§11. Прямая и плоскость в пространстве

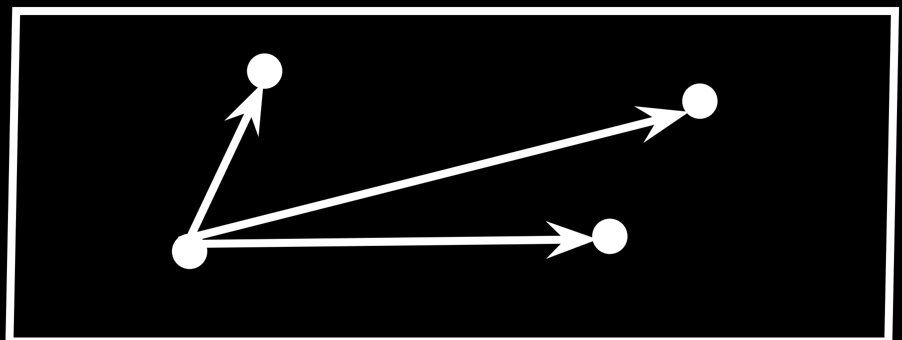
п.1. Основные формулы.

1) Расстояние между двумя точками в пространстве.

2) Деление отрезка в данном отношении.

п.2. Уравнения плоскости.

Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки



Точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы

являются компланарными.

По свойству смешенного произведения

Найдем

Тогда

Разложим определитель по первой строке

где

Раскроем скобки

обозначим

получим

— общее уравнение плоскости.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости.

Если плоскость задана уравнением

то вектор

является нормальным вектором этой плоскости.

— уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярную данному вектору.

Уравнение

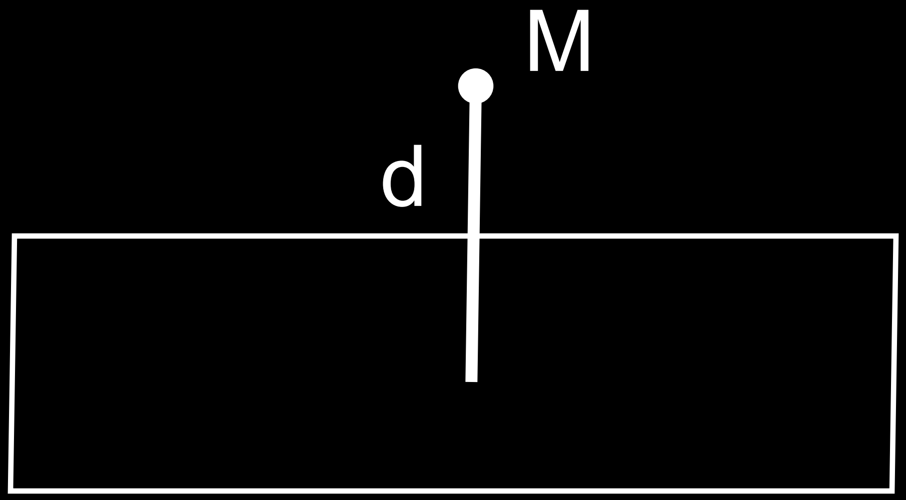
называется уравнением плоскости, проходящей через три данные точки.

Уравнение

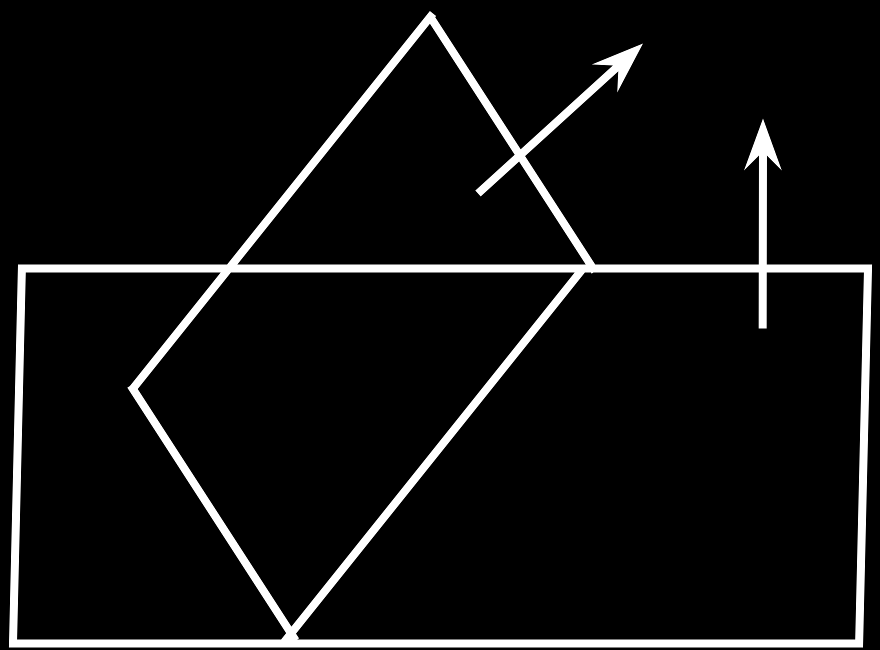
называется уравнением плоскости, «в отрезках» (отсекает от координатных осей отрезки длиной $|a|$, $|b|$, $|c|$).

п.3. Плоскость. Основные задачи.

1) Расстояние от точки до плоскости.

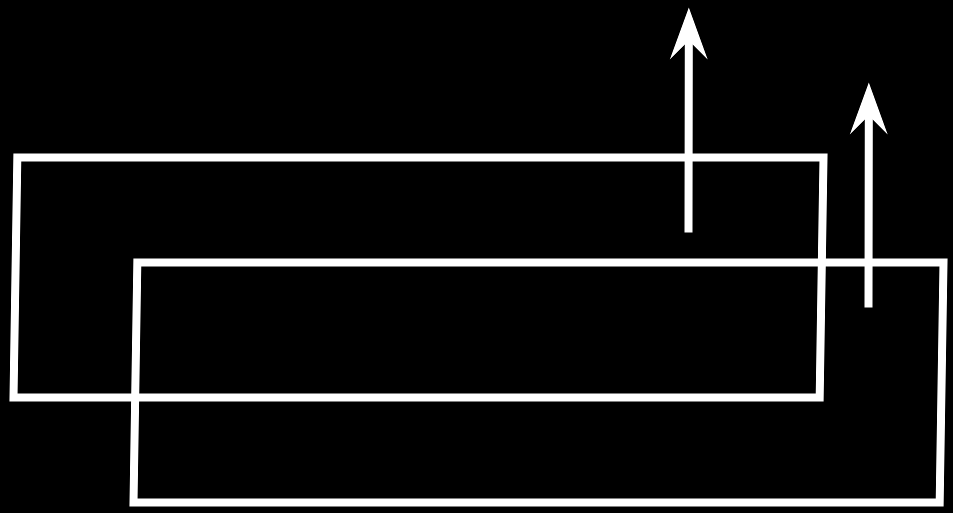


2) Угол между плоскостями.



Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей.

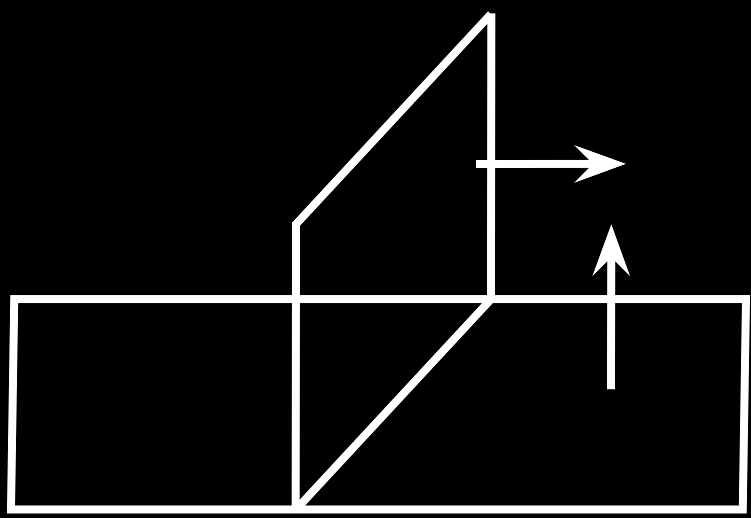
Если то



т.е.

— условие параллельности плоскостей.

Если то



т.е.

— условие перпендикулярности плоскостей.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(3,2,-1) и параллельной плоскости

Решение.

Нормальный вектор плоскости

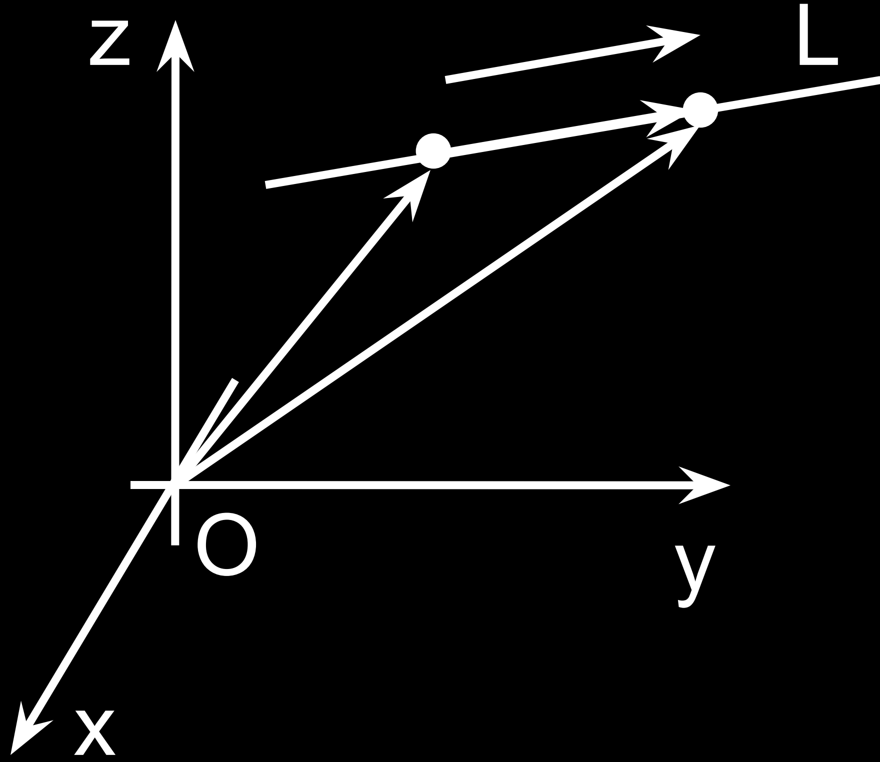
является нормальным вектором искомой плоскости.

Тогда требуемое уравнение имеет вид

или

п.4. Уравнения прямой.

1) Векторное уравнение прямой.



Дано:

— направляющий вектор прямой.

Составить уравнение прямой L.

Пусть

Тогда

Обозначим

Так как

то

Тогда

2) Параметрические уравнения прямой.

Рассмотрим векторное уравнение

Заметим, что

Тогда

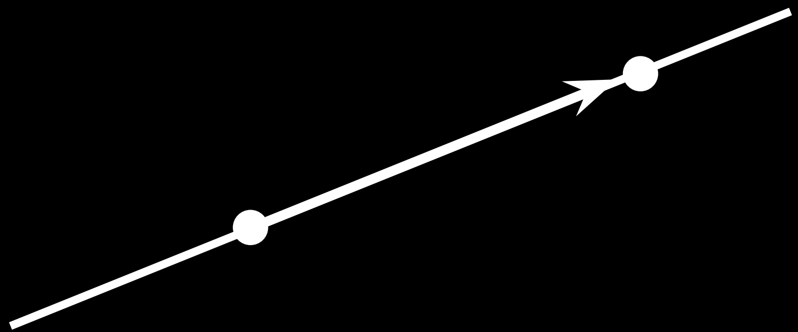
3) Канонические уравнения прямой.

Рассмотрим параметрические уравнения

Выразим параметр t из каждого уравнения

Тогда

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки.



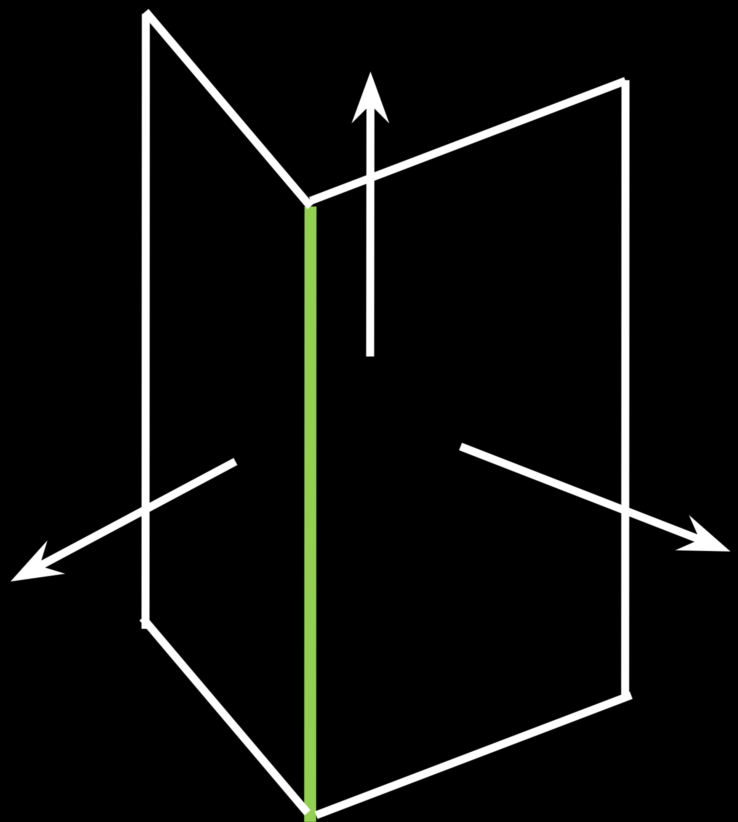
В качестве направляющего вектора можно взять вектор

Тогда

5) Общие уравнения прямой.

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей:

Пример. Написать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:



Решение.

Нормальные векторы плоскостей:

Направляющий вектор прямой перпендикулярен обоим нормальным векторам.

Тогда

Значит,

т.е.

Найдем координаты какой-нибудь точки, лежащей на искомой прямой.

Для этого в общих уравнениях положим, например, y=0. Тогда

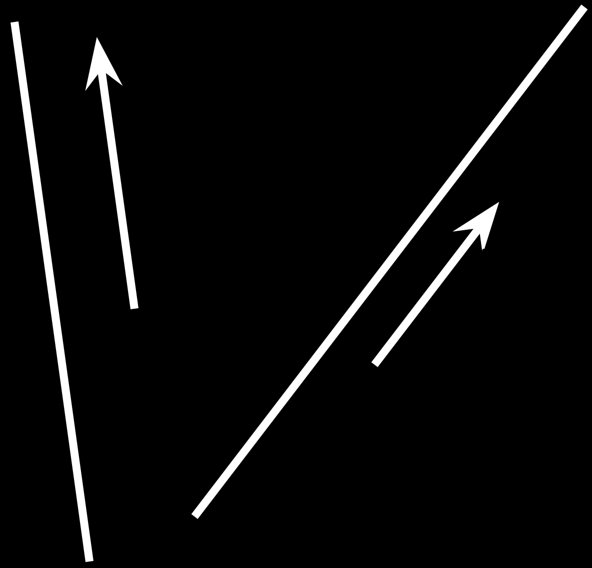
Осталось записать уравнения прямой, проходящей через точку

с направляющим вектором

Получим

п.5. Прямая. Основные задачи.

1) Угол между прямыми.



Угол между прямыми равен углу между направляющими векторами этих прямых.

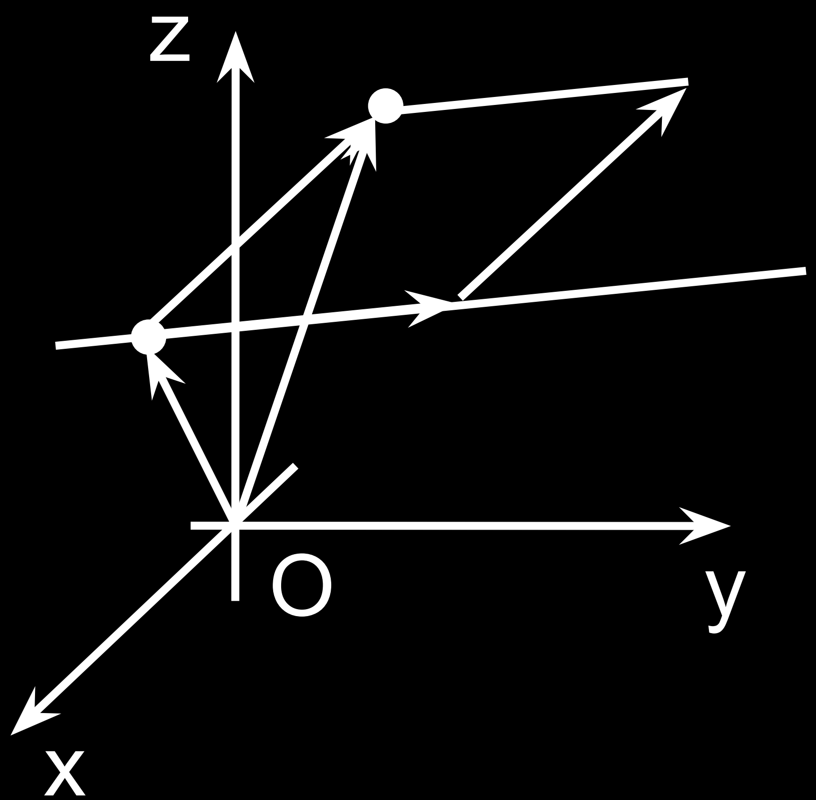
Если то т.е.

— условие параллельности прямых.

Если то т.е.

— условие перпендикулярности прямых.

2) Расстояние от точки до прямой.



По свойству векторного произведения

По формуле для площади параллелограмма

найдем

Пример. Найти расстояние от точки M(-1,1,2) до прямой

Решение.

Прямая проходит через точку

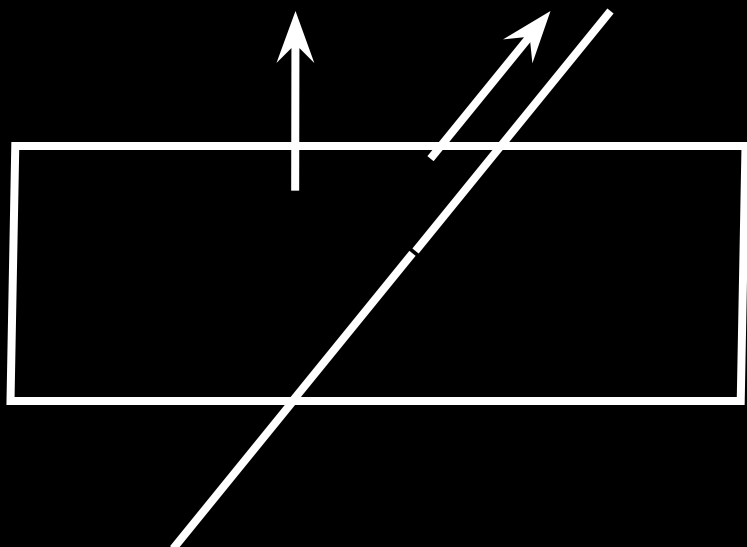
и ее направляющий вектор

т.е.

Тогда

п.6. Прямая и плоскость. Основные задачи.

1) Угол между прямой и плоскостью.



Пусть — угол между прямой и плоскостью.

Очевидно, что

Тогда

Если то т.е.

— условие параллельности прямой и плоскости.

Если то т.е.

— условие перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Точка пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти координаты точки пересечения прямой

и плоскости

Решение.

Пусть

Тогда

Подставим в уравнение плоскости

т.е.

Поэтому координаты точки пересечения