МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс рассчитан на 2 семестра
В этом семестре будет:
34 часа лекций,
50 часов практических занятий,
Экзамен в конце семестра

Вопросы для рассмотрения на лекции

1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА.
2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – часть математики, изучает переменные величины и их взаимосвязи.

ВЕЛИЧИНА – все, что можно измерить и выразить **ЧИСЛОМ**, например: длина, площадь, объем, вес, температура, скорость, сила и т. п.

Математика отвлекается(АБСТРАГИРУЕТСЯ) от физического смысла величины и изучает только ее ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

ВЕЛИЧИНА называется **ПЕРЕМЕННОЙ**, если она принимает **РАЗЛИЧНЫЕ** численные значения.

ВЕЛИЧИНА, которая **СОХРАНЯЕТ ОДНО И ТО ЖЕ ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ**, называется **ПОСТОЯННОЙ** (***КОНСТАНТОЙ*** от латинского слова *constanta* – постоянная, сокращенно *const*.)

ПРИВЕСТИ еще ТРИ примера ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН и пример КОНСТАНТЫ.

Основы теории множеств

МНОЖЕСТВО – это совокупность ***элементов***, у которых есть какое-то ОБЩЕЕ СВОЙСТВО (или признак).

Например: множество студентов в группе,

множество футбольных команд в Татарстане,

множество целых четных чисел,

… придумать три своих примера множеств.

МНОЖЕСТВО обозначают ЗАГЛАВНЫМИ латинскими буквами: $A, B, C, X, \ldots$

а ***элементы***, образующие это множество – маленькими(строчными) буквами: $a, b, c, x, \ldots$

Знак $\in$ наз. знаком принадлежности : $x \in A$ (элемент x принадлежит множеству A)

Если y не является элементом множества B, то пишут: $y \notin B$.

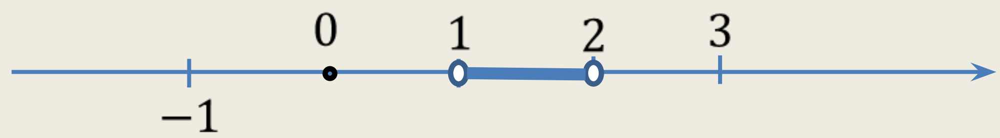
(элемент y не принадлежит множеству B)

Иногда множество можно задать ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ всех его элементов:

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Если элементов много(или бесконечно много), то перечислять неудобно (или невозможно), тогда указывают ОБЩЕЕ СВОЙСТВО:

$$B = \{x \mid 1 < x < 2\};$$



Если два множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они наз. РАВНЫМИ:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 2, 1\}$$

$$A = B$$

Рассмотрим $C = \{x \mid 2 < x < 0\}$;

в нем нет ни одного элемента;
это ПУСТОЕ множество: $C = \emptyset$

Подмножества

Некоторое множество C наз. ПОДМНОЖЕСТВОМ множества D, если каждый элемент множества C принадлежит и множеству D.

$\subset$ - знак включения $C \subset D$ (множество C является подмножеством множества D)

$\not\subset$ - знак невключения $C \not\subset F$ (множество C не является подмножеством множества F)

ПРИМЕР 1. Пусть : C – множество всех четных чисел, а Z – множество всех целых чисел .

Тогда $C \subset Z$ $Z \not\subset C$

ПРИМЕР 2. Пусть K – множество всех квадратов, П – множество всех прямоугольников;

Тогда $П \not\subset K$ $K \subset П$

ПРИМЕР 3. Пусть A – множество всех эллипсов, а G – множество всех окружностей;

Тогда $A \not\subset G$ $G \subset A$

… придумать три своих примера подмножеств.

Принято считать, что пустое множество является подмножеством ЛЮБОГО множества A

$$\emptyset \subset A$$

Логические символы

$\in$ принадлежит

$\notin$ не принадлежит

$\subset$ содержится

$\not\subset$ не содержится

$\vee$ «или» (логическое сложение, дизъюнкция)

$\wedge$ «и» (логическое умножение, конъюнкция)

$\Rightarrow$ следует, влечет, если…, то

$A \Rightarrow B$ из A следует B; A – это ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ для B;

B – НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ для A.

$\Leftrightarrow$ тогда и только тогда, необходимо и достаточно, равносильно

$\exists$ существует (квантор существования)

$\forall$ для любого, любой (квантор всеобщности)

Числовые множества

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ множество всех натуральных чисел.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ множество всех целых чисел.

$\mathrm{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in Z, n \in N \right\}$ множество всех рациональных чисел.

$\sqrt{2}$ π числа, которые невозможно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$

$I = \{\text{иррациональные}\}$

$R = Q \cup I$ множество всех действительных чисел.

$$N \subset Z \subset \mathrm{Q} \subset R$$

Числовая прямая

Числовая прямая –

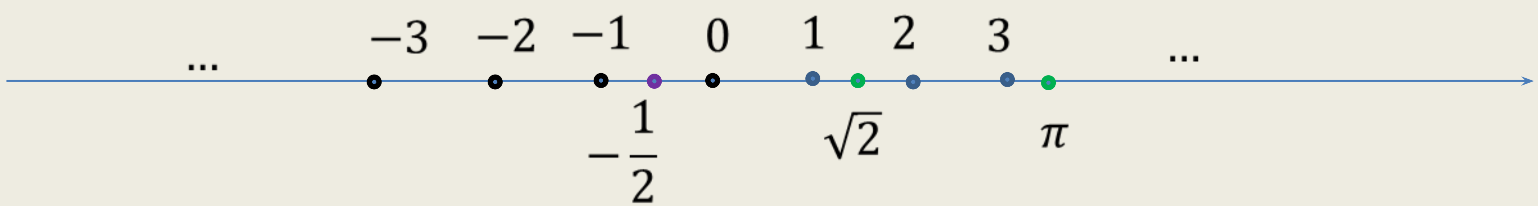
геометрическая иллюстрация множества действительных чисел R.

N;

к натуральным добавляют ноль и отрицательные: Z

к целым добавляют дробные $\frac{m}{n}$: Q

к рациональным добавляют иррациональные : R.



Каждому действительному числу соответствует точка на прямой;

каждая точка представляет действительное число;

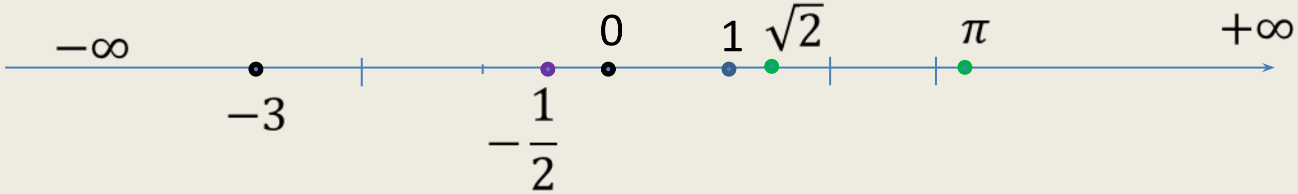
установлено ***ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ***

между двумя множествами.

Расширенная числовая прямая

Требуется дополнить числовую прямую двумя несобственными элементами: $-\infty$ и $+\infty$.

Получим расширенную числовую прямую (ось) $\overline{R} = [-\infty; +\infty]$



Свойства операций с несобственными элементами:

1) $-\infty < +\infty$
2) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
4) $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$
5) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$
6) $\forall a \in \mathrm{R} \Leftrightarrow \quad -\infty < a < +\infty$
7) $\forall a > 0, a \in \mathrm{R} \quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
8) $\forall a < 0, a \in \mathrm{R} \quad a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
9) $\forall a \in \mathrm{R} \quad a + (\pm\infty) = \pm\infty$

Операции, которые не определены

1) $(+\infty)+(-\infty)$

2) $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3) 1^{∞}

4) $\dfrac{0}{0}$

5) 0^{0}

6) ∞^{0}

7) $0\cdot(\pm\infty)$

ЗНАТЬ НАИЗУСТЬ

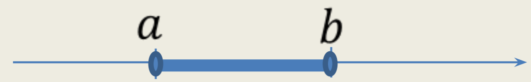
В любом порядке

Виды промежутков

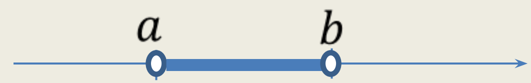
Пусть даны два числа $a, b \in R, a < b$;

Числовые промежутки:

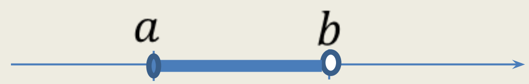
$[a, b]$ отрезок;

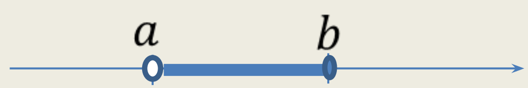


(a, b) интервал;



полуинтервал $\begin{cases} [a, b) \\ (a, b] \end{cases}$



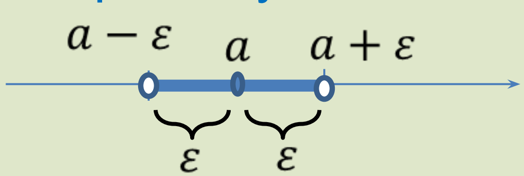


Бесконечные промежутки :

$(a, +\infty), (-\infty, b) -$ бесконечный интервал;

$[a, +\infty), (-\infty, b] -$ бесконечный полуинтервал;

Дома сделать рисунки для бесконечных промежутков.



$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – эпсилон-окрестность точки a;

ε эпсилон (буква греческого алфавита)

Числовые последовательности

Каждому натуральному числу $n \in N$ поставим в соответствие

некоторое действительное число $x_n \in R$: $n \to x_n$.

ПРИМЕР
Ы:

последовательность
всех четных натуральных
чисел:

$1 \to 2; \quad x_1 = 2;$

$2 \to 4; \quad x_2 = 4;$

$3 \to 6; \quad x_3 = 6;$

$4 \to 8; \quad x_4 = 8;$

…

$n \to 2 \cdot n; \; x_n = 2n;$

…

$\{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$ ил
и $\{2n\}_1^{\infty}$

последовательность
всех квадратов натуральных
чисел:

$1 \to 1^2 = 1, \; x_1 = 1;$

$2 \to 2^2 = 4, \; x_2 = 4;$

$3 \to 3^2 = 9, \; x_3 = 9;$

$4 \to 4^2 = 16, \; x_4 = 16;$

…

$n \to n^2; \quad x_n = n^2;$

…

$\{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$ ил
и $\{n^2\}_1^{\infty}$

Множество нумерованных чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ называют :

числовая последовательность и обозначают $\{x_n\}_1^{\infty}$.

Способы задания числовых последовательностей

РЕКУРРЕНТНЫЙ способ задания

правило, позволяющее вычислить элемент x_n с номером n, если известен предыдущий элемент с номером $n-1$ x_{n-1} (*recurre* - возвращаться).

(начальный элемент с номером $n=1$ x_1 задается отдельно)

НО: такой способ не всегда удобен (x_{100}).

АНАЛИТИЧЕСКИЙ способ задания : формула n - го(общего) элемента :

$$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Дома вычислить пять первых элементов последовательности $\{y_n\}_1^\infty$

СЛОВЕСНЫЙ способ задания (последовательность простых чисел).

Какие числа называются простыми? Дома найти пять первых элементов последовательности простых чисел

Понятие **предела** последовательности

Рассмотрим две последовательности и выпишем по пять первых элементов :

$0 \quad C \subset D$

$1 \quad C$

$A \quad \notin$

$\in \quad \notin$

$\notin \quad \in$

, то есть целых чисел, которые можно разделить на 2, и ответ будет целым числом. $\in$

8

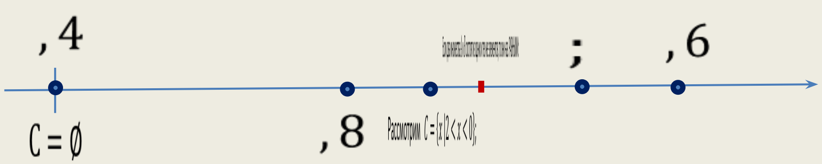
$C \quad \in$

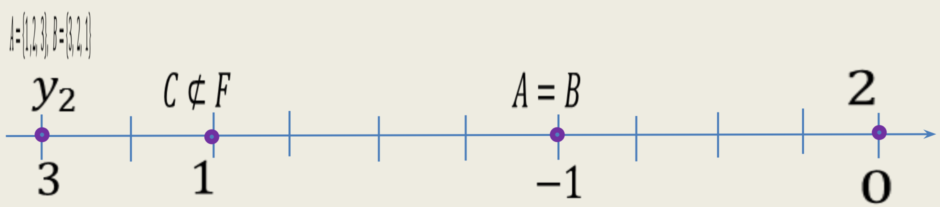
$C \quad \in$

$C \quad A = \{1, 2, 3\}.$

$C \quad 0$

$C \quad , 2$





Есть ли точка, которая обладает свойством «**притягивать**» элементы последовательности?

Определение **предела** последовательности

$$\not\subset$$

$$\Longrightarrow$$

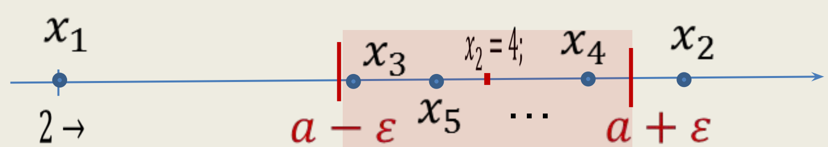
ЗНАТЬ НАИЗУСТЬ

Геометрический смысл **предела** последовательности

$$\in$$

$$\notin$$

если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N(\varepsilon)$, это значит, что все элементы последовательности, следующие за x_N, находятся в выбранной ε- окрестности точки a. **Вне** этой окрестности лежит лишь **КОНЕЧНОЕ** множество элементов.



Число a наз. ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если в ***любой ε- окрестности*** точки a ***находятся ВСЕ элементы последовательности, начиная с некоторого номера*** (зависящего только от ε).

Поэтому **добавление или исключение КОНЕЧНОГО** множества элементов **не влияет** на **сходимость** последовательности и **значение ее предела**.

Сходящаяся последовательность

Последовательность, у которой ***существует КОНЕЧНЫЙ*** **предел**, наз. ***СХОДЯЩЕЙСЯ***.

Последовательность, у которой **не существует КОНЕЧНОГО предела**, наз. **РАСХОДЯЩЕЙСЯ**.

ПРИМЕРЫ:

1) Последовательность всех квадратов натуральных чисел: 2 **РАСХОДЯЩАЯСЯ**

2) Последовательность N; ***СХОДЯЩАЯСЯ***

3) Последовательность π **РАСХОДЯЩАЯСЯ**

4) Последовательность ∈ принадлежит ***СХОДЯЩАЯСЯ***

Контрольные вопросы

1. Как сооотносятся понятия множество и подмножество?
2. Что такое расширенная числовая прямая?
3. Какие операции с несобственными элементами не определены?
4. Какие существуют способы задания числовых последовательностей?
5. Что такое предел последовательности?