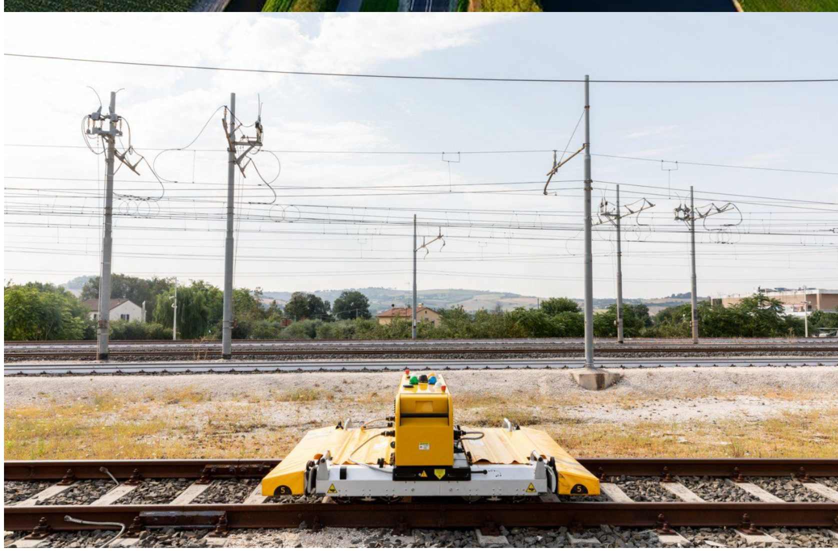
О математическом программировании

Математическое программирование используется в нефтяной индустрии, а также в сфере логистики, планирования, составления расписаний.

Вообразим, что вы занимаетесь продажей жестяных листов. Один клиент заказал у вас 70 листов, а второй — 30 листов. При этом ваши запасы хранятся на разных складах, на каждом из которых осталось меньше 100 листов. Ваша задача — минимизировать расходы на доставку жести клиентам.

Почему идеальные решения не всегда самые комфортные?



Общая формулировка задачи математического программирования

Математическое программирование – это раздел высшей математики, посвященный решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных, при наличии ограничений на переменные.

Методами математического программирования решаются задачи о распределении ресурсов, планировании выпуска продукции, ценообразования, транспортные задачи и т.д.

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы:

1. Выбор переменных задачи
2. Составление системных ограничений
3. Выбор целевой функции

Общая формулировка задачи математического программирования

Переменными задачи называются величины x_1, x_2, x_3, …, x_n которые полностью характеризуют экономический процесс.

Их обычно записывают в виде вектора $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи и которые следуют из ограниченности ресурсов или других экономических или физических условий, например, положительности переменных и т. п.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи, и экстремум которой требуется найти.

1.1. Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц — вида B и x_3 единиц — вида C. Тогда для производства такого количества изделий потребуется затратить $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, то должно выполняться неравенство

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 120.$$

Аналогичные рассуждения относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования приведут к следующим неравенствам:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leqslant 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 360.$$

При этом так как количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, то

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \qquad (1)$$

Далее, если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц изделий вида B и x_3 единиц изделий вида C, то прибыль от их реализации составит $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leqslant 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 360 \end{cases} \qquad (2)$$

четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_j $(j = \overline{1, 3})$ и линейная функция относительно этих же переменных

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3; \qquad (3)$$

требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2) найти такое, при котором функция (3) принимает максимальное значение. Как это сделать, будет показано в дальнейшем.

Линейная функция (3), максимум которой требуется определить, вместе с системой неравенств (2) и условием неотрицательности переменных (1) образуют математическую модель исходной задачи.

Так как функция (3) линейная, а система (2) содержит только линейные неравенства, то задача (1)—(3) является задачей линейного программирования.

Общая формулировка задачи математического программирования

Найти минимум или максимум целевой функции

$$F(x)=F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

При ограничениях

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\{\le,=,\ge\}b_1$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\{\le,=,\ge\}b_2$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\{\le,=,\ge\}b_m$$

$X(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ – допустимое решение, если выполняются ограничения.

Допустимое решение, при котором целевая функция достигает оптимального значения, называется оптимальным планом

Принципы классификации задач математического программирования

По характеру взаимосвязи между переменными:
- Линейные
- Нелинейные

По характеру изменения переменных:
- Непрерывные
- Дискретные

По учету фактора времени:
- Статические
- Динамические

По наличию информации о переменных:
- Задачи в условиях полной определённости
- Задачи в условиях неполной информации
- Задачи в условиях неопределенности

По числу критериев оценки альтернатив:
- Простые однокритериальные задачи
- Сложные многокритериальные задачи

Задача линейного программирования

Найти минимум или максимум целевой функции

$$\max(\min) f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

При функциональных ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m$$

и прямых ограничениях $x_j \ge 0;\ j = \overline{1, n}$

Задача линейного программирования

В случае, когда все ограничения являются уравнениями и все переменные удовлетворяют условию неотрицательности, задачу линейного программирования называют канонической.

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j \quad j = 1,2,\dots,m \qquad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

Задача линейного программирования

Каноническая задача линейного программирования в векторной форме

$$Z(X) = C \cdot X \to \max\,(\min),$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0$$

$$X \geq \vec{0}$$

В данном случае введены векторы

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Задача линейного программирования

Каноническая задача линейного программирования в матричной форме записи имеет вид

$$Z(X) = C \cdot X \to \max(\min),$$

$$AX = A_0$$

$$X \geq \theta$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$C = \left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right)$$

Задача линейного программирования

Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$$

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - ... - a_nx_n$$

$x_{n+1} \geq 0$ - *дополнительная переменная*

Решение системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса

Элементарные преобразования системы (или расширенной матрицы)

- Перестановка любых двух уравнений;
- Умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число;
- Прибавление к обеим частям одного и уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число отличное от нуля;
- Вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевым коэффициентом и своборным членом, равным нулю)

Решение системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса

Элементарными преобразованиями расширенная матрица совместной системы, имеющей бесчисленное множество решений, приводится к виду:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r
\end{array}\right)
$$

Общее решение системы можно записать в виде:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & b_1 & - & a_{1r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{1n}x_n \\
x_2 & = & b_2 & - & a_{2r+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{2n}x_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_r & = & b_r & - & a_{rr+1}x_{r+1} & - & \cdots & - & a_{rn}x_n
\end{array}
$$

Двойственная задача линейного программирования

Прямая задача	Двойственная задача
$Z(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$	$F(Y)=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min(\max)$
$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \quad j=1,2,\ldots,m$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_i \quad i=1,2,\ldots,n$
$x_i \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n$	$y_j \ge 0, \quad j=1,2,\ldots,m$

y_j ***- объективно обусловленные оценки***

Двойственная задача линейного программирования

Правила составления двойственной задачи:

1. целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи - на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид $\leq$, а в задаче на минимум - вид $\geq$;

Двойственная задача линейного программирования

Правила составления двойственной задачи:

2. матрица ***A*** составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица ***A**** в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Двойственная задача линейного программирования

Правила составления двойственной задачи:

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи - числу переменных в исходной задаче;

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи - коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи;

Двойственная задача линейного программирования

Правила составления двойственной задачи:

5. Каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства $\leq$, соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственная задача линейного программирования

Математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной - в виде неравенств, причем переменные в двойственной задаче могут быть и отрицательными. В симметричных двойственных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается в виде неравенств, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Двойственная задача линейного программирования

Исходная задача	*Двойственная задача*
Симметричные пары	
$Z(X) = C \cdot X \to \max,$ $AX \le A_0$ $X \ge \theta$	$F(Y) = Y \cdot A_0 \to \min,$ $YA^T \ge C$ $Y \ge \theta$
$Z(X) = C \cdot X \to \min,$ $AX \ge A_0$ $X \ge \theta$	$F(Y) = Y \cdot A_0 \to \max,$ $YA^T \le C$ $Y \ge \theta$

Графическое решение ЗАДАЧИ ЛП

Графический метод решения задачи ЛП состоит из 2 этапов:

1) построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели;
2) нахождение оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на синюю краску никогда не превышает спроса на краску черную более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на синюю краску никогда не превышает 2 т в сутки.

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	Черная	Синяя	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход (в 1000$) на тонну краски	5	4	

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

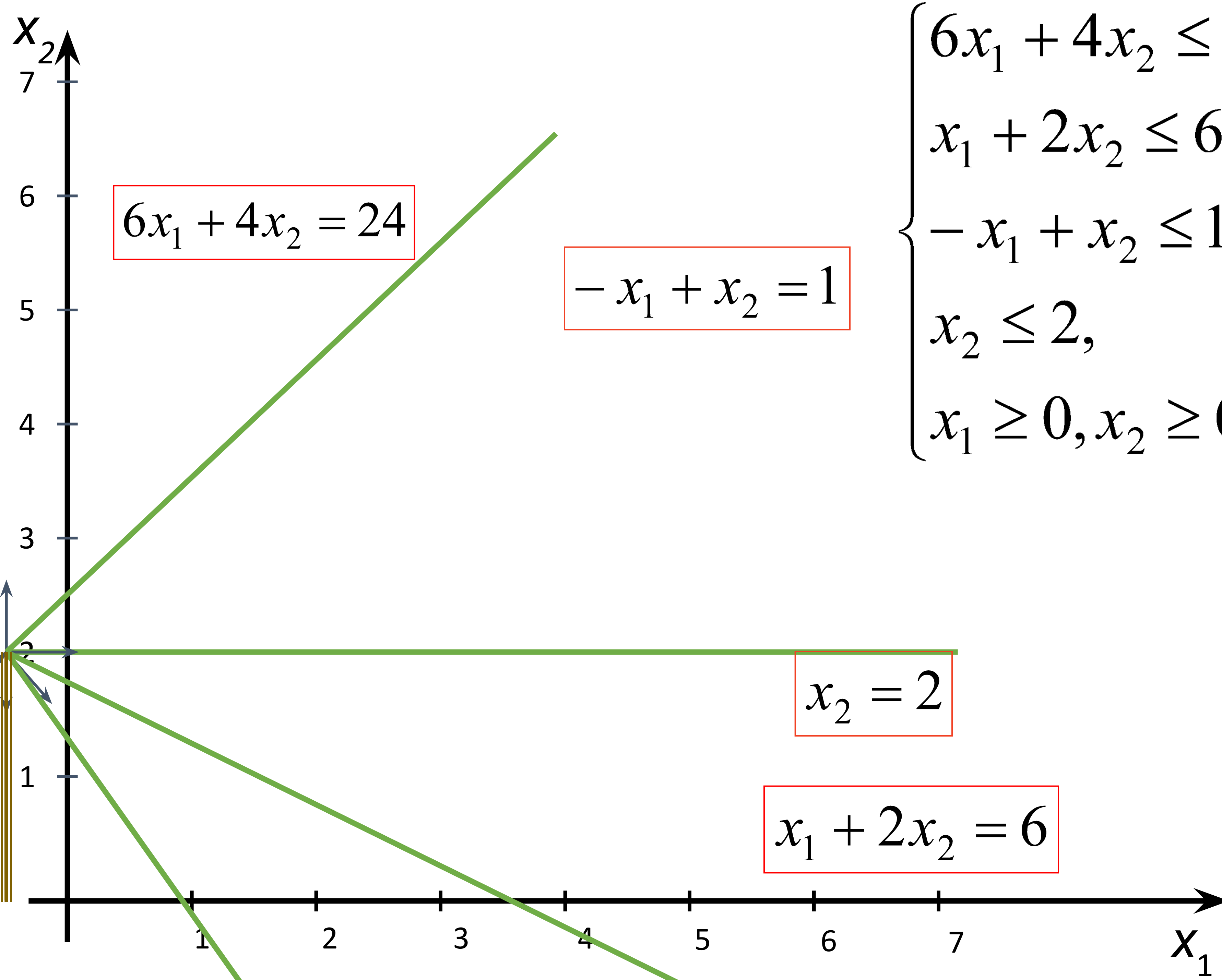
X_1 – ежедневный объем производства черной краски
X_2 – ежедневный объем производства синей краски

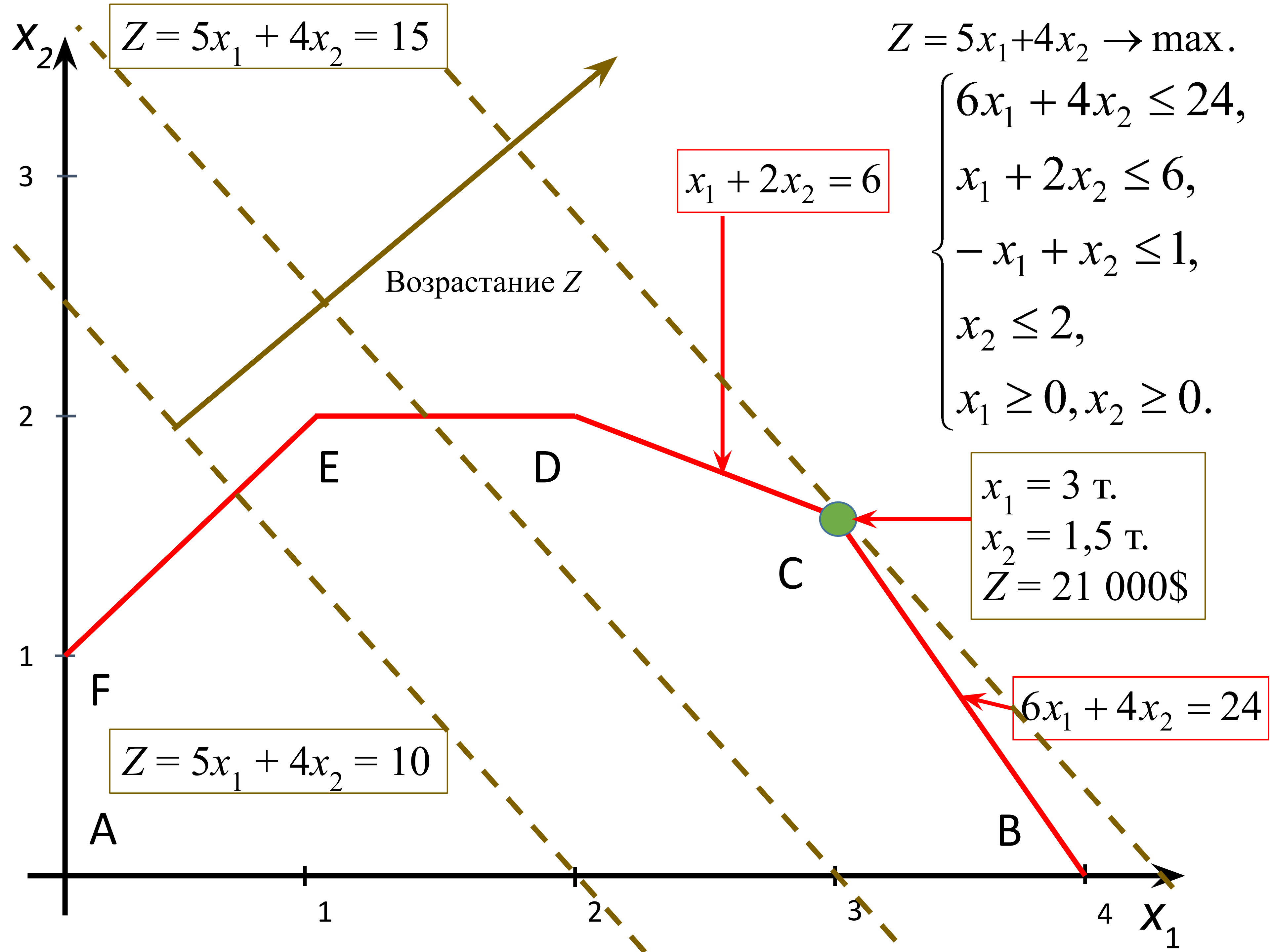
$$Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на синюю краску никогда не превышает спроса на черную краску более, чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на синюю краску никогда не превышает 2 т в сутки.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$





$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max.$
$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$
$Z = 5x_1 + 4x_2 = 15$
$x_1 + 2x_2 = 6$
Возрастание Z
$x_1 = 3$ т.
$x_2 = 1{,}5$ т.
$Z = 21\,000\$$
$6x_1 + 4x_2 = 24$
$Z = 5x_1 + 4x_2 = 10$
A
B
C
D
E
F
x_1
x_2
1
2
3
4

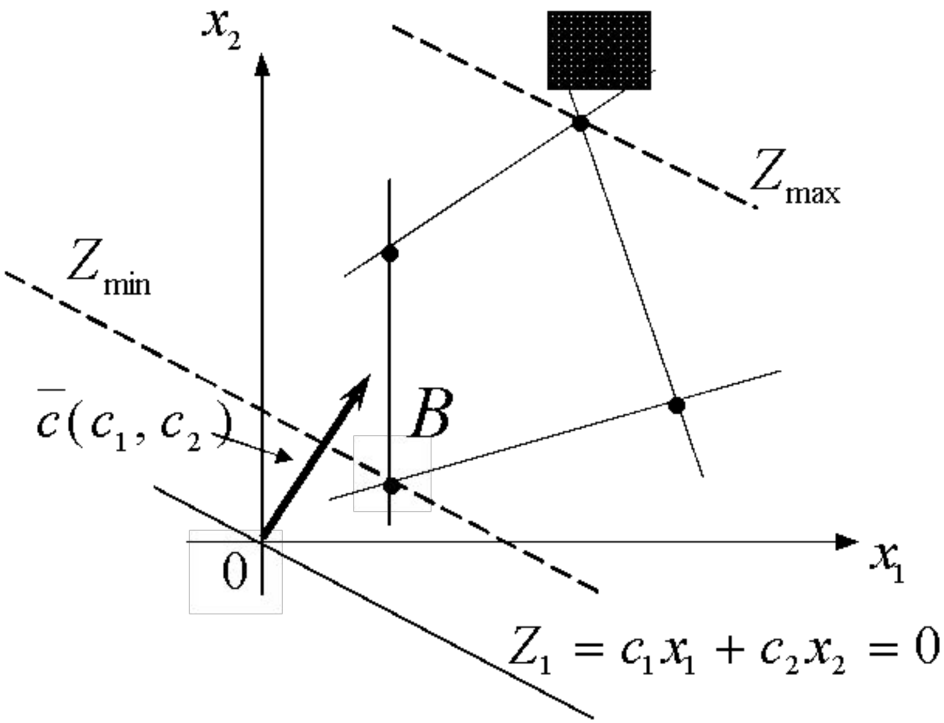
Задача линейного программирования

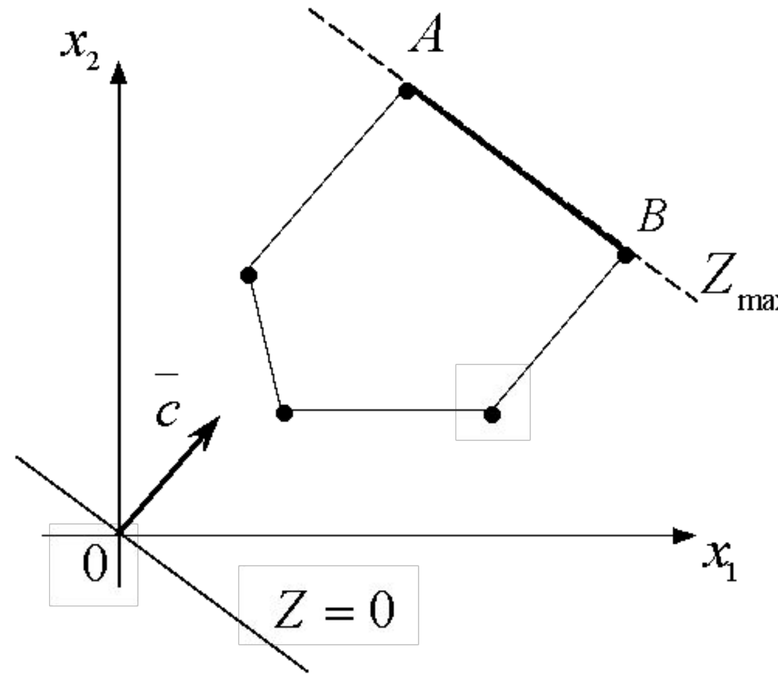
Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом таков:

1. Строится область допустимых решений;
2. Строится вектор нормали к линии уровня с точкой приложении в начале координат
3. Перпендикулярно вектору нормали проводится одна из линий уровня, проходящая через начало координат.
4. Линия уровня перемещается до положения опорной прямой. На этой прямой и будут находиться максимум или минимум функции.

В зависимости от вида области допустимых решений и целевой функции задача может иметь единственное решение, бесконечное множество решений или не иметь ни одного оптимального решения.

Задача линейного программирования

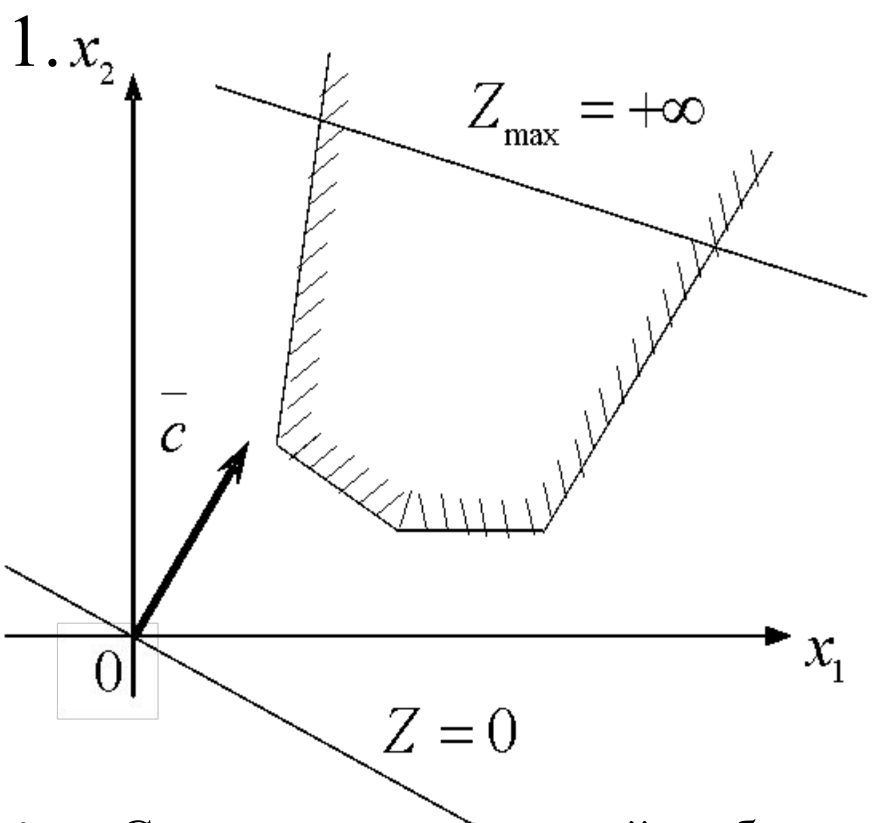


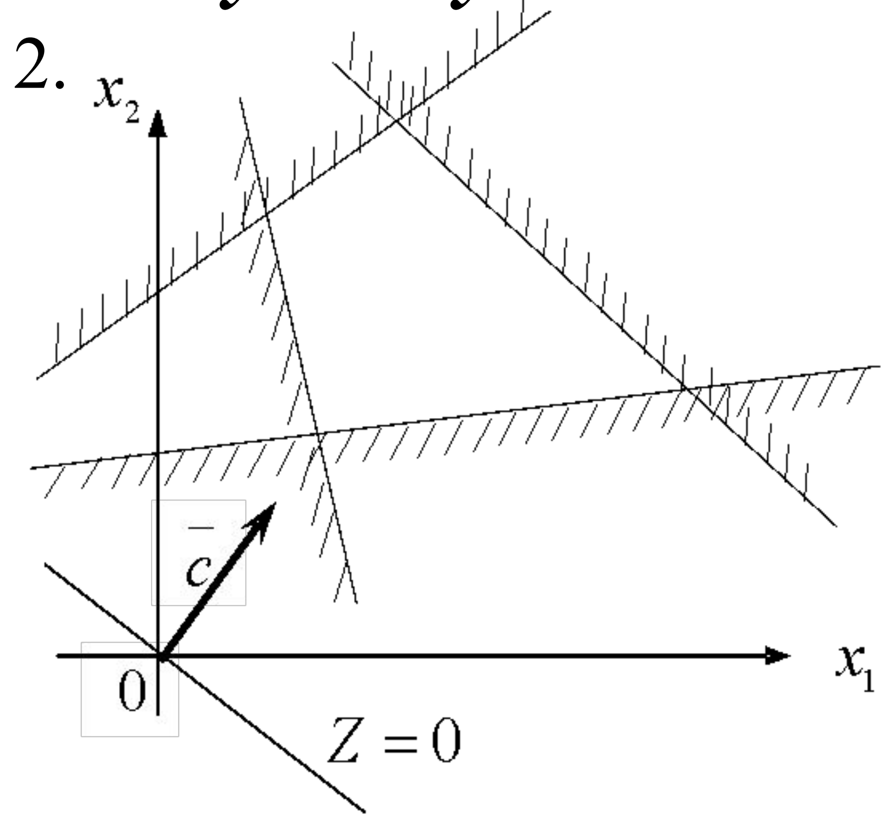


Если прямая функции параллельна отрезку [***AB***], принадлежащему области допустимых решений, то максимум функции ***Z*** достигается в точке ***A*** и в точке ***B***, а , следовательно, и в любой точке отрезка [***AB***], т.к. эти точки могут быть выражены в виде линейной комбинации угловых точек ***A*** и ***B***.

Задача линейного программирования

Оптимальные решения отсутствуют





1. Система ограничений образует неограниченное сверху множество. Функция ***Z*** в данном случае стремится к бесконечности, так как прямую функции можно передвигать в направлении вектора градиента как угодно далеко.
2. Случай несовместной системы ограничений.