Дисциплина ЛААГ
(линейная алгебра
и аналитическая геометрия)

Кафедра высшей
математики
ТПУ

Лектор:
доцент
Тарбокова
Татьяна
Васильевна

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ ЛААГ

- Тема 1. Линейная алгебра
- Тема 2. Векторная алгебра
- Тема 3. Аналитическая геометрия на плоскости
- Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Группа:	Д-4Г21, Д-2Д2С1, Д-2К21					Кол-во работ:	
						инд. дом. заданий	4
						лабораторных	0
Семестр:	осенний, 2012/13	Преподаватель:	Тарбокова Татьяна Васильевна	Кафедра:	ВМ	курсовых	0

Учебные недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Всего баллов
	5-11 ноября	12-18 ноября	19-25 ноября	26 ноября-2 декабря	3-9 декабря	10-16 декабря	17-23 декабря	24-30 декабря	31 декабря-6 января	7-13 января	14-20 января	21-27 января	28 января-3 февраля	4-10 февраля	11-17 февраля	
Темы для изучения		Тема 1		Тема 2		Тема 3			Тема 4			Зачётная неделя		Экзаменационная сессия		
Разделы / главы учебного пособия (соответствующие темам)	1	2	3	4-8		9	10	11	12	13						
Видеолекции, учебные видеофильмы		Видео-лекция 1		Видео-лекция 2		Видео-лекция 3			Видео-лекция 4							
Дополнительные интернет-ресурсы	Ссылка 1	Ссылка 2														
Учебные занятия (вебинары) – лекции (ЛК), практики (ПР)		ЛК1		ПР1		ЛК2		ЛК3			ПР2					
Консультации (вебинары)						КС1					КС2					
Индивидуальные домашние задания			Отправка ИДЗ1 9-12бал.		Отправка ИДЗ2 8-12бал.		Отправка ИДЗ3 8-12бал.		Отправка ИДЗ4 8-12бал.							33-48
Рубежный контроль						РК 0-12										0-12
Промежуточный контроль														Зачёт		22-40
min – max баллов за неделю			8-12		8-12	0-12	8-12		8-12			33-60		22-40		=55-100

Внимание! Студент допускается к сдаче экзамена/зачёта, если до начала зачётной недели он выполнил и сдал все ИДЗ, ЛБ и набрал 33 и более баллов.

Экзаменационная/зачётная работа считается сданной,

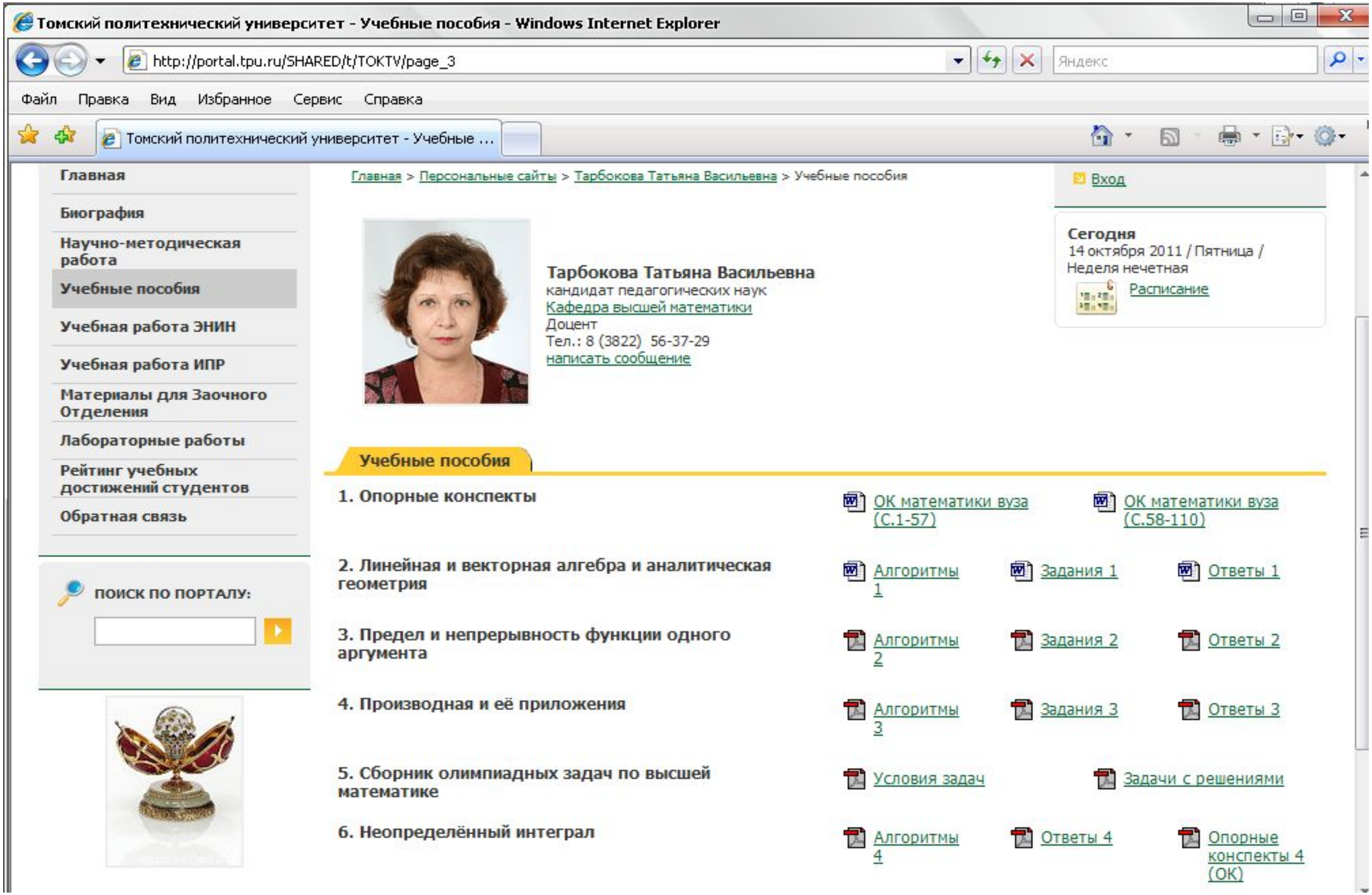
если студент набрал за неё 22 и более баллов.

Рейтинг-план дисциплины:

Учебная работа	Обозначение	Кол-во баллов	Всего баллов	Оценки
Учебные занятия – лекции (вебинары)	ЛК 1-4 ПР 1-4	0	0	
Индивидуальные домашние задания	ИДЗ 1-4	8-12	33-48	< 8– неудовл., 8-9 – удовл., 10-11 – хорошо, 12 – отлично
Рубежный контроль	РК	0-12	0-12	
Итого баллов к зачётной неделе			33-60	≥ 33 – «допуск» к экзамену (сданы все ИДЗ и ЛБ)
Экзаменационная/зачётная работа			22-40	< 22 – неудовл., 22-31 – удовл., 32-35 – хорошо, 36-40 – отлично
Итого баллов по дисциплине			55-100	≥ 55 – зачтено, < 55 – не зачтено

Дополнительные Интернет- ресурсы

Ссылка 1. http://portal.tpu.ru/SHARED/t/TOKTV/page_3



Дополнительные Интернет-ресурсы

Ссылка 2. http://portal.tpu.ru/SHARED/t/TOKTV/Page_121

Определения и теоремы курса

Лекции

- Матрицы и действия над ними
- Определители. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений
- Векторная алгебра
- Аналитическая геометрия
- Кривые и поверхности 2-го порядка
- Введение в математический анализ
- Производная функции одного аргумента
- Неопределённый интеграл

Практика

- Задачи практических занятий
- Примеры решения задач
- Образец заданий 1-й контрольной работы
- Образец заданий 2-й контрольной работы
- Образец заданий 3-й контрольной работы
- Решение задач образца КР-3
- Нахождение угла между кривыми средствами MathCAD
- Образец заданий 4-й контрольной работы

Опорные конспекты (ОК)

- Линейная и векторная алгебра
- Аналитическая геометрия
- Предел функции одного аргумента
- Производная функции одного аргумента
- Неопределённый интеграл

Индивидуальные задания (ИДЗ)

- Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия ("Уч. пособия" в меню персонального сайта)
- Введение в математический анализ ("Уч. пособия" в меню персонального сайта)

Тема 1. Линейная алгебра
Разделы

- 1. Матрицы и действия над ними
- 2. Определители и их вычисление
- 3. Системы линейных уравнений

Матрицы, определители и действия над ними

§ Матрицы и действия над ними

Определение матрицы	**Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов некоторого множества (например, чисел или функций), имеющая m строк и n столбцов. Элементы, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*.

Матрицы могут обозначаться так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \ (i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \ (i, j = \overline{1,n})$$

Виды матриц

Определение видов матриц	1. Если $m = n$, то матрицу называют *квадратной, порядка n*. 2. Если $m \neq n$, то матрицу называют *прямоугольной*. 3. Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой*. 4. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{kk} (где $k = \min\{m,n\}$) будем называть *элементами главной диагонали матрицы*. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначают: E или E_n.

6. Пусть $\mathrm{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

Элементы $a_{1\,n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ будем называть *элементами побочной диагонали матрицы*.

Произведение матриц

Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, когда число <u>столбцов</u> матрицы A равно числу <u>строк</u> матрицы B, то есть $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B.

Произведение матриц

Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк, **называется матрица, состоящая из одного элемента**, который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} = C_{1\times 1}$,

Произведение матрицы-строки на матрицу-столбец

или $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \end{pmatrix}.$

Например, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \end{pmatrix}.$

Пример

- Можно ли умножить матрицы:
- (ответьте: 1) да или нет, 2)…)?
- 1) $A = (3, -1, 0, 8) \quad B = (9, 4, -2, 5)$
- 2) $A = (-6, -1, 0) \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$
- 3) $A = (5, 0, -3) \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Произведение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$, имеющей mстрок и n столбцов, на матрицу $B=(b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C=(c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}, \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,m; \\ j=1,2,\ldots,p. \end{pmatrix}.$$

Пример произведения матриц

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 10 & 13\\ 8 & 11 & 14\\ 9 & 12 & 15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 7+2\cdot 8+3\cdot 9 & 0\cdot 10+2\cdot 11+3\cdot 12 & 0\cdot 13+2\cdot 14+3\cdot 15\\ 4\cdot 7+5\cdot 8+6\cdot 9 & 4\cdot 10+5\cdot 11+6\cdot 12 & 4\cdot 13+5\cdot 14+6\cdot 15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}43 & 58 & 73\\ 122 & 167 & 212\end{pmatrix}.$$

Задание. Найдите произведение матриц

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$$

Решение.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot(-3)+0\cdot 1 \\ 2\cdot(-3)+5\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

§ Определители, их вычисление и свойства

1. Понятие определителя

- **Определителем порядка *n*** квадратной матрицы ***n*-го** порядка называют **число** , соответствующее этой квадратной матрице.
- **Определитель** числовой матрицы **первого порядка** равен числу, являющемуся элементом этой матрицы.

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно *элементами, строками, столбцами определителя* матрицы.

Определитель матрицы **A** обозначают |**A**| , det**A** или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называются соответственно *элементами, строками, столбцами определителя* матрицы.

- **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель *(n*–1*)*-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов *i*-й строки и *j*-го столбца.

- **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется
- минор этого элемента,
- умноженный на $(-1)^{(i+j)}$:

$$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$$

Теорема Лапласа. *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|\mathbf{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

$$|\mathbf{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

Определитель второго порядка *равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали*.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot a_{21} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Вычисление определителя третьего порядка

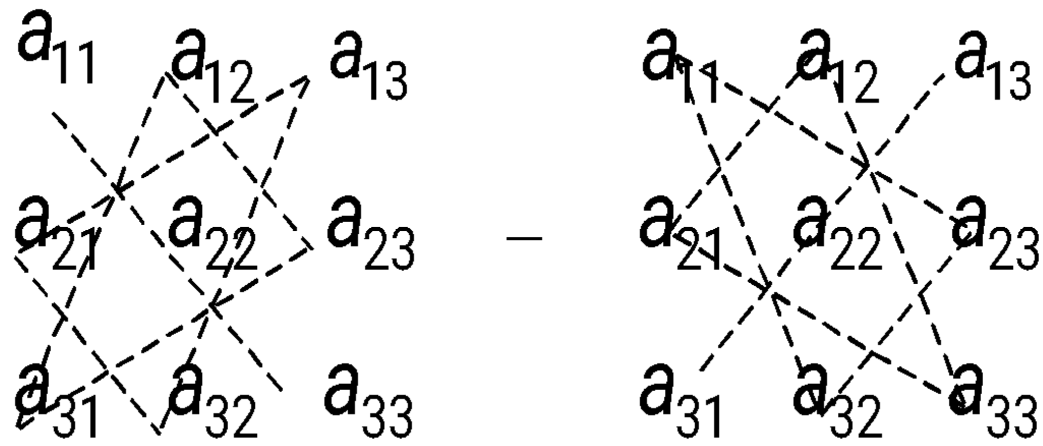
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$$

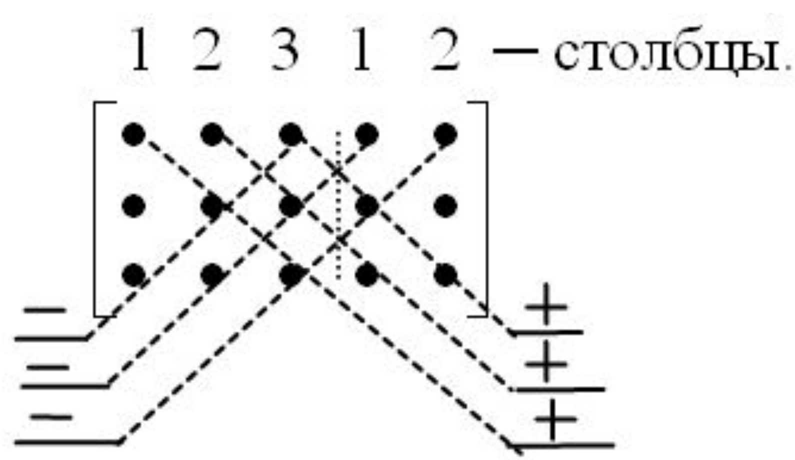
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}).$$

Правило треугольников и таблица Саррюса для вычисления определителей третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$





Определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

§ Ранг матрицы

1. Понятие ранга матрицы. Теорема о базисном миноре

Минором M_k ***порядка k*** матрицы *А* называется любой определитель *k*-го порядка этой матрицы,

составленный из элементов,

стоящих на пересечении любых её «*к*» столбцов

и любых её «*к*» строк.

Минор M_k *матрицы* **A** *называется её **базисным минором**,*

если он отличен от нуля,

а все миноры матрицы **A** *более высокого порядка* $k+1$, $k+2$, …, t *равны нулю или не существуют.*

Строки (столбцы) базисного минора называют базисными строками (столбцами)

***Рангом** матрицы* **A** *называется порядок её базисного минора.*

Обозначают: r(**A**) или rang(**A**).

2. Методы нахождения ранга матрицы

1) Метод окаймляющих миноров.

Пусть M_s – минор порядка s. *Окаймляющим минором* для минора M_s называется любой минор порядка $s+1$, содержащий минор M_s .

ТЕОРЕМА. *Если в матрице* **A** *есть минор* k*-го порядка, отличный от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю или не существуют, то ранг матрицы* **A** *равен* k .

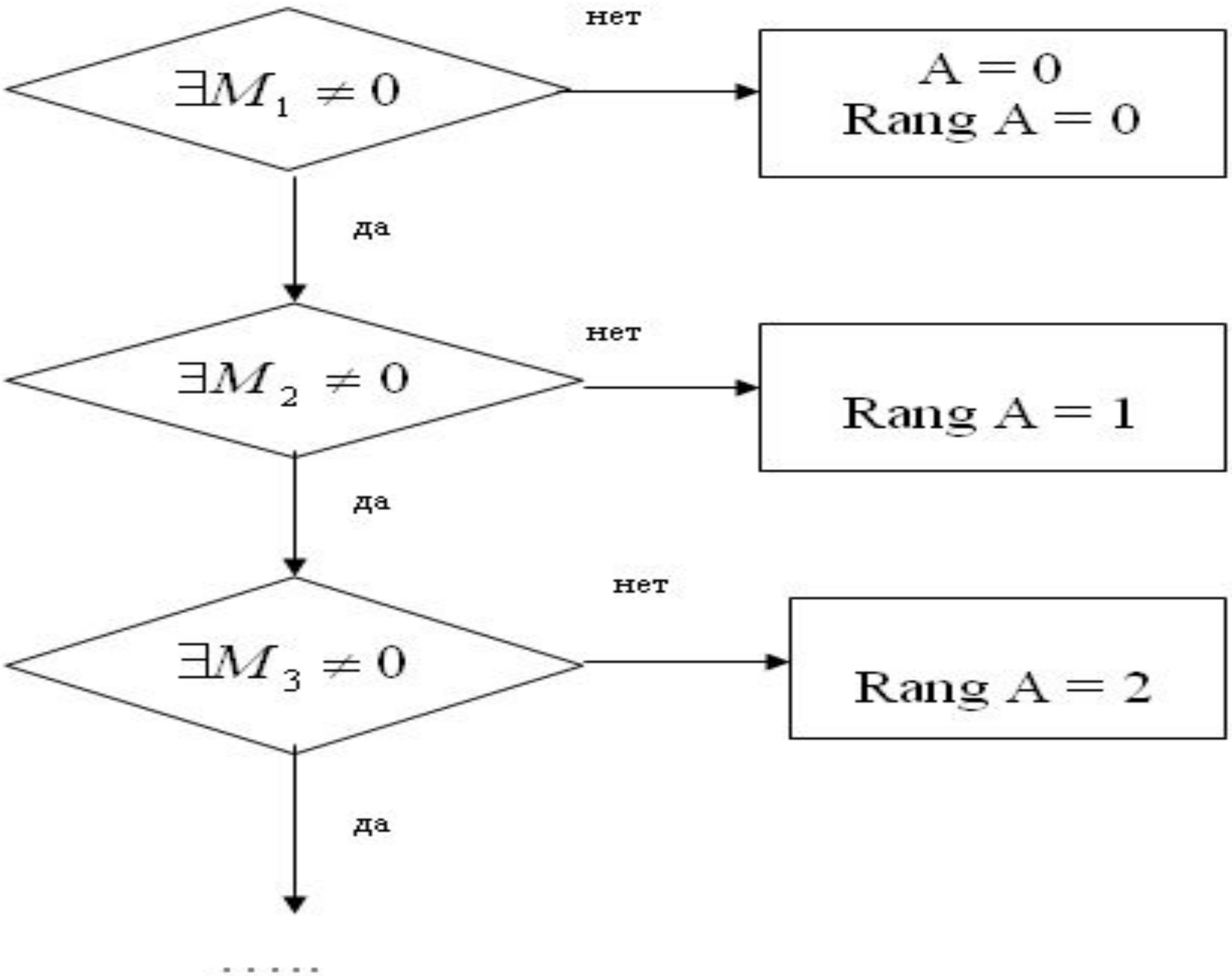
Найти ранг матрицы можно по следующей схеме

(***Метод окаймляющих миноров***):

а) Находим в матрице минор M_k порядка k, отличный от нуля (где $k \geq 1$).

б) Ищем его окаймляющий минор M_{k+1} отличный от нуля. Если такого минора не существует, то ранг матрицы равен k. Если окаймляющий минор $M_{k+1} \neq 0$, то рассматриваем окаймляющие миноры для M_{k+1} и т.д.

Схема метода окаймляющих миноров



***2) Метод элементарных преобразований*.**

Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования следующего вида:

а) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;

б) прибавление к i-й строке (столбцу) k-й строки (столбца),
умноженной на число $\alpha \neq 0$;

в) перестановка i-й и k-й строки (столбца);

г) вычеркивание одной из двух пропорциональных или равных строк (столбцов);

д) вычеркивание нулевых строк (столбцов).

Матрица **B** называется *эквивалентной* матрице **A** , если она может быть получена из **A** элементарными преобразованиями.

Обозначают: **A ~ B**.

ТЕОРЕМА. *Эквивалентные матрицы имеют равные ранги.*

ТЕОРЕМА. *Любая матрица* **А** *эквивалентна некоторой треугольной или трапециевидной матрице, не содержащей нулевых и пропорциональных строк. Причем эта треугольная или трапециевидная матрица может быть получена из* **А** *элементарными преобразованиями* ***только строк****.*

Найти ранг матрицы можно по следующей схеме (***метод элементарных преобразований***):

1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы **A** эквивалентную треугольную или трапециевидную матрицу **B**;

2) находим в матрице **B** базисный минор и

Пример

$$\boxed{(-2)\,(-1)\,(-3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 2 & -13 & -4 & 5 & 5 & -5 \\ 1 & -6 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -20 & -7 & 9 & 7 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен двум.

Свойства матриц и определителей

Действие	Матрица $A_{m\times n}$ (таблица из m строк и n столбцов)	Определитель Δ порядка n (число для матрицы $A_{n\times n}$)
Транспонирование	$Rang(A) = Rang(A^T)$	Δ не изменяется
Перестановка двух строк	Ранг не изменяется	Δ меняет знак
Умножение одной строки на число $\lambda \neq 0$	Ранг не изменяется	Δ изменяется в λ раз (Δ умножается на число λ)
Умножение всех строк на число λ	A изменяется в λ раз (A умножается на число λ)	Δ изменяется в λ^n раз (Δ умножается на число λ^n)
Умножение одной строки на число λ и сложение с соответствующими элементами другой строки	Ранг не изменяется	Δ не изменяется
Получение нулевых и пропорциональных строк	Ранг не изменяется при вычёркивании всех нулевых и пропорциональных строк, кроме одной из ненулевых	$\Delta = 0$

Вычисление определителей четвёртого и более высоких порядков

- 1. Выбрать рабочую строку (столбец) такую, где есть хотя бы одна единица. Рабочую строку (столбец) не изменяем.
- 2. Выбрать столбец (строку), в котором нужно получить нули вместо всех элементов, кроме элемента в рабочей строке. Обычно - это столбец (строка) с нулями или числами, близкими к единице.
- 3. Каждый элемент рабочей строки (столбца) умножить на число, противоположное элементу, на месте которого надо получить ноль,
- и соответствующие элементы рабочей строки (столбца) и изменяемых строк (столбцов) сложить (элементарные преобразования строк (столбцов)).
- 4. Разложить определитель по элементам столбца (строки), в котором получили нули, применяя теорему Лапласа. Порядок определителя при этом понижается на единицу.

§ Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если неизвестные в нём содержатся только в первой степени

и между собой не перемножаются,

т.е. если оно имеет вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

где a_i, b – известные заданные числа,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - неизвестные уравнения.

a_i называются *коэффициентами уравнения*,

b называется *свободным членом*.

Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*.

Если $b \neq 0$, уравнение называется *неоднородным*.

Рассмотрим
систему m линейных уравнений
с n неизвестными,
т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через **A** и **A*** следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матрицу **A** называют *основной матрицей* системы (1), матрицу **A*** – *расширенной матрицей* системы (1).
Пусть **X** – матрица-столбец неизвестных,
B – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения **AX=B**. Его называют *матричной формой* системы (1).

ТЕОРЕМА Кронекера – Капелли.

Система линейных уравнений (1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы, т.е.* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A^*})$.

2. Методы решения систем линейных уравнений

Матричный метод.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обратной к матрице* **A** *называется матрица, обозначаемая* **A^{-1}**, *такая, что* **A·A^{-1}=A^{-1} · A=E**.

Преобразование матричных уравнений

$$AX = C \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C = X$$

$$XB = C \Leftrightarrow X(BB^{-1}) = CB^{-1} = X$$

$$AXB = C \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}CB^{-1} = X$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}. \Rightarrow AX + 2B = C \Rightarrow AX = C - 2B.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*.

ТЕОРЕМА. *Пусть* **A** *– квадратная матрица. Матрица* **A** *имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель* |**A**| *отличен от нуля. Причем обратная матрица* $\mathbf{A}^{-1}$ *может быть найдена по формуле:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$$

где S *– матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы* **A***, т.е.*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица S^T *называется союзной (или присоединенной, или взаимной) для матрицы* **A***.* *Нахождение решения по формуле* $X = A^{-1} \cdot B$ *называют* ***матричным методом решения*** *системы.*

Пример

- Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$
- матричным методом.
- Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 22-5 \\ -33-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- Проверка!!!

Метод Крамера

ТЕОРЕМА (Крамера). *Если в системе линейных уравнений число уравнений m и число неизвестных n совпадает, и* **|A|≠0**, *то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (*)$$

где D**=|A|,** *а* D_i *– определитель, получаемый из определителя* D *заменой его i-го столбца на столбец свободных членов.*

Формулы $(*)$ называются ***формулами Крамера***.

Пример

- Решить систему уравнений
- методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

- Решение.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{22-5}{2+15} = \frac{17}{17} = 1; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1-33}{2+15} = \frac{-34}{17} = -2;$$

- Проверка!!!

Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

- Две системы называются *эквивалентными* (*равносильными*), если их решения совпадают.
- К эквивалентной системе можно перейти с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы этой системы.

Исключение неизвестных обычно осуществляют элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы СЛУ.

В результате расширенная матрица СЛУ приводится к трапецеидальному виду,

который позволяет легко выделить базисный минор основной матрицы системы.

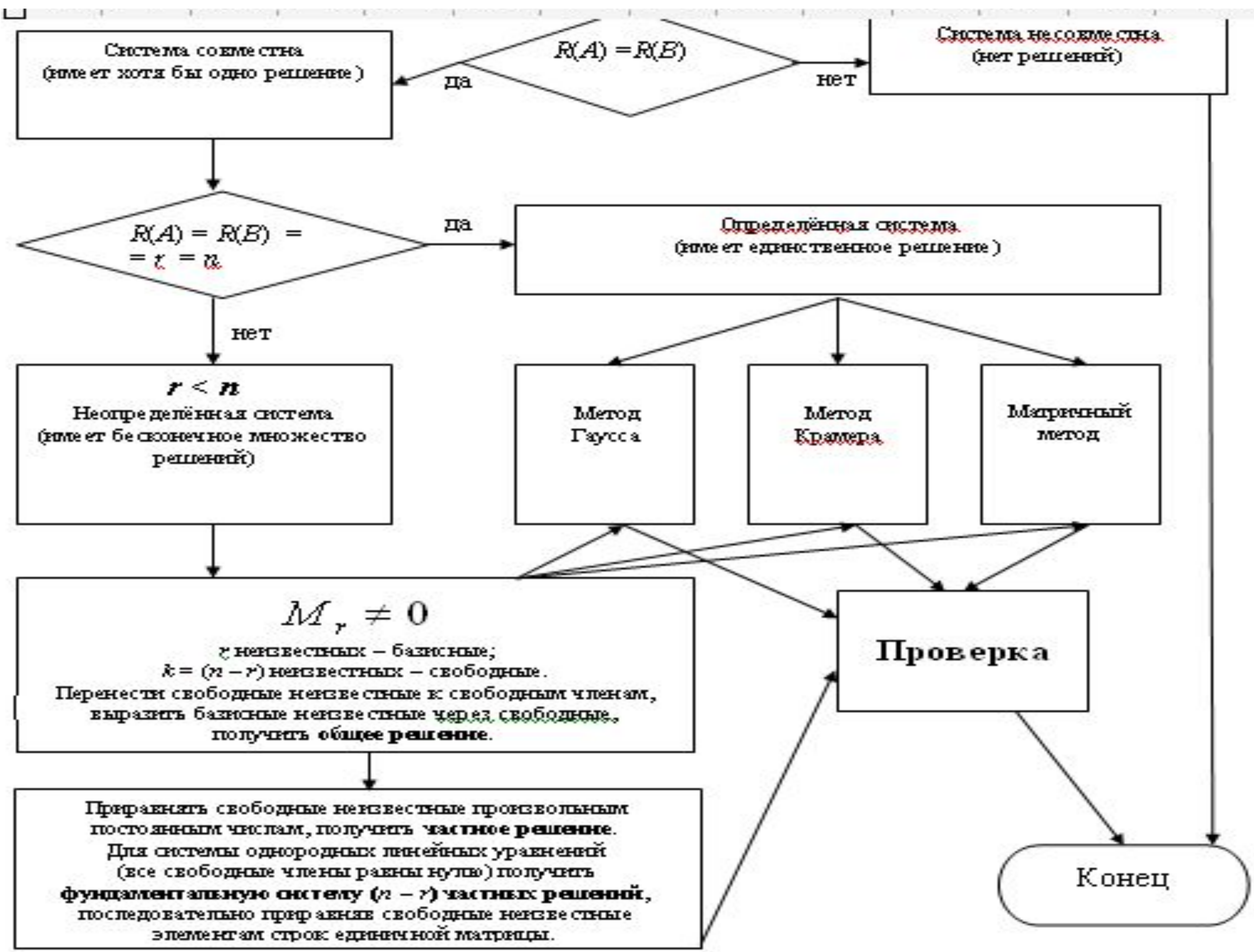
- Неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор называются ***базисными неизвестными***.
- Неизвестные, коэффициенты при которых не вошли в базисный минор, называются ***свободными неизвестными***.

- Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то
- r *неизвестных системы – базисные,*
- $k = n – r$ свободные.

- Если ранг основной и расширенной матриц СЛУ совпадает с числом неизвестных СЛУ, то свободных неизвестных нет. В этом случае СЛУ имеет **единственное решение** (определённая СЛУ).
  Если ранги основной и расширенной матриц СЛУ равны, но меньше числа неизвестных СЛУ, то СЛУ неопределённая. В этом случае находят **общее решение** СЛУ.

- Решение СЛУ, в котором базисные неизвестные выражены через свободные неизвестные, называется ***общим решением*** СЛУ.
  Решение, которое получается из общего путём присваивания свободным неизвестным числовых значений, называется ***частным решением*** СЛУ.

- **Общее решение системы линейных уравнений** можно получить, руководствуясь, например, следующим планом:
- а) выбрать базисный минор (обычно это минор, под главной диагональю которого – все нули);
- б) перенести свободные неизвестные к свободным членам, то есть в правые части уравнений;
- в) обратным ходом метода Гаусса выразить базисные неизвестные через свободные неизвестные.


Система совместна
(имеет хотя бы одно решение)
R(A) = R(B)
да
нет
Система не совместна
(нет решений)
R(A) = R(B) =
= r = n
да
Определённая система
(имеет единственное решение)
нет
r < n
Неопределённая система
(имеет бесконечное множество
решений)
Метод
Гаусса
Метод
Крамера
Матричный
метод
M_r ≠ 0
r неизвестных – базисные;
k = (n – r) неизвестных – свободные.
Перенести свободные неизвестные к свободным членам,
выразить базисные неизвестные через свободные,
получить общее решение.
Проверка
Приравнять свободные неизвестные произвольным
постоянным числам, получить частное решение.
Для системы однородных линейных уравнений
(все свободные члены равны нулю) получить
фундаментальную систему (n – r) частных решений,
последовательно приравняв свободные неизвестные
элементам строк единичной матрицы.
Конец

Пример

- Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$
- методом Гаусса.

Решение.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & : & 11 \\ 3 & 2 & : & -1 \end{bmatrix}^{(-3)} \cong \begin{bmatrix} 1 & -5 & : & 11 \\ 0 & 17 & : & -34 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 11, \\ 17x_2 = -34, \end{cases} \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 1.$$

Проверка!!!

Пример 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 12$ $B := \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(A) = 3$ Система имеет единственное решение

$X := A^{-1} \cdot B$ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Проверка $A \cdot X = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

Пример 2.

$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rank}(A1) = 3$

F - базисный минор. 1-я, 2-я, 3-я неизвестные - базисные, 4-я - свободная. Переносим свободную неизвестную к свободным членам, получаем матрицу D(c).

$F := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $|F| = -3$ Общее решение X(c) Проверка

$D(c) := \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot c \\ 1 \\ 1 + c \end{pmatrix}$ $X(c) := F^{-1} \cdot D(c)$ $X(c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + c \\ \frac{-1}{3} - c \\ \frac{2}{3} + c \end{pmatrix}$ $X1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A1 \cdot X1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Пример 3.

$A0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $F1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $|F1| = 0$ F1 не может быть базисным минором. Поищем другой.

$\mathrm{rank}(A0) = 3$

$F0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|F0| = -2$ Базисные неизвестные 1-я, 2-я, 4-я; свободные - 3-я, 5-я. $D0(u,v) := \begin{pmatrix} -u - 2 \cdot v \\ u - v \\ u - 2 \cdot v \end{pmatrix}$ Проверка

$X0(u,v) := F0^{-1} \cdot D0(u,v)$ $X0(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} -v \\ u \\ -v \end{pmatrix}$ Общее решение X0(u,v) $X0(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X0(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найти общее решение СЛУ и какое-либо частное решение СЛУ

$$
\begin{cases}
x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3,\\
2x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 = -5,\\
x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -2,\\
3x_1 - 20x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 7x_5 = -8.
\end{cases}
$$

(-2) (-1) (-3)

$$
\begin{bmatrix}
1 & -7 & -3 & 4 & 2 & * -3\\
2 & -13 & -4 & 5 & 5 & * -5\\
1 & -6 & -1 & 1 & 3 & * -2\\
3 & -20 & -7 & 9 & 7 & * -8
\end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix}
1 & -7 & -3 & 4 & 2 & * -3\\
0 & 1 & 2 & -3 & 1 & * \;1\\
\cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-3} & \cancel{1} & \cancel{* \;1}\\
0 & 1 & 2 & -3 & 1 & * \;1
\end{bmatrix}
$$

Запишем эквивалентную СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 - x_5 + 1. \end{cases} \qquad \text{О.Р.:} \begin{cases} x_1 = -11x_3 + 17x_4 - 9x_5 + 4, \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 - x_5 + 1. \end{cases}$$

ПРОВЕРКА. Пусть свободные неизвестные равны нулю:

$x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Тогда базисные неизвестные получим из общего решения:

$x_1 = 4; x_2 = 1$.

Подставим это частное решение в КАЖДОЕ уравнение ДАННОЙ СЛУ

и получим тождества. Это означает, что СЛУ решена верно.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ