Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

*

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции y=f(x) на отрезке.

1) Найти производную $f^{/}(x)$.

2) Найти критические точки (в которых производная равна 0 или не существует) , взять те, которые принадлежат данному отрезку.

3) Вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка.

4) Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее .

Таблица производных.

1) $(c)' = 0$

2) $(cx)' = c$

3) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6) $(\cos x)' = -\sin x$

7) $(\sin x)' = \cos x$

8) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10) $(e^x)' = e$

11) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Правила дифференцирования:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(u(x)) = f'(u)\cdot u'(x)$$

*

Алгоритм	Пример 1: Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x - 7$ на отрезке $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$
1. Найти $f'(x)$	$y' = 3x^2 + 4x + 1$
2. Найти критические точки(в которых производная равна 0 или не существует) , взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0$ $x_1 = -1 \in \left[-3; -\frac{1}{2}\right]; x_2 = -\frac{1}{3} \notin \left[-3; -\frac{1}{2}\right]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(-3) = -27 + 18 - 3 - 7 = -19$ $y(-1) = -1 + 2 - 1 - 7 = -7$ $y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 7 = -7\frac{1}{8}$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее	$y_{наиб} = -7$

Алгоритм	Пример 2: Найдите наименьшее значение функции y = x^4 -5x^2 -10 на отрезке $[-4;1]$
1. Найти $f^{/}(x)$	$y' = 4x^3 - 10x$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 10x = 0 \Rightarrow 2x\left(2x^2 - 5\right) = 0$ $x_1 = 0 \in [-4;1]; x_2 = -\sqrt{2,5} \in [-4;1];$ $x_3 = \sqrt{2,5} \notin [-4;1]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(-4) = 256 - 80 - 10 = 166$ $y(-\sqrt{2,5}) = 6,25 - 12,5 - 10 = -16,25$ $y\left(0\right) = 0 - 0 - 10 = -10$ $y\left(1\right) = 1 - 5 - 10 = -14$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее *	$y_{наим} = -16,25$

Алгоритм	Пример 3: Найдите наименьшее значение функции y = (1-x)(x-4)^2 на отрезке $[0;3]$ $(1-x)(x-4)^2 = (1-x)(x^2-8x+16) = -x^3+9x^2-24x+16$
1. Найти f $^/$(x)	$y' = -3x^2+18x-24$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$x\,y' = 0 \Rightarrow x\, -3\;{}^2 + 18\; - 24 = 0 \Rightarrow$ $x^2 - 6x + 8 = 0$ $x_1 = 2 \in [0;3];\ x_2 = 4 \notin [0;3]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(0) = 1\cdot 16 = 16$ $y(2) = -1\cdot 4 = -4$ $y(3) = -2\cdot 1 = -2$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее	$y_{наим} = -4$

Алгоритм	Пример 4: Найдите наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+16}{x}$ на отрезке $[2;8]$
1. Найти $f^{/}(x)$	$y^{/}=\left(x+\dfrac{16}{x}\right)'=1-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{x^2-16}{x^2}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y'=0\Rightarrow\dfrac{x^2-16}{x^2}=0\Rightarrow$ $x^2-16=0; x\neq 0$ $x_1=4\in[2;8]; x_2=-4\notin[2;8]; x=0\notin D(y)$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(2)=\dfrac{4+16}{2}=10$ $y(4)=\dfrac{16+16}{4}=8$ $y(8)=\dfrac{64+16}{8}=10$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее	$y_{наим}=8$

Алгоритм	Пример 5: Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{16 - x^3}{x}$ на отрезке $[-4;-1]$
1. Найти f $^{/}$(x)	$y' = \left(\frac{16 - x^3}{x}\right)' = \left(\frac{16}{x} - \;^2\right)' = -\frac{16}{x^2} - 2$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow -\frac{16}{x^2} - 2 \;= 0 \Rightarrow$ $-16 - 2x^3 = 0, x \neq 0 \Rightarrow x^3 = -8$ $x = -2 \in [-4;-1]; x = 0 \notin D(y)$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(-4) = \frac{16 + 64}{-4} = -20$ $\quad y(-2) = \frac{16 + 8}{-2} = -12$ $y(-1) = \frac{16 + 1}{-1} = -17$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее	$y_{наиб} = -12$

*

Алгоритм	Пример 6: Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 1$ на отрезке $\left[9;25\right]$
1. Найти $f^{/}(x)$	$y^{/} = \left(x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 4$ $x = 16 \in \left[9;25\right]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(9) = 9\cdot 3 - 6\cdot 9 + 1 = 27 - 54 + 1 = -26$ $y(19) = 16\cdot 4 - 6\cdot 16 + 1 = 64 - 96 + 1 = -31$ $y(25) = 25\cdot 5 - 6\cdot 25 + 1 = 125 - 150 + 1 = -24$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее	$y_{наим} = -31$

*

Алгоритм	Пример 7: Найдите наибольшее значение функции $y = 5-(x-14)\sqrt{x+13}$ на отрезке $[-9;3]$
1. Найти $f'(x)$	$y' = (5)' - (x-14)' \cdot \sqrt{x+13} - (x-14)\left(\sqrt{x+13}\right)' =$ $-\sqrt{x+13} - \dfrac{(x-14)}{2\sqrt{x+13}} = -\dfrac{2x+26+x-14}{2\sqrt{x+13}} = -\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+13}}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow -\dfrac{3x+12}{2\sqrt{x+13}} = 0 \Rightarrow 3x+12 = 0$ $x = -4 \in [-9;3]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(-9) = 5+23\cdot\sqrt{4} = 5+46 = 51$ $y(-4) = 5+18\cdot\sqrt{9} = 5+54 = 59$ $y(3) = 5+11\cdot\sqrt{16} = 5+44 = 49$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее *	$y_{наиб} = 59$

Алгоритм	Пример 8: Найдите наибольшее значение функции $y = 38x - 38tgx + 20$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
1. Найти f $^{/}$(x)	$y' = 38 - \frac{38}{\cos^2 x}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow 38 - \frac{38}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$ Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ принадлежит x=0.
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(0) = 38 \cdot 0 - 38 \cdot tg0 + 20 = 20$ $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 38 \cdot \frac{\pi}{4} - 38 \cdot tg\frac{\pi}{4} + 20 = 9{,}5\pi - 18$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее	$y_{наиб} = 20$

*

Алгоритм	Пример 9: Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
1. Найти $f'(x)$	$y' = 2\cos x - \sqrt{3}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 0 \Rightarrow 2\cos x - \sqrt{3} = 0; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ Отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит точка $x = \frac{\pi}{6}$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(0) = 2\sin 0 - \sqrt{3}\cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7 = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7 = 1 + 7 = 8$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7 = 9 - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее *	$y_{наиб} = 8$

Алгоритм	Пример 10: Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \frac{12}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3};0\right]$.
1. Найти f /(x)	$y' = -2\sin x - \frac{12}{\pi}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку. Если их нет , определить знак производной на данном отрезке.	$y' = 0 \Rightarrow -2\sin x - \frac{12}{\pi} = 0$ Уравнение не имеет решений, производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является значение в начале отрезка.
3. Вычислить значения функции в начале отрезка. *	$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 4 =$ $= -2\cdot\frac{1}{2} + 8 + 4 = 11$ $y_{наиб} = 11$ 13

Алгоритм	Пример 11: Найдите наименьшее значение функции $y = 13\cos x + 17x + 21$ на отрезке $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.
1. Найти f $^{/}$(x)	$y' = -13\sin x + 17$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку. Если их нет , определить знак производной на данном отрезке.	$y' = 0 \Rightarrow -2\sin x + 17 = 0$ Уравнение не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является значение функции в начале отрезка.
3. Вычислить значения функции в начале отрезка. *	$y(0) = 13\cos(0) + 17 \cdot 0 + 21 = 13 + 21 = 34$ $y_{наим} = 34$

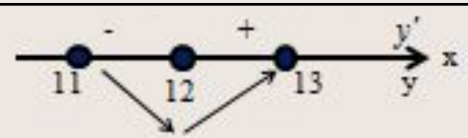
Алгоритм	Пример 12: Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+8)^3-3x$ на отрезке $[-7{,}5;0]$.
1. Найти $f'(x)$	$y'=(3\ln(x+8)-3x)'=\dfrac{3}{x+8}-3$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y'=0\Rightarrow\dfrac{3}{x+8}-3=0\Rightarrow 3-3x-24=0$ $x=-7\in[-7{,}5;0]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(-7{,}5)=\ln\dfrac{1}{8}+22{,}5=22{,}5-\ln 8$ $y(-7)=0+21=21$ $y(0)=3\ln 8$
4. Из вычисленных значений выбрать наибольшее	$y_{наиб}=21$

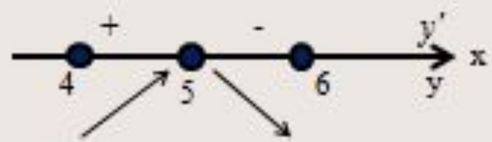
*

Второй способ решения

Этим способом будет удобно воспользоваться, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным.

Алгоритм	Пример 13: Найдите наименьшее значение функции $y=5x-\ln(x+8)^5$ на отрезке $[-7{,}5;0]$.
1. Найти f /(x)	$y'=\left(5x-5\ln(x+8)\right)'=5-\dfrac{5}{x+8}$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y'=0\Rightarrow 5-\dfrac{5}{x+8}=0\Rightarrow 5x+40-5=0$ $x=-7\in[-7{,}5;0]$
3. Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции.	 В точке x= -7 заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке.
4. Вычислить значения функции в критической точке – это наименьшее значение функции. *	$y(-7)=-35+0=-35$ $y_{наим}=-35$

Алгоритм	Пример 14: Найдите наименьшее значение функции $y=(x-13)e^{x-12}$ на отрезке $[11;13]$.
1. Найти $f'(x)$	$y'=(x-13)'\cdot e^{x-12}+(x-13)(e^{x-12})'=e^{x-12}+(x-13)e^{x-12}=$ $=e^{x-12}(x-12)$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y'=0, e^{x-12}(x-12)=0\Rightarrow x=12\in[11;13]$
3. Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции.	 В точке x= 12 заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке.
4. Вычислить значения функции в критической точке – это наименьшее значение функции. *	$y(12)=(12-13)\cdot e^{12-12}=-1$ $y_{наим}=-1$

Алгоритм	Пример 15: Найдите наибольшее значение функции $y=6+(x-7)^2e^{x-5}$ на отрезке $[4;6]$.
1. Найти f $^{/}$(x)	$y'=(6)'+(x^2-14x+49)'\cdot e^{x-5}+(x^2-14x+49)(e^{x-5})'=$ $(2x-14)e^{x-5}+(x^2-14x+49)e^{x-5}=e^{x-5}(x^2-12x+35)$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y'=0, e^{x-5}(x^2-12x+35)=0\Rightarrow$ $x_1=5\in[4;6], x_2=7\notin[4;6]$
3. Определим знаки производной функции на заданном отрезке, и изобразим на рисунке поведение функции.	 В точке x= 5 заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке.
4. Вычислить значения функции в критической точке – это наибольшее значение функции. *	$y(5)=6+(5-7)^2\cdot e^{5-5}=6+4=10$ $y_{наиб}=10$