

**Решение задач с  
помощью  
дробных  
рациональных  
уравнений**

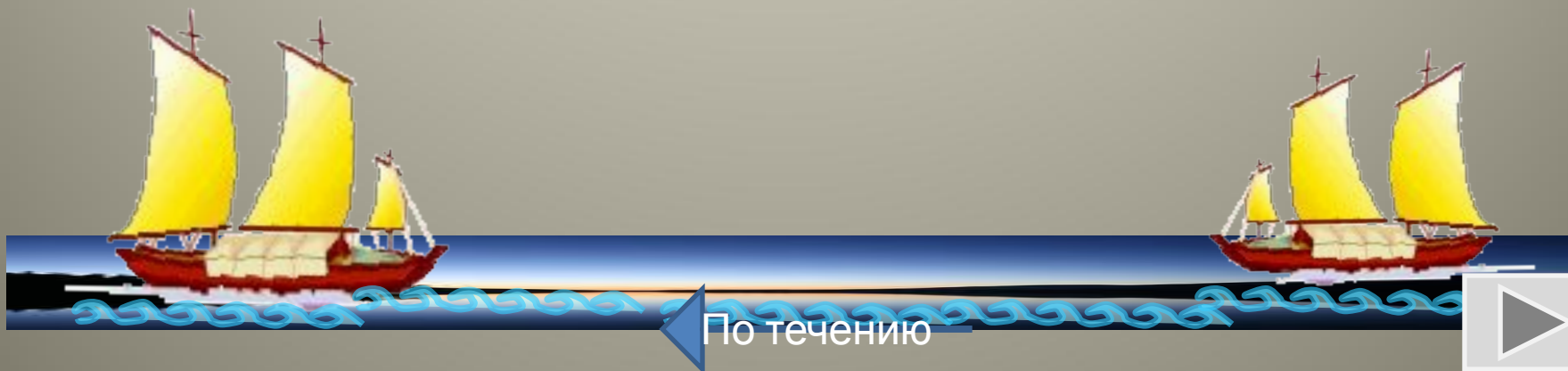
# Задачи на движение по течению и против течения реки

Собственная скорость катера  $V_c$

Скорость течения реки  $V_T$

*по течению*

*против течения*



ПЕРВАЯ!!! Катер отправился в путь в 15 часов, прошел 7 км против течения реки и сделал остановку на 2 часа. После этого он прошел еще 27 км по течению реки и прибыл в пункт назначения в 19 часов. Найти собственную скорость катера, если скорость

Движение	$v, \text{ км / ч}$	$t, \text{ ч}$	$S, \text{ км}$
По течению	$x + 2$	$\frac{27}{x + 2}$	27
Против течения	$x - 2$	$\frac{7}{x - 2}$	7
$v_{\text{собст}}$	$x$		
$v_{\text{течения}}$	2		

Катер отправился в путь в 15 часов, прошел 7 км против течения реки и сделал остановку на 2 часа. После этого он прошел еще 27 км по течению реки и прибыл в пункт назначения в 19 часов. **Найти собственную скорость катера**, если скорость течения реки 2 км/час.

*Вычислим время движения катера*

Составим уравнение

$$\frac{7}{x-2} + \frac{27}{x+2} = 2$$

# ВТОРАЯ!!! Задача

Катер прошел 8 км по течению реки и 16 км против течения, затратив на весь путь 45 минут. Какова скорость движения катера по течению, если собственная скорость катера равна 20 км/ч ?

Движение	$v, \text{ км/ч}$	$t, \text{ ч}$	$S, \text{ км}$
По течению	$x + 20$	$\frac{8}{x + 20}$	8
Против течения	$x - 20$	$\frac{16}{x - 20}$	16
$v_{\text{собст}}$	20		
$v_{\text{течения}}$	$x$		

Зная, что катер затратил на весь путь 45 минут=

$= \frac{3}{4} ч$ , составим уравнение:

$$\frac{8}{x + 20} + \frac{16}{x - 20} = \frac{3}{4}$$

# Задачи на совместную работу

$$\text{производительность} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}$$

# ТРЕТЬЯ!!! Задача

Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

Работа	Производительность	Время	Объём работы
Первый рабочий	$x + 3$	$\frac{180}{x + 3}$	180
Второй рабочий	$x$	$\frac{180}{x}$	180

Зная, что первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй, составим уравнение:



$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+3} = 3$$

*Ответ : 12 деталей.*

# ЧЕТВЕРТАЯ!!!

При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно, если известно, что первому для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

Работа	Производительность	Время	Объём работы
Первый кран	$\frac{1}{x+5}$	$x+5$	1
Второй кран	$\frac{1}{x}$	$x$	1
Вместе	$\frac{1}{6}$	6ч	1

Зная, что при совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч, составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

*Ответ : 15ч; 10ч.*

# Задачи на смеси, растворы, сплавы

$$\text{концентрация} = \frac{m_{\text{вещества}}}{m_{\text{раствора}}} \cdot 100\%$$

$$\text{концентрация} = \frac{V_{\text{вещества}}}{V_{\text{раствора}}} \cdot 100\%$$

# ПЯТАЯ!!! Задача

В сплаве меди и цинка содержится 20 кг меди.

Когда к сплаву добавили 25 кг меди, её процентное содержание увеличилось на 20%. Найдите первоначальную массу сплава.

	Масса металла, кг		Масса сплава, кг		Концентрация %	
	было	стало	было	стало	было	стало
Медь	20	45	$x$	$x + 25$	$\frac{20}{x} \cdot 100\%$	$\frac{45}{x + 25} \cdot 100\%$

Зная, что процентное содержание меди в сплаве увеличилось на 20%, составим уравнение:

$$\frac{45}{x + 25} \cdot 100\% - \frac{20}{x} \cdot 100\% = 20\%$$

$$\frac{45}{x + 25} - \frac{20}{x} = \frac{1}{5}$$

**ШЕСТАЯ!!!** 4. Двое рабочих, работая вместе, выполнили работу за 2

Вопрос задачи поможет нам ввести  $x$  и  $y$

дня. Сколько времени нужно каждому из них на выполнение всей

работы, если известно, что первый проработал 2 дня, а второй один, то

Формула  $A = vt$  поможет нам составить уравнение

всего было бы сделано всей работы.

справка

	$t$ , дн.	$A$ , часть	$v$ , часть/дн.
1	$x$	1	$\frac{1}{x}$
2	$y$	1	$\frac{1}{y}$

Выразим скорость работы, для этого работу : время

$$v = \frac{A}{t}$$

Скорость совместной работы находим сложением скоростей

Работая вместе, рабочие выполнили работу, т.е. 1 часть

$$v_{\text{совм}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$A = 1$$

$$t = 2$$

Найдем работу, которую выполнит Iй раб. за 2 ч по формуле  $A = vt$

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$A_2 = 1 \cdot \frac{1}{y}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

Найдем работу, которую выполнит IIй раб. за 1 ч по формуле  $A = vt$

**СЕДЬМАЯ!!!** Двум рабочим было поручено изготовить партию

одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч и второй 4 ч,

оказалось,  $\frac{5}{9}$

что они выполнили  $\frac{5}{9}$  всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они

установили, что им остается выполнить  $\frac{1}{18}$  всей работы. За сколько

часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

	$t, \text{ ч}$	$A, \text{ часть}$	$v, \text{ часть/ч}$
1	$x$	1	$\frac{1}{x}$
2	$y$		$\frac{1}{y}$

Совместно проработали 4 ч.  
Находим работу по формуле  $A=vt$

(справка)  $(\quad) \cdot 4 = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{18}$

Найдем работу, которую выполнит I<sup>й</sup> раб. за 7 ч по формуле  $A = vt$

Рассчитаем часть работы, которую они

выполнят за 4 ч совместной работы. Найдем работу, которую выполнит II<sup>й</sup> раб. за 4 ч по формуле  $A = vt$

справка  $A_1 = 7 \cdot \frac{1}{x}$

справка  $A_2 = 4 \cdot \frac{1}{y}$

справка  $v_{\text{совм}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Скорость совместной работы находим сложением скоростей

работы 1 вычтем работу, которую они уже выполнили  $\frac{5}{9}$  И вычтем работу, которую им осталось выполнить  $\frac{1}{18}$





$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18} - \frac{5}{9} - \frac{1}{18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{3}{x} = \frac{3}{18} \end{cases}$$

$$\frac{7}{18} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{5}{9} - \frac{7}{18}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{3}{18}$$

$$y = 24$$

$$x = 18$$

Ответ:

за 18ч мог бы выполнить всю работу 1<sup>й</sup> рабочий, работая отдельно,  
за 24 ч – 2<sup>й</sup> рабочий.

**СЕМЬ задач  
решили?!  
МОЛОДЦЫ!!!**

**Далее просто  
смотрим и  
вникаем!!!**

Из городов А и В навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, выезда. Сколько часов затратили на весь путь?

Если в задаче не дано расстояние, очень удобно считать весь путь, как 1 целая часть.

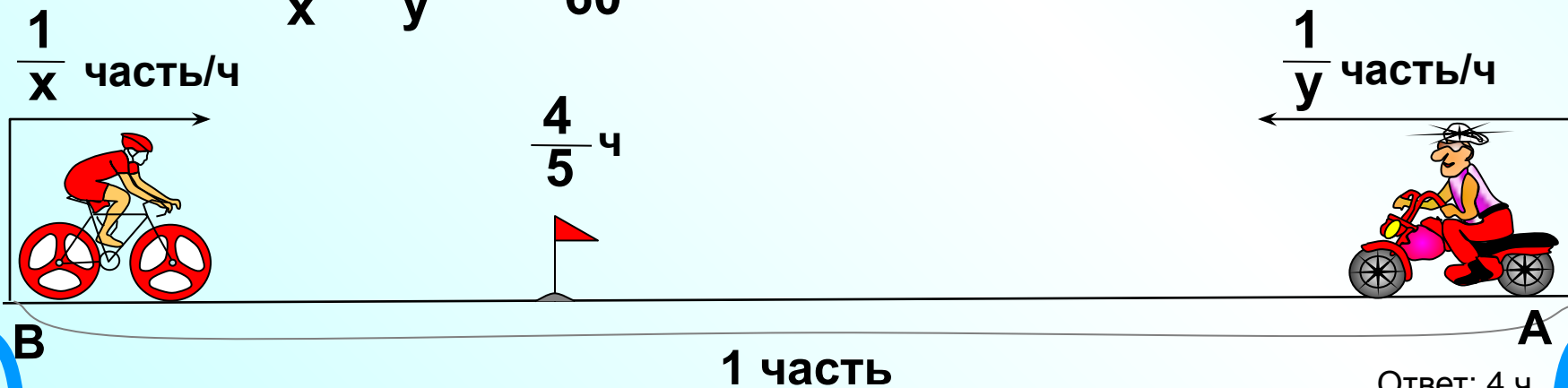
на весь путь

	$t, \text{ ч}$	$S, \text{ часть}$	$v, \text{ часть/ч}$
<b>Велосипедист В-А</b>	$x$	На 3 часа $>$	$\frac{1}{x}$
<b>Мотоциклист А-В</b>	$y$	← 1	$\frac{1}{y}$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \frac{4}{5} = 1 \end{cases}$$

$v$  навстречу  $t$  встречи  $S$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$$



Ответ: 4 ч

6. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

Составим уравнение между  $x$  и  $x+6$ .  
 Начнем с времени работы каждого двигателя (ч)

	$t, \text{ ч}$	$A, \text{ г}$
1	$x+2$ <small>справка</small>	300 <small>справка</small>
2	$x$	192

Общий расход горючего для каждого двигателя – это  $A$  (г)

Выразим скорость работы, для этого работу : время

$$v = \frac{A}{t}$$

$$\frac{300}{x+2} \geq \frac{192}{x} \quad \text{на } 6\text{г/ч}$$

Но, решив это уравнение, придется сделать еще дополнительные действия, чтобы ответить на вопрос задачи.

**№113367.** Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно  $390$  км. Из города  $A$  в город  $B$  выехал автомобиль, а через  $30$  минут следом за ним со скоростью  $70$  км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе  $C$  и повернул обратно. Когда он вернулся в  $A$ , автомобиль прибыл в  $B$ . Найдите расстояние от  $A$  до  $C$ . Ответ дайте в километрах.

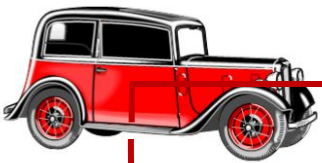
$70$  км/ч

$30$  мин



$S$

$C$



$A$

$B$

$390$

**Решение.** Обозначим расстояние от  $A$  до  $C$  за  $S$  км, скорость автомобиля – за  $x$  км/ч. Тогда время движения на этом участке можно выразить уравнением:

для автомобиля  $\rightarrow$   $\frac{S}{x} = \frac{S}{70} + \frac{1}{2}$   $\leftarrow$  для мотоциклиста

А время движения автомобиля на всем участке от А до В:

для мотоциклиста  $\rightarrow$   $\boxed{\frac{2S}{70}} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{390}{x}}$   $\leftarrow$  для автомобиля

$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{70} + \frac{1}{2}, \\ \frac{2S}{70} + \frac{1}{2} = \frac{390}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S+35}{70}, \\ \frac{2S+35}{70} = \frac{390}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{70S}{S+35}, \\ \frac{2S+35}{70} = \frac{390(S+35)}{70S}; \end{cases}$$

$$\frac{2S+35}{70} = \frac{390(S+35)}{70S} \quad | \times 70S$$

$$2S^2 + 35S = 390S + 390 \cdot 35$$

$$2S^2 - 355S - 13650 = 0$$

$$\begin{cases} S = 210 \\ S = -32,5 - \text{не удовлет-ет условию } S > 0 \end{cases}$$

$$S = 210$$

Ответ: 210.

6. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивал в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходовал каждый из двигателей?

Решим эту задачу с помощью системы уравнений...

Начнем с времени работы каждого двигателя (ч)



Введем переменную для расхода горючего в час (г/ч)



	ч	$v$ , г/ч	$A$ , г
1	$x+2$ <small>справка</small>	$y+6$ <small>справка</small>	$(x+2)(y+6)$
2	$x$	$y$	$xy$

справка

Найдем общий расход бензина по формуле  $A = vt$



$$= 300$$

$$= 192$$

$$(x+2)(y+6) = 300,$$

$$xy = 192.$$



$$(x+2)(y+6) = 300,$$

$$xy = 192;$$

$$xy+6x+2y+12 = 300,$$

$$xy = 192;$$

$$192+6x+2y+12 = 300,$$

$$6x+2y = 96, \quad /: 2$$

	Ч	$v$ , г/ч	$A$ , г
30	1 $x+2$	<input checked="" type="checkbox"/> 6	$(x+2)(y+6) = 300$
x	2 $x$	<input checked="" type="checkbox"/> $y$	$xy = 192$

$$3x^2 - 48x + 192 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 24^2 - 3 \cdot 192 = 0$$

$$x = \frac{24 + 0}{3} = 8$$

$$y = 48 - 3 \cdot 8 = 24$$

$$y = 48 - 3x,$$

$$x(48 - 3x) = 192;$$

$$48x - 3x^2 = 192$$

$$y = 24,$$

$$x = 8.$$

Теперь ответим на вопрос задачи.  
24 г/ч расходует 2<sup>й</sup> двигатель,  
30 г/ч – 1<sup>й</sup> двигатель.