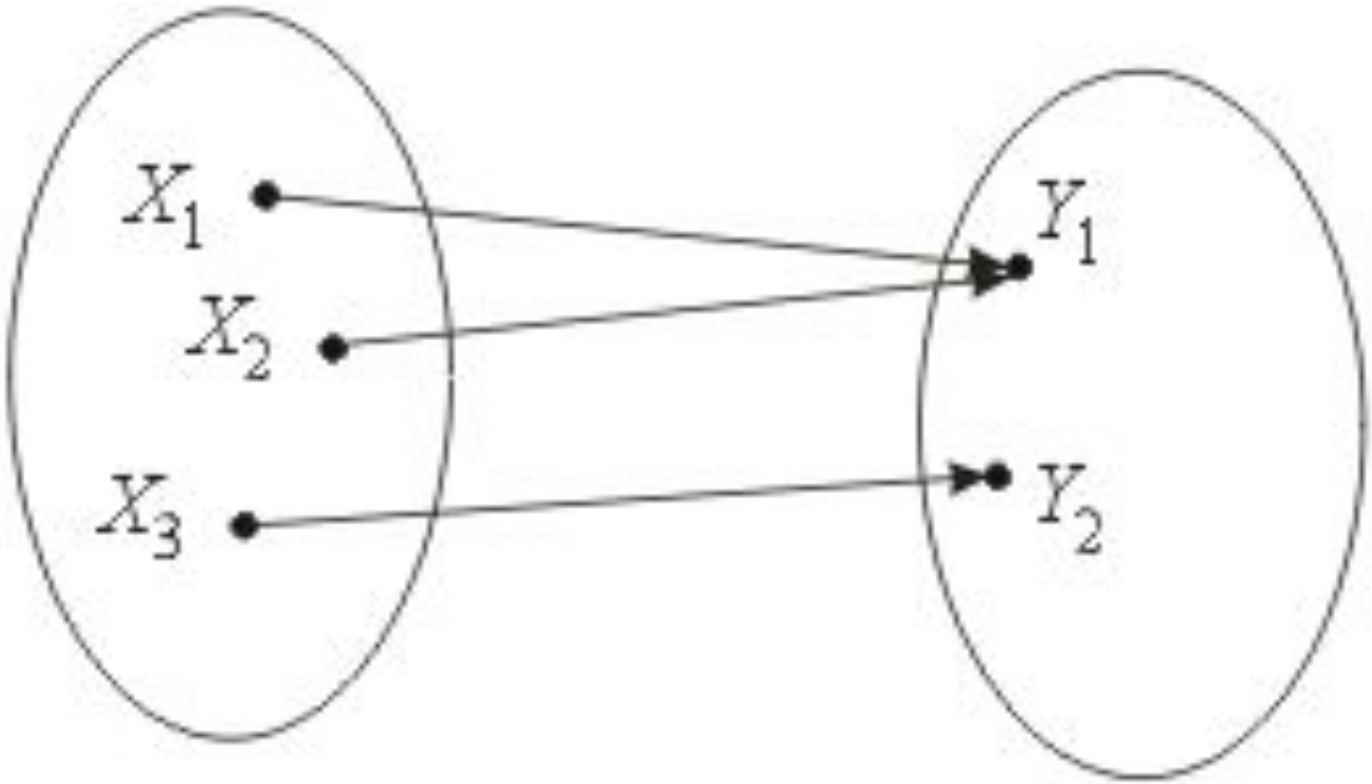
На множество
«сюръекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A указан *единственный* элемент множества B, а каждому элементу множества B можно указать *хотя бы* один элемент множества A, называется отображением множества A **на** множество B

Во множество
«инъекция»
Соответствие, при котором каждому элементу множества A соответствует *единственный* элемент множества B, а каждому элементу B соответствует *не более* одного прообраза из A, называется отображением множества A **во** множество B

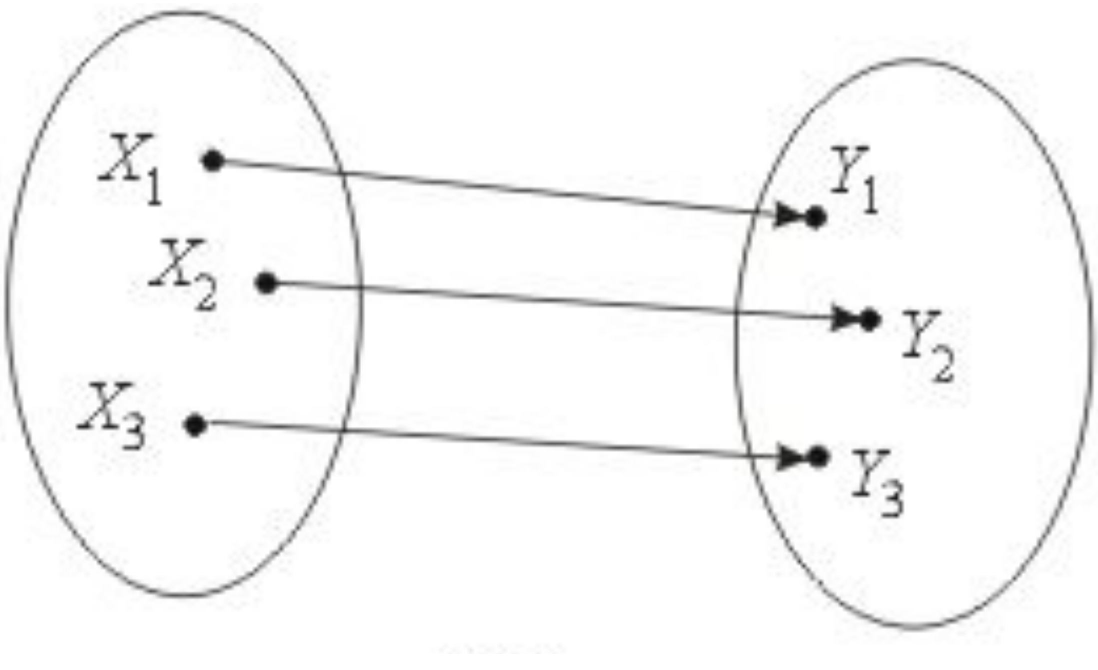
Инъекция



Сюръекция



Отображение множества А ***на*** *множество В, при котором каждому элементу множества В соответствует единственный элемент множества А, называется* ***взаимно-однозначным соответствием*** *между двумя множествами, или* ***биекцией****.*



Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить биективное отображение.

Это обозначается следующим образом:

$$A \sim B.$$

Пусть множество А отображается взаимно-однозначно на множество В, т.е f:А□В. Тогда отображение f $^{-1}$, при котором каждому элементу множества В ставится в соответствие его прообраз из множества А, называется ***обратным отображением*** *для f и записывается*

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ *или f $^{-1}$:В□А.*

Так как одному образу при биекции соответствует в точности один прообраз, обратное отображение будет определено всюду на В и однозначно (отсюда название).

Для биекции принята запись: $A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B.$

Если между элементами множеств установлено взаимно-однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковое количество элементов.

Говорят, что они равносильны, равномощны, или эквивалентны.

***Рассмотрим примеры отображений*.**

1) Каждому действительному числу поставим в соответствие его квадрат.

Отображение x□x^2 не является взаимно-однозначным соответствием, так как для любого образа $y=x^2$ можно найти два прообраза в области определения:

$x = +\sqrt{y}$ *и* $x = -\sqrt{y}$.

Рассмотрим примеры отображений.

2) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множествами слов английского и русского языков. Такое соответствие не является однозначным, так как каждому английскому понятию соответствуют различные варианты перевода на русский язык, и наоборот.

Рассмотрим примеры отображений.

3) Различные виды кодирования (азбука Морзе, представление чисел в различных системах счисления, шифрованные сообщения) являются чаще всего примерами взаимно-однозначного соответствия между множествами.

Композиция функций.

Пусть заданы отображения $f_1: A \to B$ *и* $f_2: B \to C$. *Отображение* $f: A \to C$, *при котором каждому элементу* $x \in A$ *соответствует определенный элемент* $z \in C$, *такой, что*

$z = f_2(y)$, *где* $y = f_1(x)$, *называется произведением, композицией, или суперпозицией отображений*

f_1 *и* f_2.

Отображение $e: A \to A$ называется **тождественным** (**единичным**), если каждому аргументу оно ставит в соответствие себя.

Очевидно, такое отображение можно задать на любом непустом множестве.

Если $e(x) = x$, то $E(e) = D(e) = A$.

Очевидно, что отображение, обратное единичному, также единичное.