Лекция 3.

Методика моделирования дискретных и непрерывных случайных величин

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Моделирование дискретных случайных величин.

2. Моделирование непрерывных случайных величин.

Вопрос 1.

Моделирование дискретных случайных величин

1.1. Алгоритм моделирования дискрет-ной случайной величины

Допустим, что нам нужно получить значения случайной величины (СВ) ξ со следующим распределением:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Разобьем отрезок $[0;1]$ на n интервалов, длины которых равны соответственно:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n.$$

Координатами точек деления будут величины:

$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = p_1;$$
$$x_3 = p_1 + p_2;$$
$$\ldots$$
$$x_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}.$$

Полученные интервалы пронумеруем от 1 до n. Работа алгоритма проиллюстрирована на рис.1.

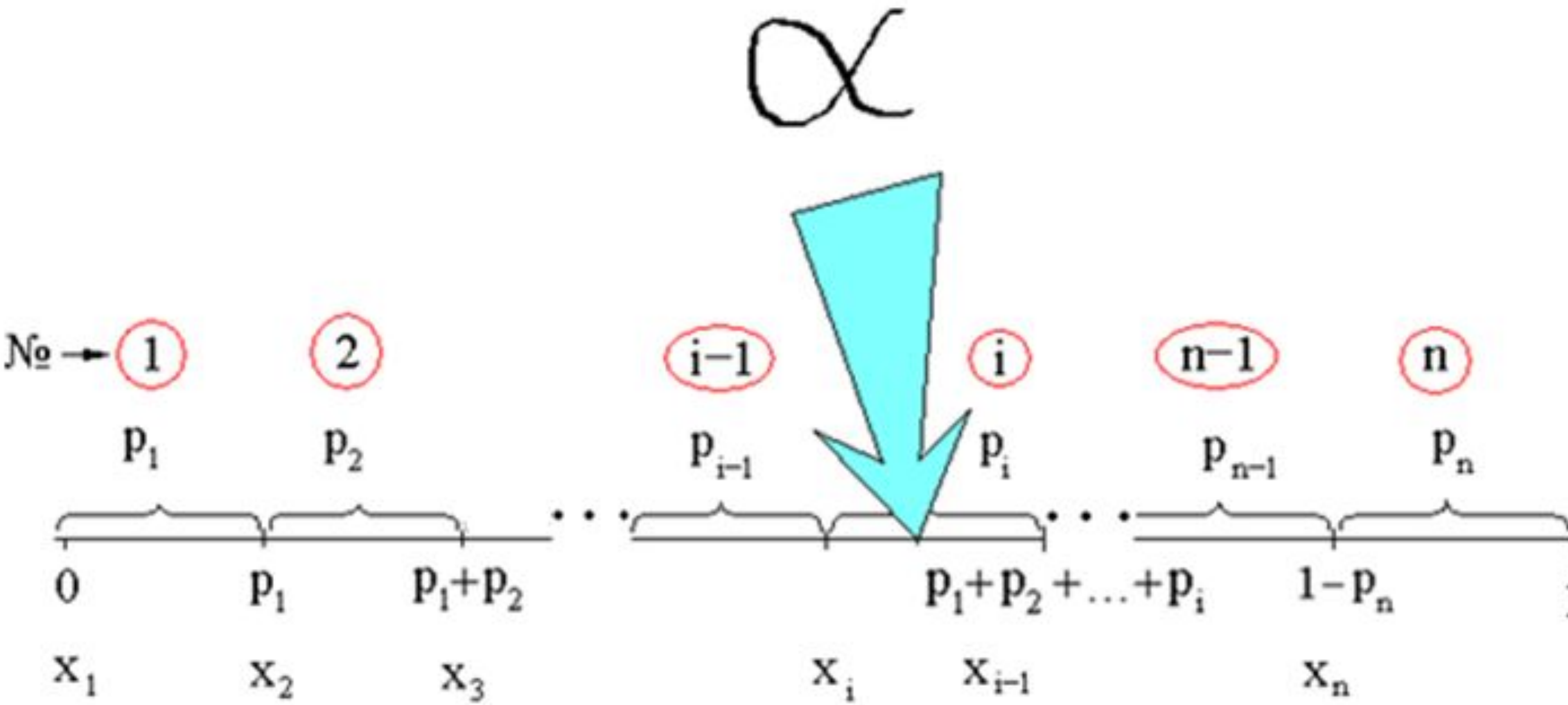


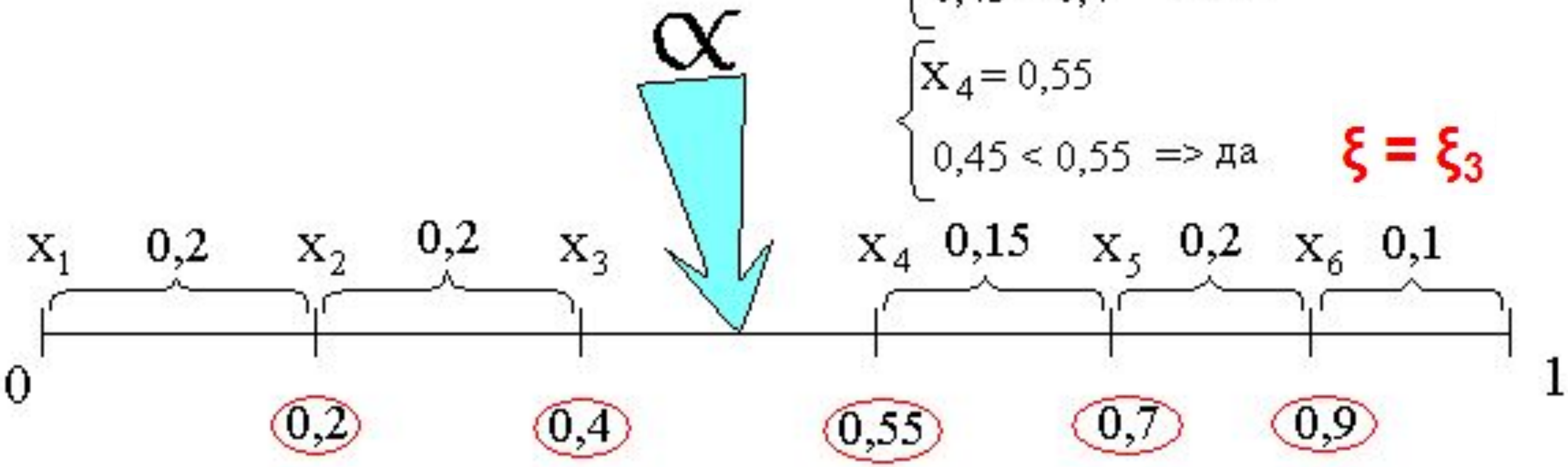
Рис. 1

Например $\alpha = 0{,}45$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}2 \\ 0{,}45 < 0{,}2 \quad \Rightarrow \text{нет} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}4 \\ 0{,}45 < 0{,}4 \quad \Rightarrow \text{нет} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0{,}55 \\ 0{,}45 < 0{,}55 \quad \Rightarrow \text{да} \end{cases} \qquad \xi = \xi_3$$



$$0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$$

Рис. 2

Для получения значения дискретной СВ (ДСВ) ξ необходимо выбрать значение БСВ α и построить точку $x = \alpha$.

Номер интервала i, в который попадет БСВ α, определит значение ДСВ в данном опыте: $\xi = \xi_i$.

Так как БСВ **α** равномерно распределена в полуинтервале [0,1), то вероятность того, что **α** окажется в некотором его отрезке, равна длине этого отрезка. Значит,

$$
\begin{aligned}
&P\{0 \le \alpha < p_1\} = p_1 \\
&P\{p_1 \le \alpha < p_1 + p_2\} = p_2 \\
&\vdots \\
&P\{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} \le \alpha < 1\} = p_n
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

Согласно нашей процедуре $\xi = \xi_i$ тогда, когда выполняется неравенство:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} \le \alpha < p_1 + p_2 + \dots + p_i \qquad (1.3)$$

В правой части строгое неравенство, т. к. правая граница последнего отрезка равна 1, а БСВ $\alpha<1$.

Для моделирования последовательности ДСВ необходимо повторить алгоритм несколько раз.

1.2. Моделирование полной группы случайных событий

Определение. Совокупность событий называется полной группой случайных событий, если:

а) происходит хотя бы одно событие из группы;

б) совместное наступление двух и более событий из группы невозможно;

в) события группы имеют ненулевые вероятности своего наступления.

Пример.

В случайном эксперименте по бросанию монеты полную группу образуют два события:

A_1 – "выпадение орла";

A_2 – "выпадение решки".

1.3. Моделирование процесса случайного блуждания

Пусть ξ_t – случайный процесс с дискретным временем

$$\tau = m \cdot \Delta t \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

и дискретным фазовым пространством состояний X:

$$X = \{x + k \cdot \Delta x\}$$

где $k = \{-1; 0; 1\}$;

$\Delta t > 0$ – шаг дискретизации времени;

$\Delta x > 0$ – шаг дискретизации фазового пространства.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ процесс находится в состоянии x, т.е. $\xi_t = x$, а в следующий момент времени $t + \Delta t$ состояние процесса определяется соотношениями:

$$\xi_{t+\Delta t} = \begin{cases} x + \Delta x & \text{с вероятностью } P_+ \\ x - \Delta x & \text{с вероятностью } P\_ \\ x & \text{с вероятностью } (1 - P_+ - P\_) \end{cases} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Такой процесс называется процессом случайного блуждания на прямой.

Согласно (1.4) можно записать:

$$\xi_{t+\Delta t} = x + \eta_t \qquad \textbf{(1.5)}$$

$\eta_t \in \{-\Delta x; 0; \Delta x\}$ – ДСВ с распределением вероятностей

$$\begin{cases} P\{\eta_t = -\Delta x\} = P\_ \\ P\{\eta_t = 0\} = 1 - P_+ - P\_ \\ P\{\eta_t = \Delta x\} = P_+ \end{cases} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Тогда моделирование процесса ξ_t сводится к моделированию в каждый момент времени $t+\Delta t$ реализации СВ η_t и использованию соотношения (1.5).

Вопрос 2.

Моделирование непрерывных случайных величин

2.1. Метод обратной функции

При построении имитационной модели сложной системы часто необходимо моделировать непрерывную СВ (НСВ) с заданной плотностью распределения вероятностей.

Например, интервалы времени между моментами поступления заявок в СМО, время обслуживания и т.п.

В некоторых случаях для решения данных задач применяют метод обратной функции.

Рассмотрим функцию распределения случайной величины:

$$y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad \textbf{(2.1)}$$

Обозначим через $x=F^{-1}(y)$ функцию, обратную функции $F(x)$.

Теорема.

Если α – базовая случайная величина, то случайная величина $\xi=F^{-1}(\alpha)$ имеет заданную плотность распределения $f_{\xi}(x)$.

Моделирующий алгоритм, реализующий метод обратной функции, включает следующие этапы:

1) нахождение функции распределения $F(x)$ по заданной плотности распределения $f(x)$ согласно (2.1);

2) нахождение обратной функции $F^{-1}(y)$;

3) моделирование реализации БСВ $\boldsymbol{\alpha}$ и вычисление СВ $\boldsymbol{\xi}$ по формуле $\xi=F^{-1}(\alpha)$.

Пример 1.

Дана плотность экспоненциального распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ \ \mathrm{x} < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ \textit{если} \ \ \mathrm{x} \geq 0 \end{cases}$$

1) Определяем функцию экспоненциального распределения:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \textbf{(2.2)}$$

2) Определяем обратную функцию:

$$x = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y) \qquad \textbf{(2.3)}$$

3) Для моделирования экспоненциально-распределенной СВ ξ используем формулу:

$$\xi = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha) \qquad \textbf{(2.4)}$$

где α – базовая случайная величина.

Так как величины α и $1-\alpha$ одинаково распределены, то эквивалентно следующее:

$$\xi = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha).$$

Пример 2.

Дана плотность равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \; если \;\; \mathrm{x}\in[\mathrm{a},\mathrm{b}] \\ 0, \; если \;\; \mathrm{x}\notin[\mathrm{a},\mathrm{b}]\end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

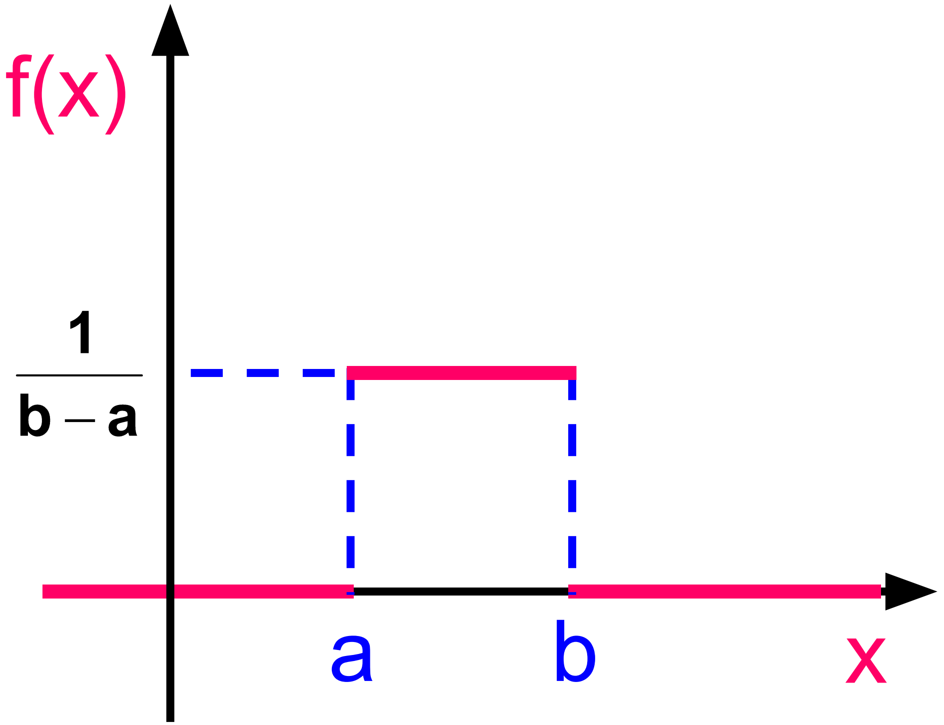


Рис. 3

1) Определяем функцию равномерного распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$= \frac{1}{b-a} x \Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b] \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases} \qquad \textbf{(2.7)}$$

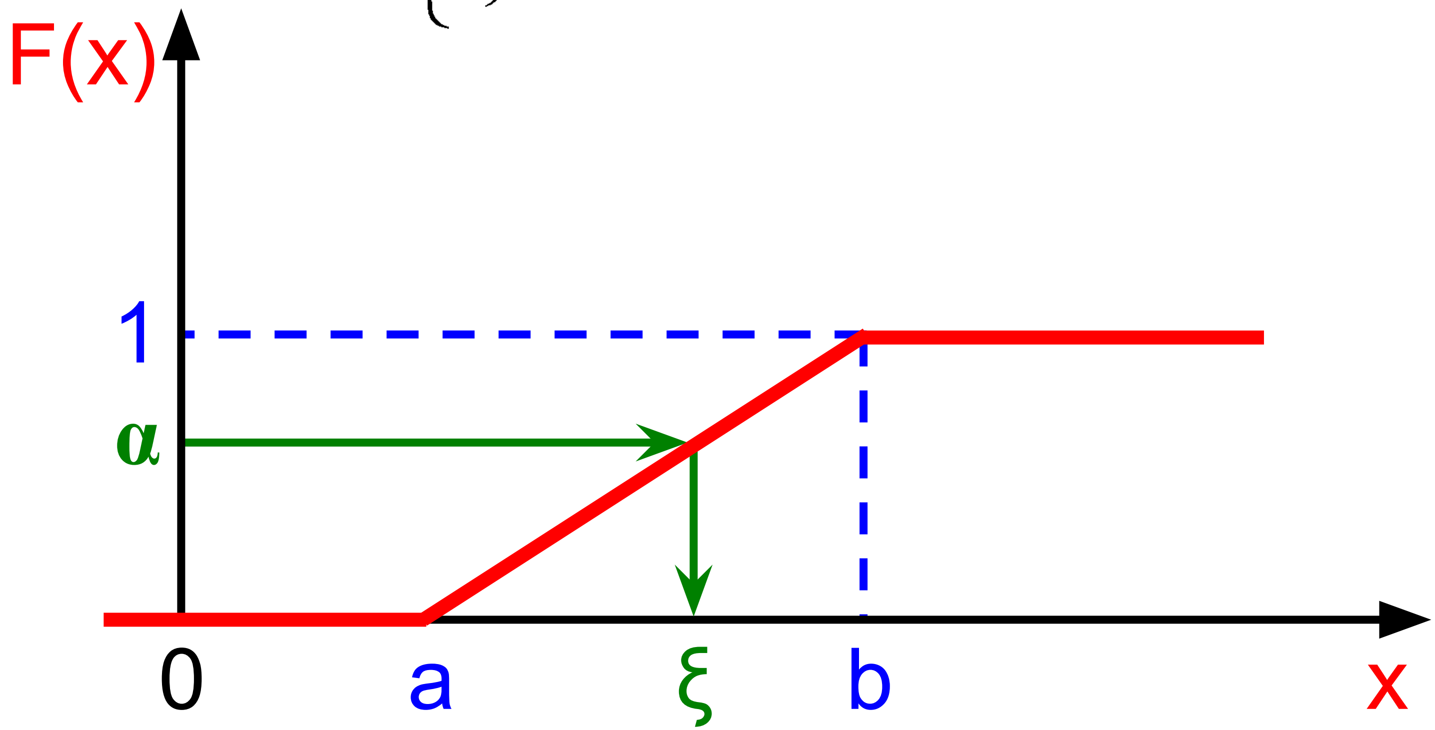


Рис. 4

2) Определяем обратную функцию:

$$x = F^{-1}(y) = a + y(b - a) \qquad \textbf{(2.8)}$$

3) Для моделирования равномерно-распределенной СВ ξ используем формулу:

$$\xi = a + \alpha(b - a) \qquad \textbf{(2.9)}$$

где α – базовая случайная величина.

2.2. Метод исключения

Используется в тех случаях, когда плотность распределения $f(x)$ моделируемой СВ ξ имеет сложный аналитический вид.

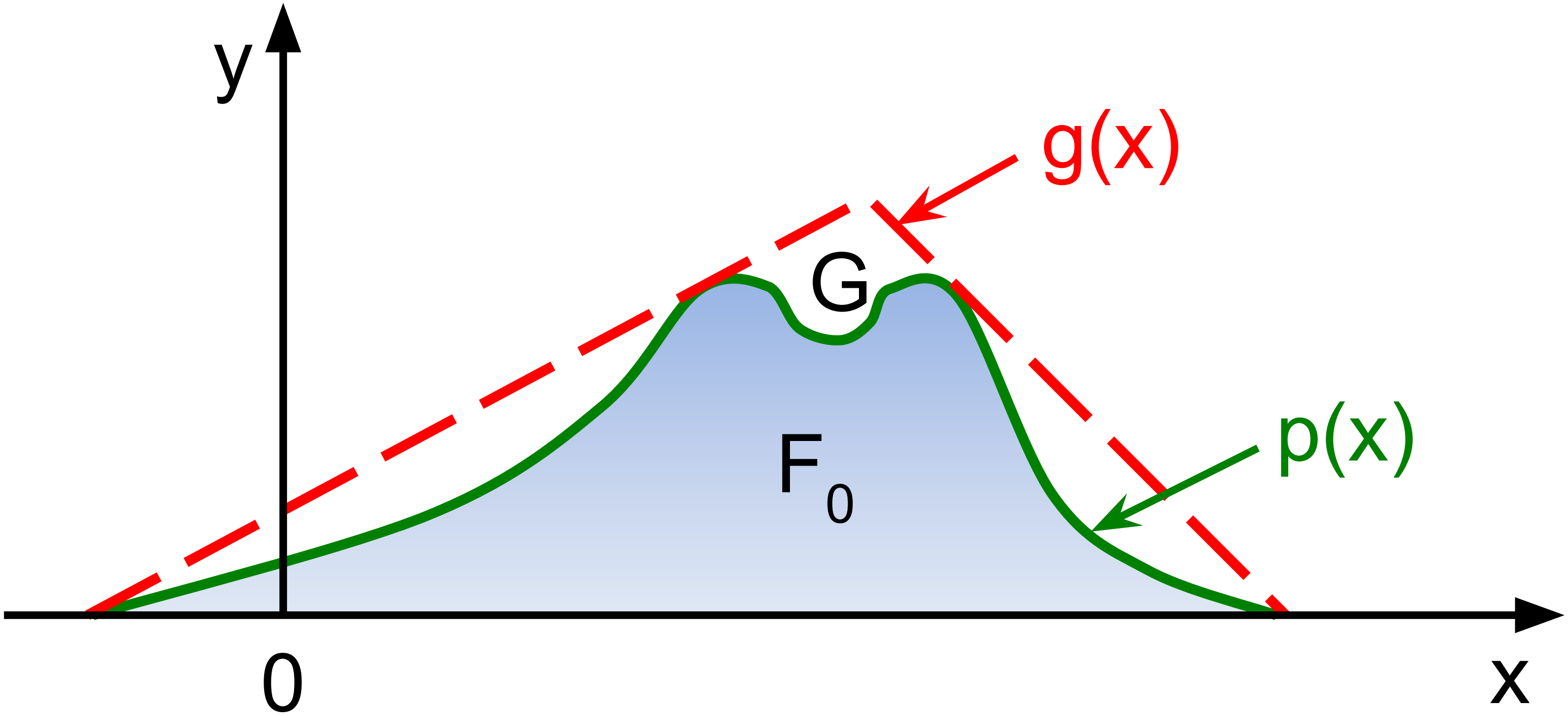


Рис. 5

Обозначим: $F_0 = \{ (x,y);\ 0 \le y \le p(x) \}$ – область, ограниченную кривой $y=p(x)$ и осью абсцисс (рис. 5).

Определим мажорантную (огибающую) функцию:

$$y=g(x);\quad g(x) \ge p(x) \ge 0$$

и область $G = \{ (x,y);\ 0 \le y \le g(x) \}$.

Область G охватывает (мажорирует) область F_0.

Функция $g(x)$ должна иметь значительно более простой, чем $p(x)$ аналитический вид, позволяющий легко моделировать случайный вектор (ξ,η), равномерно распределенный в области G (например, методом обратной функции).

Моделирующий алгоритм включает следующие этапы:

1) подбор мажорантной функции $g(x)$ для заданной $p(x)$;

2) моделирование случайного вектора (ξ, η), равномерно распределенного в области G;

3) проведение следующей процедуры:

- если (x,y) – реализация вектора (ξ,η) и $y \le p(x)$ (т.е. точка (x,y) попадает в область F_0), то x принимается в качестве реализации СВ ξ;

- если $y > p(x)$ (точка (x,y) – за пределами F_0), то реализация (x,y) исключается.

Повторяя алгоритм многократно, получаем требуемое число реализаций случайной величины ξ.

2.3. Метод суперпозиции (композиции)

При достаточно сложном виде функции $p(x)$ моделирование равномерного распределения в области F_0 трудноосуществимо.

В этом случае F_0 разбивается на простые области, моделирование равномерного распределения в которых возможно (рис. 6).

При этом вероятности попадания в области равны их площадям. Используя данные вероятности, "разыгрывают" номер области, в которой и осуществляется моделирование реализации СВ ξ.

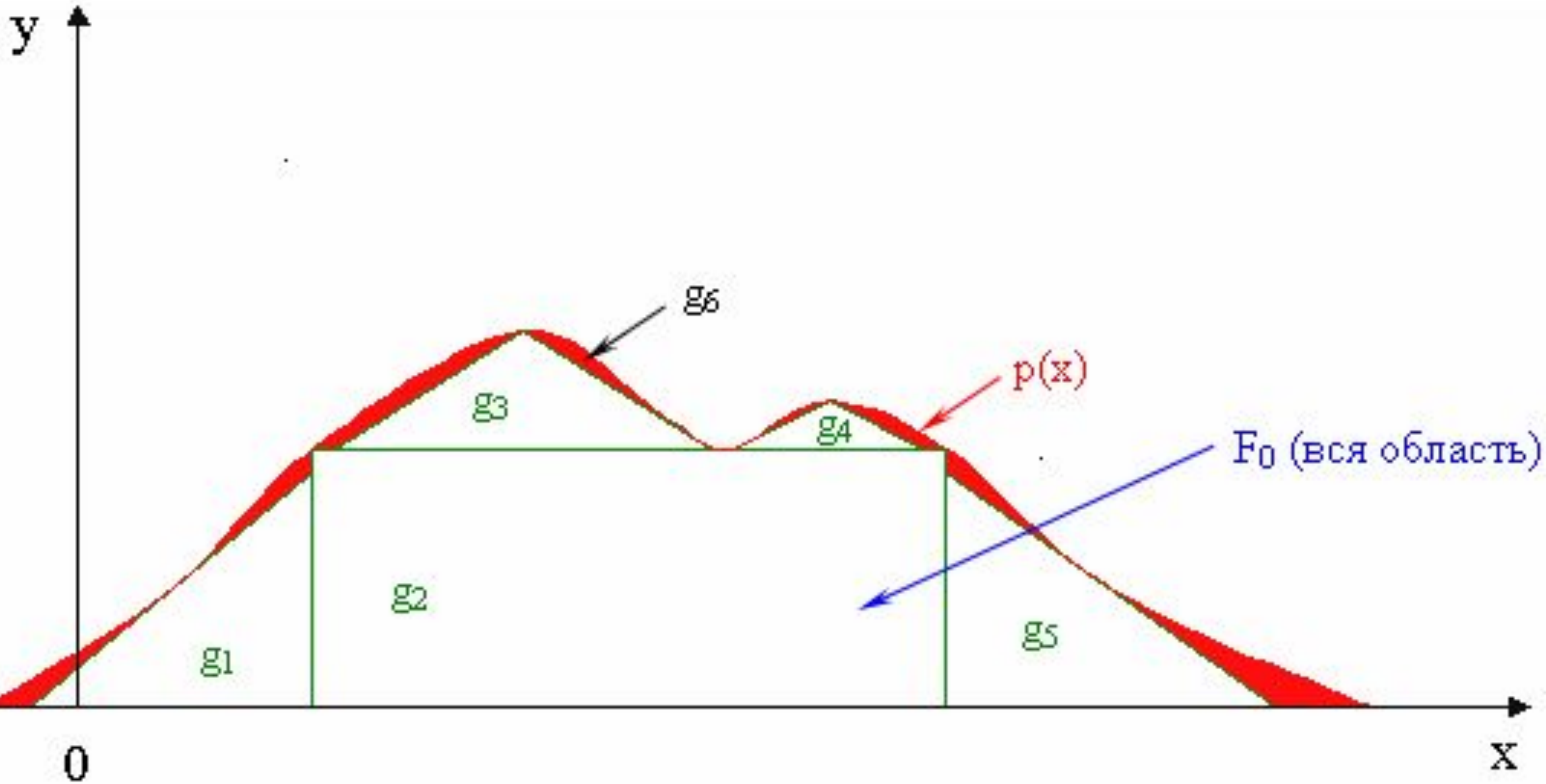


Рис. 5

На рис. 6 область F_0 разбита на 5 простых областей, шестая – ограничена огибающей и данными областями:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{6} P_i \cdot p_i(x) \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$p_6(x) = \frac{p_0(x) - \sum_{i=1}^{5} P_i \cdot p_i(x)}{P_6}$$

$$P_6 = 1 - \sum_{i=1}^{5} P_i$$

Для ускорения моделирования разбиение на области происходит так, чтобы части g_i, имеющие наибольшую площадь (наибольшую вероятность P_i), соответствовали наиболее просто и быстро моделируемым плотностям $p(x)$.

Остаточную плотность p_6 можно моделировать методом исключения.

Этапы **моделирующего алгоритма**:

1) разбиение F_0 на геометрически простые области;

2) моделирование случайного вектора (ξ, η) с координатами (x,y), равномерно распределенного в области F_0 и соответственно в выделенных областях;

3) разыгрывание значений координат случайного вектора по аналогии с разыгрыванием ДСВ и проверка соответствия вероятности их попадания в ту или иную область.