09.12 Успех и неудача.

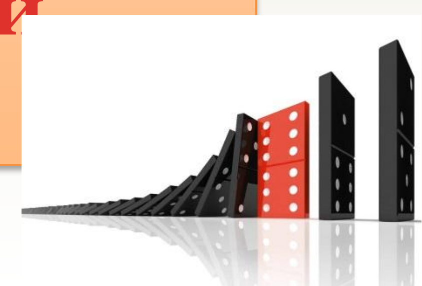
Число успехов в испытаниях Бернулли.

д/з на 09.12

елать конспект слайды 1-17 ,

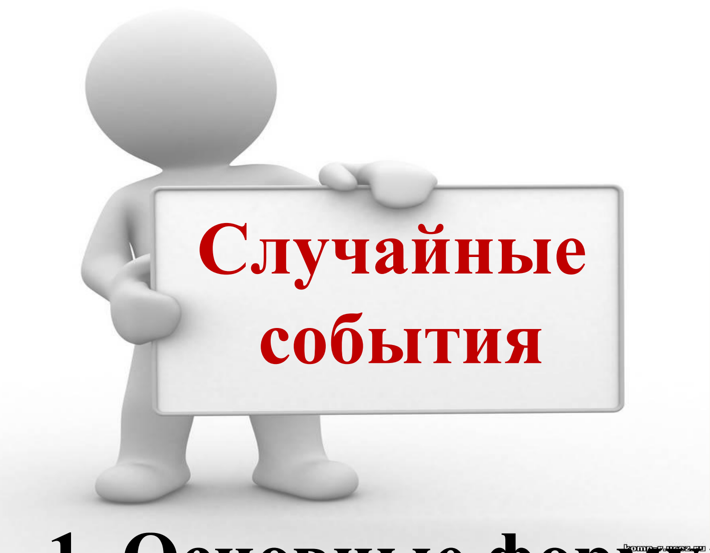
ереписав решение задач и

добавить теорию



Теория вероятностей

Теория вероятностей



Формулы

1. Основные формулы комбинаторики

а) **перестановки**

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n$$

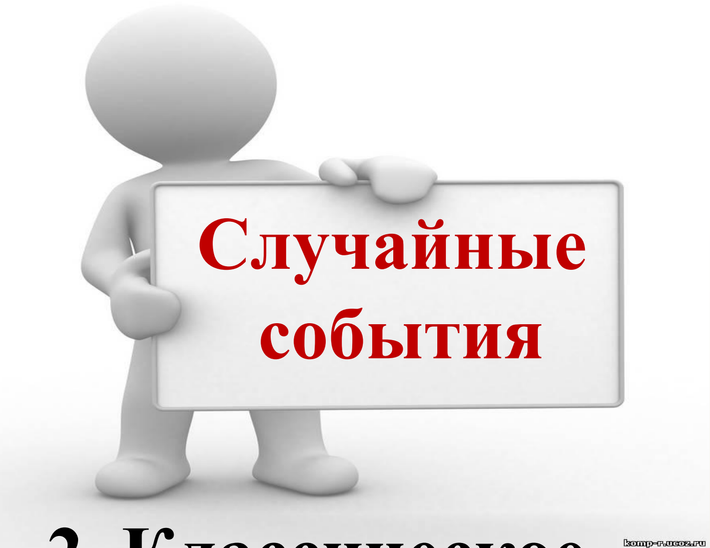
б) **размещения**

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

в) **сочетания**

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Теория вероятностей



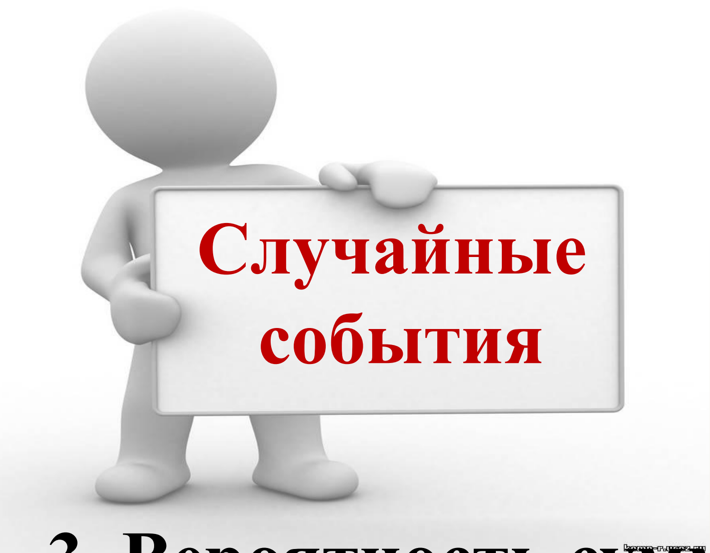
Формулы

2. Классическое определение вероятности

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

, где m – число благоприятствующих событию А исходов, n – число всех элементарных равновозможных исходов

Теория вероятностей



Формулы

3. Вероятность суммы событий

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теория вероятностей

Формулы

4. Вероятность произведения событий

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B|A)$$

$$P(A\cdot B) = P(B)\cdot$$

Сочетания

Задача. Сколькими способам можно вывезти со склада *10* ящиков на двух автомашинах, если на каждую автомашину грузят по *5* ящиков?

Решение. $n=10$, $r = 5$, *порядок не важен*, *повторений нет*.

Нужна формула: Сочетания

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Размещения

Задача. Расписание одного дня состоит из *5* уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из *11* дисциплин.

Решение.

$n = 11$, $r = 5$, *порядок важен* (уроки идут по порядку), *повторений нет*.

Нужна формула: Размещения

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Перестановки

Задача. Сколькими способами 4 человека могут разместиться в четырехместном купе?

Решение.

n = 4, r = 4 , *порядок важен (места в купе различны), нужно выбрать все объекты, повторений нет.*

Нужна формула: Перестановки $\boxed{P_n = n!}$

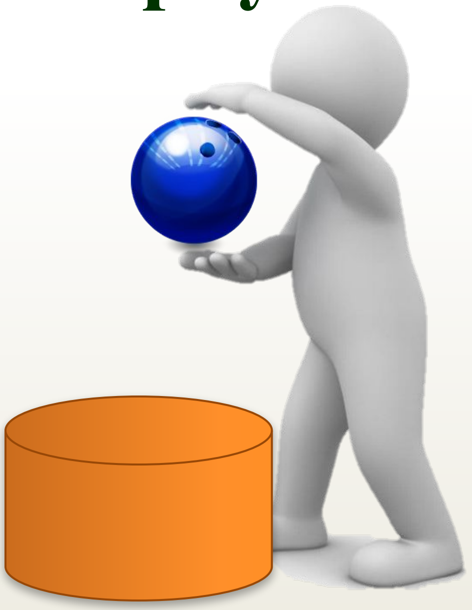
$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Независимые испытания. Формула Бернулли

При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется ***схемой повторных независимых испытаний*** или ***схемой Бернулли***.

Независимые испытания. Формула Бернулли

Примеры повторных испытаний:



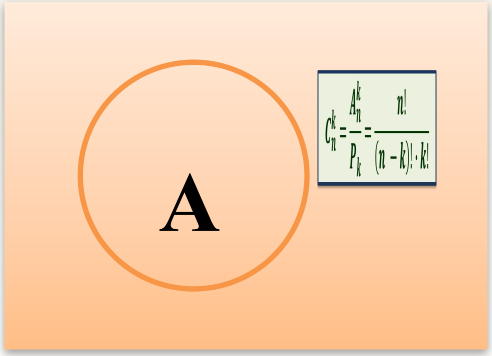
1) <u>многократное извлечение</u> из урны одного шара при условии, что вынутый шар после регистрации его цвета кладется обратно в урну;

2) <u>повторение</u> одним стрелком выстрелов по одной и той же мишени при условии, что вероятность удачного попадания при каждом выстреле принимается одинаковой

Независимые испытания. Формула Бернулли

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях).



Независимые испытания. Формула Бернулли

Сумма вероятностей всегда равна **1**.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Тогда вероятность того, что событие *A* появится в этих *n* испытаниях ровно *k* раз, выражается ***формулой Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Распределение числа успехов (появлений события) носит название ***биномиального распределения***.

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании.

Примеры:

Пример 1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Найти вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется 2 белых.

Решение. Событие A – достали белый шар.

Тогда вероятности $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$

По формуле Бернулли требуемая вероятность равна

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

Примеры:

Пример 2. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение.

Вероятность рождения девочки $p = \frac{1}{2}$, тогда $q = \frac{1}{2}$

Найдем вероятности того, что в семье нет девочек, родилась одна, две или три девочки:

$P_5(0) = q^5 = \frac{1}{32}$ $P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5}{32}$ $P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{10}{32}$ $P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{10}{32}$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) = \frac{13}{16}$$

Примеры:

Пример 3. Среди деталей, обрабатываемых рабочим, бывает в среднем 4% нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 30 деталей две будут нестандартными.

Решение. Здесь опыт заключается в проверке каждой из 30 деталей на качество. Событие А - «появление нестандартной детали», его вероятность p = 0,004 ,тогда q = 0,96. Отсюда по формуле Бернулли находим

$$P_{30}(2) = C_{30}^{2} \cdot 0,04^{2} \cdot 0,96^{28} \approx 0,202$$

Примеры:

Пример 4. При каждом отдельном выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,9. Найти вероятность того, что из 20 выстрелов число удачных будет не менее 16 и не более 19.

Решение. Вычисляем по формуле Бернулли:

$$P_{20}(16 \le k \le 19) = P_{20}(16) + P_{20}(17) + P_{20}(18) + P_{20}(19) =$$

$$= C_{20}^{16} \cdot 0{,}9^{16} \cdot 0{,}1^{4} + C_{20}^{17} \cdot 0{,}9^{17} \cdot 0{,}1^{3} + C_{20}^{18} \cdot 0{,}9^{18} \cdot 0{,}1^{2} +$$

$$+ C_{20}^{19} \cdot 0{,}9^{19} \cdot 0{,}1 \;= 4{,}508 \cdot 0{,}9 = 0{,}834$$

Наивероятнейшее число успехов

Биномиальное распределение (распределение по схеме Бернулли) позволяет, в частности, установить, какое число появлений события А наиболее вероятно. Формула для наиболее вероятного числа успехов (появлений события) имеет вид:

$$np - q \le k \le np + p.$$

Так как $np - q = np + p - 1$ то эти границы отличаются на 1.

Поэтому *k* являющееся целым числом, может принимать либо одно значение, когда *np* целое число ($k=np$) , то есть когда *np+p (*а отсюда и *np-q)* нецелое число, либо два значения, когда *np-q* целое число

Пример. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. Здесь $n = 50,\ p = 0,9,\ q = 1 - p = 0,1$. Поэтому имеем неравенства:

$$50 \cdot 0,9 - 0,1 \le k \le 50 \cdot 0,9 + 0,9,$$

$$44,9 \le k \le 45,9.$$

Следовательно, $k = 45$.

Пример. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания в отдельном выстреле составляет 0,7?

Решение. Здесь $k = 16, p = 0,7, q = 0,3$.

Составляем неравенства

$$0,7n - 0,3 \le 16 \le 0,7n + 0,7,$$

откуда

$$0,7n \le 16,3,\ n \le 23\frac{2}{7} \text{ и } 0,7n \ge 15,3,\ n \ge 21\frac{6}{7}$$

Таким образом, число всех выстрелов здесь может быть 22 или 23.

Случайные величины

Случайной величиной называют любую числовую величину, связанную со случайным экспериментом.

Случайной она называется потому, что до эксперимента невозможно точно предсказать то значение, которое эта величина примет в результате эксперимента - это выясняется только тогда, когда эксперимент завершен.

Случайной выборкой называют множество случайно выбранных объектов генеральной совокупности.

Поскольку каждый такой объект описывается обычно набором числовых характеристик, то выборка предстает перед нами в виде одного или нескольких числовых рядов.

Располагая понятием случайной величины, мы можем рассматривать случайную выборку как **последовательность наблюдений за одной или несколькими случайными величинами.**

Таким образом, **случайная величина** представляет собой функцию, определенную на множестве всех возможных исходов опыта: областью определения этой функции является множество всех возможных исходов W, а значениями - числа (целые или действительные).

Случайные величины

Ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	....	x_n
p_i	p_1	p_2	....	p_n

Сумма вероятностей всегда равна **1**.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Для введения дисперсии можно привести следующий **пример**.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайно величины вокруг ее среднего значения.

Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. Именно такие задачи решает дисперсия.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание случайной величины

Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

вероятность появления события ровно k раз при n независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании.

Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим случайную величину X. Ее математическое ожидание обычно обозначают $\mathrm{E}(X)$.

Пусть распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей:

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Определение. ***Математическим ожиданием*** случайной величины X называют число

$$\mathrm{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание $\mathrm{E}(X)$ называют также ***ожидаемым значением*** случайной величины X, ***средним значением*** случайной величины X.

Если значения случайной величины измеряются в каких-либо единицах (например, рост — в сантиметрах, температура — в градусах), то ее математическое ожидание измеряется в этих же единицах (средний рост — в сантиметрах, средняя температура — в градусах).

Математическое ожидание случайной величины

Пример. Возьмем в качестве случайной величины X число очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятности выпадения каждой грани одинаковы и равны $\frac{1}{6}$.

Поэтому

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Этот пример показывает, что если все значения случайной величины равновероятны, то **математическое ожидание — это просто среднее арифметическое значений.**

Дисперсия случайной величины

$$D(X) = M\left(\left[X - M(X)\right]^2\right) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2$$

Для дискретной случайной величины X , заданной рядом распределения:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$$

Распределения случайных величин

- **Биномиальное распределение (дискретное)**

X - количество «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них равна p · q =1− p .

Закон распределения X имеет вид:

x_k	0	1	…..	k	…..	n
p_k	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Задание на самоподготовку:

п. 49-52,
стр. 192 № 2, 3, 4

Ссылки:

1. http://www.matburo.ru/
2. http://www.zhaba.ru/site_data/10667/objects_images/c/8/d/original/c8de6924b2c95f28b69b8532abd50a5e_57512.jpg
3. http://legalpaper.com.ua/wp-content/uploads/2012/09/klipart_chelovek_kniga_ogromnyy_chtenie_znanie_19519_1280x1024.jpg
4. http://nevseoboi.com.ua/uploads/posts/2010-03/thumbs/1267705874_3d-humans-3.jpg
5. 11 класс. МКОУ «Усть-Мосихинская СОШ». Новосёлова Е.А.
6. Шабалина Надежда Ивановна chabalina7@mail.ru