

1. ЭНТРОПИЯ КАК МЕРА СТЕПЕНИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ


Сообщением является последовательность дискретных элементов (знаков, символов) или непрерывная функция. Следует отметить, что все реальные сообщения в виде непрерывных функций могут быть сведены к последовательностям дискретных элементов.

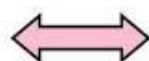
Устройство, явление или причину, порождающие сообщения, удобно толковать как **источники информации**, обладающие определенным алфавитом, который должен быть известен до начала проведения измерений или расчетов количества информации. Источники информации могут быть **дискретными** и **непрерывными**, в соответствии с видом порождаемых сообщений. Мы в дальнейшем будем в основном рассматривать **дискретные источники**.



Схема передачи информации:



 Односторонний канал

 Двусторонний канал

Дискретный источник обладает конечным алфавитом из M элементов, обозначаемых $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_M$, каждый из которых характеризуется вероятностью $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_i), \dots, P(x_M)$ появления в **сообщении**. То есть мы опять имеем дело со случайными событиями.

Совокупность элементов и их вероятностей удобно задавать в виде матрицы:

$$\begin{array}{l} \left\| \begin{array}{c} X \\ P \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \boxtimes & x_M \\ P(x_1) & P(x_2) & \boxtimes & P(x_M) \end{array} \right\| \end{array}$$

В большинстве реальных случаев появление элемента x_i в сообщении зависит от того, какой элемент x_j был предшествующим.



Взаимосвязь элементов в сообщении характеризуется **матрицей условных вероятностей**:

$$P_{x_j}(x_i) = P_j(i) = \begin{vmatrix} P_1(1) & P_1(2) & \boxtimes & P_1(i) & \boxtimes & P_1(M) \\ P_2(1) & P_2(2) & \boxtimes & P_2(i) & \boxtimes & P_2(M) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ P_j(1) & P_j(2) & \boxtimes & P_j(i) & \boxtimes & P_j(M) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ P_M(1) & P_M(2) & \boxtimes & P_M(j) & \boxtimes & P_M(M) \end{vmatrix}$$

При отсутствии взаимосвязи элементов:

$$P_{x_1}(x_i) = P_{x_2}(x_i) = \dots = P_{x_M}(x_i) = P(x_i)$$

Неопределенность выбора элементов x_i при создании сообщения удобно характеризовать **энтропией источника $H(x)$** .

При независимых элементах:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^M P(i) \log(P(i))$$

При зависимых элементах с условными вероятностями сначала определяется **частная условная энтропия**, вычисленная по предыдущей формуле, но в предположении зафиксированного предыдущего элемента x_j :

$$H_{x_j}(x) = -\sum_{i=1}^M P_j(i) \log(P_j(i))$$

Величина $H(x)$ случайная, так как случайным является предшествующий элемент x_j . Поэтому для получения полной энтропии источника необходимо произвести усреднение по вероятностям появления предшествующих элементов:

$$H(x) = -\sum_{j=1}^M \left[\sum_{i=1}^M P_j(i) \log(P_j(i)) \right] \cdot P(j)$$

Это формула **средней условной энтропии** или просто **энтропии источника**, которая учитывает взаимозависимость элементов в сообщении.

Задача №1

Пусть из многолетних наблюдений за погодой известно, что для определенного пункта вероятность того, что 15 июня будет идти дождь, равна 0,4, а вероятность того, что в указанный день дождя не будет, равна 0,6. Пусть далее для этого же пункта вероятность того, что 15 ноября будет идти дождь равна 0,65, вероятность, что будет идти снег – 0,15 и вероятность того, что 15 ноября вовсе не будет осадков равна 0,2. В какой из двух перечисленных дней погоду в рассматриваемом пункте следует считать более неопределенной: 1) если из всех характеристик погоды интересоваться вопросом о характере осадков; 2) если интересоваться лишь вопросом о наличии осадков.

Решение:

Согласно тому, как понимается здесь слово «погода» имела место 15 июля и 15 ноября, характеризуется следующими таблицами вероятностей:

Опыт α_1

исходы опыта	дождь	отсутствие осадков
вероятность	0,4	0,6

Опыт α_2

исходы опыта	дождь	снег	отсутствие осадков
вероятность	0,65	0,15	0,2



1) Поэтому энтропии наших двух опытов равны

$$H(\alpha_1) = -0,4 \log 0,4 - 0,6 \log 0,6 = 0,4 \cdot 1,33 + 0,6 \cdot 0,74 \approx 0,98 \text{ бита}$$

$$H(\alpha_2) = -0,65 \log 0,65 - 0,15 \log 0,15 - 0,2 \log 0,2 = 0,403 + 0,4125 + 0,48 \approx 1,28 \text{ бита}$$


Поэтому погоду **15 ноября** в рассматриваемом пункте следует считать более неопределенной, чем **15 июня**.

2) Если интересоваться только тем, будут в рассматриваемый день осадки или нет, то исходы «**снег**» и «**дождь**» опыта α_2 следует объединить:

$$H(\alpha_1) \approx 0,98 \text{ бита (без изменений)}$$

$$H(\alpha_2) = -0,8 \log 0,8 - 2 \log 0,2 = 0,264 + 0,48 \approx 0,72 \text{ бита}$$

Тогда погоду **15 ноября** в рассматриваемом пункте следует считать менее неопределенной, чем **15 июня**.



Задача №2

Имеются два дискретных троичных источника с независимыми элементами. На выходе каждого источника появляются сообщения одинаковой длины – по 15 элементов. Количество различных элементов в сообщении каждого источника постоянно. Сообщения каждого источника отличаются только порядком следования элементов, а состав сообщений постоянный. Зафиксированы два типичных сообщения: 021202120212021 – первого источника и 012101201101201 – второго. Для какого источника неопределенность появления элементов выше?

Решение:

$$p_0^1 = \frac{4}{15} \quad p_1^1 = \frac{4}{15} \quad p_2^1 = \frac{7}{15} \quad p_0^2 = \frac{1}{3} \quad p_1^2 = \frac{7}{15} \quad p_2^2 = \frac{1}{5}$$

Для первого источника:

$$H_1 = -\sum_{i=0}^2 p_i^1 \cdot \log p_i^1 = -\frac{4}{15} \log \frac{4}{15} - \frac{4}{15} \log \frac{4}{15} - \frac{7}{15} \log \frac{7}{15} = 1,53 \text{ бит}$$

Для второго источника:

$$H_2 = -\sum_{i=0}^2 p_i^2 \cdot \log p_i^2 = -\frac{5}{15} \log \frac{5}{15} - \frac{7}{15} \log \frac{7}{15} - \frac{3}{15} \log \frac{3}{15} = 1,506 \text{ бит}$$

Напомним, что средняя условная энтропия опыта β при условии выполнения опыта α находится по формуле (см. лекции):

$$H_\alpha(\beta) = p(A_1)H_{A_1}(\beta) + p(A_2)H_{A_2}(\beta) + \dots + p(A_k)H_{A_k}(\beta)$$

Задача №3

Ракеты двух пусковых установок используются для поражения двух целей. Ракета, пущенная с первой установки, поражает цель номер один с вероятностью 0,5, цель номер два – с вероятностью 0,3, и дает промах с вероятностью 0,2. Ракета второй установки поражает первую цель вероятностью 0,3, а вторую – с вероятностью 0,5 и вероятность промаха 0,2. Вероятность выбора первой установки 0,4. Чему равна неопределенность выбора установки: 1) если известно, что поражена вторая цель; 2) если произошел промах?

Решение:

Полагаем, что варианты поражения целей соответствуют случайному опыту B , а выбор ракетной установки – опыту A . Вероятности поражения целей ракетами различных установок представляют собой условные вероятности:

$$P_A(B) = \begin{vmatrix} p_{A_1}(B_1) & p_{A_1}(B_2) & p_{A_1}(B_3) \\ p_{A_2}(B_1) & p_{A_2}(B_2) & p_{A_2}(B_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{vmatrix}$$

$$P(A) = \begin{vmatrix} p(A_1) & p(A_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 \end{vmatrix}$$

Неопределенность выбора установки при условии, что поражена вторая цель представляет собой энтропию:

$$H_{B_2}(A) = -\sum_{i=1}^2 p_{B_2}(A_i) \cdot \log(p_{B_2}(A_i))$$

Неопределенность выбора установки в случае промаха есть энтропия:

$$H_{B_3}(A) = -\sum_{i=1}^2 p_{B_3}(A_i) \cdot \log(p_{B_3}(A_i))$$

Поэтому нам необходимо найти условные вероятности $p_{B_2}(A_i)$ и $p_{B_3}(A_i)$. Для этого определяем элементы матрицы $P(B)$ по формуле полной вероятности:

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^2 p(A_i) \cdot p_{A_i}(B_j)$$

$$P(B_1) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,38$$

$$P(B_2) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,42$$

$$P(B_3) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,2$$

$$P(B) = \left\| p(B_1) \quad p(B_2) \quad p(B_3) \right\| = \left\| 0,38 \quad 0,42 \quad 0,2 \right\|$$

Теперь мы можем найти *условные вероятности* (см. тему «условные вероятности»):

$$P_{B_j}(A_i) = \frac{P_{A_i}(B_j)}{P(B_j)} \cdot P(A_i)$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_{B_1}(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,38} = 0,526$$

$$P_B(A) = \left\| \begin{array}{cc} P_{B_1}(A_1) & P_{B_1}(A_2) \\ P_{B_2}(A_1) & P_{B_2}(A_2) \\ P_{B_3}(A_1) & P_{B_3}(A_2) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0,526 & 0,474 \\ 0,286 & 0,714 \\ 0,4 & 0,6 \end{array} \right\|$$

В результате находим:

$$H_{B_2}(A) = -\sum_{i=1}^2 p_{B_2}(A_i) \cdot \log(p_{B_2}(A_i)) = -0,286 \log 0,286 - 0,714 \log 0,714 = 0,86$$

$$H_{B_3}(A) = -\sum_{i=1}^2 p_{B_3}(A_i) \cdot \log(p_{B_3}(A_i)) = -0,4 \log 0,4 - 0,6 \log 0,6 = 0,97$$

Имеются 2 урны.

Первая содержит 20 шаров – 10 белых, 5 черных и 5 красных;

Вторая содержит 16 шаров: 4 белых, 4 черных и 8 красных во второй.

Из каждой урны вытаскивают по одному шару. Исход какого из этих двух опытов следует считать более неопределенным? (Приложение №3.)

■ Первый опыт связан с первой корзиной:

$$H(\alpha) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ бита}$$

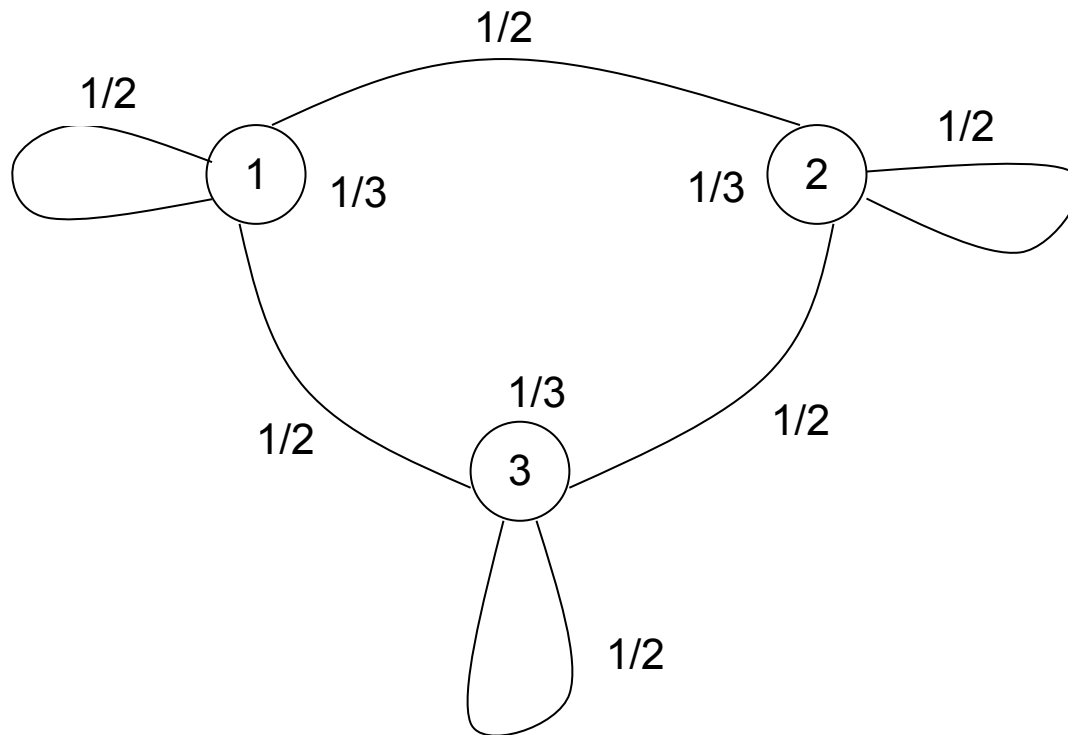
□ Второй опыт связан со второй корзиной:

$$H(\beta) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ бита}$$



Задача №6

Найти энтропию источника, описываемого графом вероятностей перехода.



Решение:

Составляем матрицы вероятностей состояний и условных вероятностей:

$P(1)$ – P появление 1го

$$\begin{cases} P(1) = P(1) \cdot P(1|1) + P(2) \cdot P(1|2) + P(3) \cdot P(1|3) \\ P(2) = P(1) \cdot P(2|1) + P(2) \cdot P(2|2) + P(3) \cdot P(2|3) \\ P(3) = P(1) \cdot P(3|1) + P(2) \cdot P(3|2) + P(3) \cdot P(3|3) \\ P(1) + P(2) + P(3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(1) = P(1) \cdot \frac{1}{2} + P(3) \cdot \frac{1}{2} \\ P(2) = P(1) \cdot \frac{1}{2} + P(2) \cdot \frac{1}{2} \\ 1 = P(1) + P(2) + P(3) \end{cases}$$

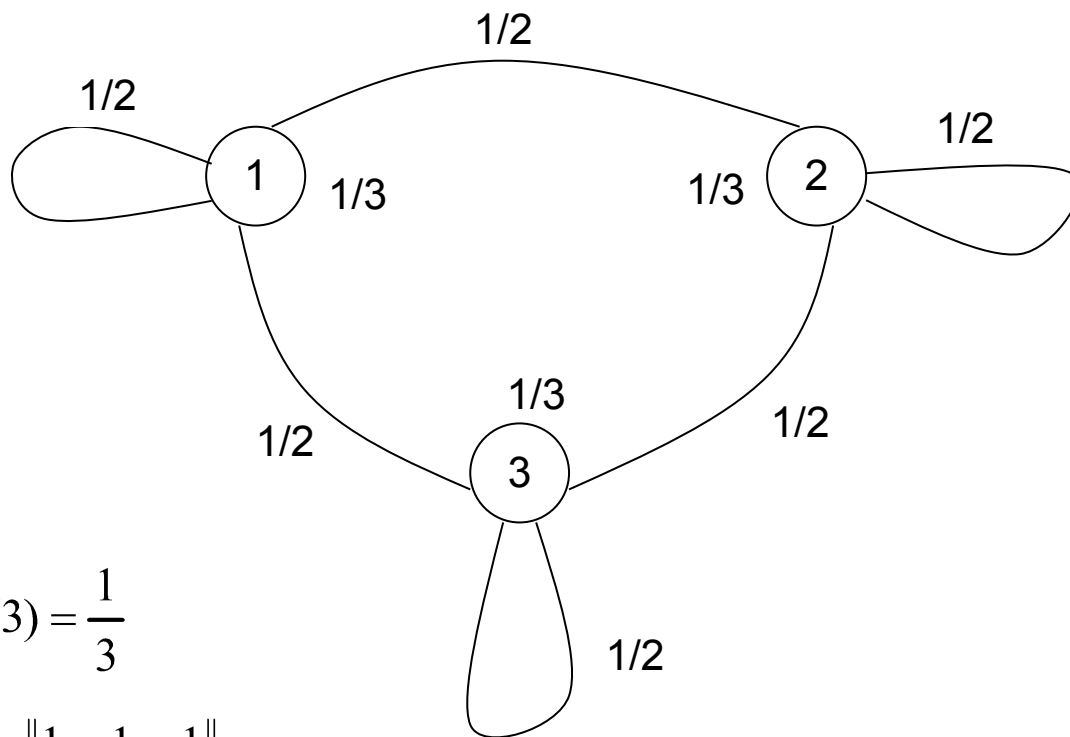
$$P(3) = 2P(1) - P(1) = P(1)$$

$$2P(2) - P(2) = P(1)$$

$$\begin{aligned} P(3) &= P(1) \\ P(2) &= P(1) \end{aligned} \Rightarrow P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \left\| \begin{matrix} p(A_1) & p(A_2) & p(A_3) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\|$$

$$P_{A_i}(A_j) = \left\| \begin{matrix} P_{A_1}(A_1) & P_{A_1}(A_2) & P_{A_1}(A_3) \\ P_{A_2}(A_1) & P_{A_2}(A_2) & P_{A_2}(A_3) \\ P_{A_3}(A_1) & P_{A_3}(A_2) & P_{A_3}(A_3) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{matrix} \right\|$$



Теперь находим среднюю условную энтропию:

$$H_{A_i}(A_j) = \sum_{i=1}^3 p(A_i) \sum_{j=1}^3 p_{A_i}(A_j) \cdot \log(p_{A_i}(A_j)) = \frac{1}{3} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) \cdot 3 = 1 \quad \text{бит}$$

Задача №4

Пусть опыты α и β состоят в последовательном извлечении двух шаров из урны, содержащей m черных и $(n-m)$ белых шаров (α - извлечение первого шара и β - извлечение второго шара). Чему равна энтропия $H(\alpha)$, $H(\beta)$ и условная энтропия $H_\alpha(\beta)$?

Решение:

$$H(\alpha) = -\frac{m}{n} \log \frac{m}{n} - \frac{n-m}{n} \log \frac{n-m}{n}.$$

Обозначим:

A_1 – первый раз извлекли черный шар, A_2 – первый раз извлекли белый шар;

B_1 – второй раз извлекли черный шар, B_2 – второй раз извлекли белый шар;

Если нам известен исход опыта α , то:

$$p(A_1) = \frac{m}{n}, \quad p(A_2) = \frac{n-m}{n}.$$

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= -\frac{m}{n} \log \frac{m}{n} - \frac{n-m}{n} \log \frac{n-m}{n} = -\frac{m}{n} \log m + \frac{m}{n} \log n - \frac{n-m}{n} \log(n-m) + \\ &+ \frac{n-m}{n} \log n = -\frac{m}{n} \log m + \frac{m}{n} \log n - \log(n-m) + \frac{m}{n} \log(n-m) + \log n - \frac{m}{n} \log n \end{aligned}$$

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad p_{A_1}(B_2) = \frac{n-m}{n-1};$$

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{m}{n-1}, \quad p_{A_2}(B_2) = \frac{n-m-1}{n-1}.$$

Теперь, по формуле полной вероятности

$$p(B_i) = \sum_{j=1}^2 p(A_j) p_{A_j}(B_i)$$

можно определить безусловные вероятности опыта β :

$$p(B_1) = \frac{m}{n}, \quad p(B_2) = \frac{n-m}{n}.$$

Таким образом, безусловная энтропия опыта β равна безусловной энтропии опыта α .

Найдем частные условные энтропии опыта β , что:

$$H_{A_1}(\beta) = -\frac{m-1}{n-1} \log \frac{m-1}{n-1} - \frac{n-m}{n-1} \log \frac{n-m}{n-1},$$

$$H_{A_2}(\beta) = -\frac{m}{n-1} \log \frac{m}{n-1} - \frac{n-m-1}{n-1} \log \frac{n-m-1}{n-1}.$$

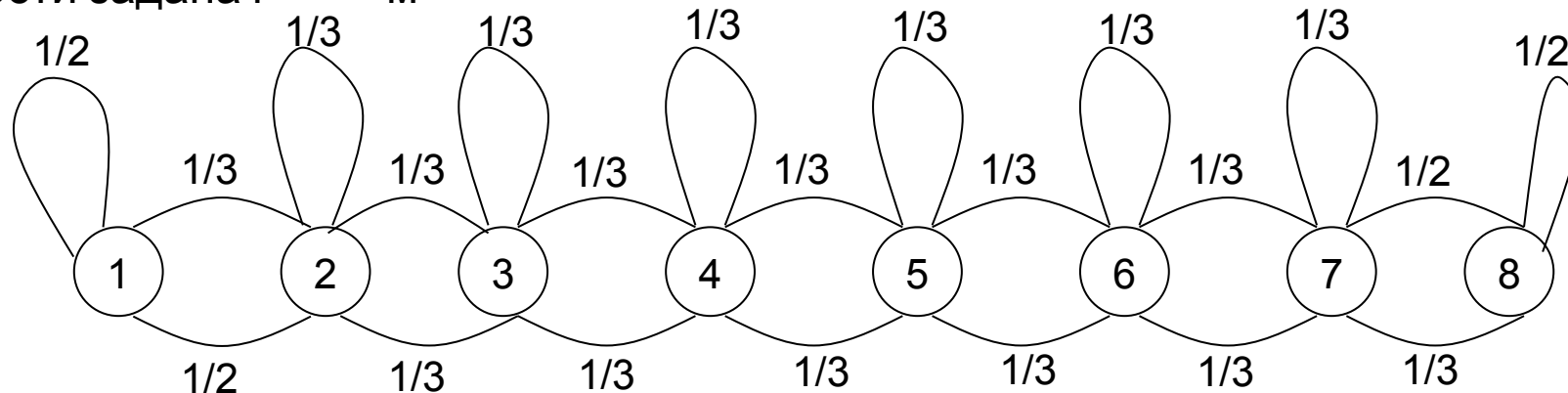
$$H_{\alpha}(\beta) = \frac{m}{n} H_{A_1}(\beta) + \frac{n-m}{n} H_{A_2}(\beta)$$

И, наконец, находим:

$$\begin{aligned} H_{\alpha}(\beta) &= p(A_1)H_{A_1}(\beta) + p(A_2)H_{A_2}(\beta) = \frac{m}{n} \left[-\frac{m-1}{n-1} \log \frac{m-1}{n-1} - \frac{n-m}{n-1} \log \frac{n-m}{n-1} \right] - \\ &- \frac{n-m}{n} \left[-\frac{m}{n-1} \log \frac{m}{n-1} - \frac{n-m-1}{n-1} \log \frac{n-m-1}{n-1} \right] = \frac{nm - m^2 + n^2 - 2nm + m^2 - n + m}{n(n-1)} = \\ &= \frac{-nm + n^2 - n + m}{n(n-1)} = \frac{m(1-n) + n(n-1)}{n(n-1)} = \frac{n-m}{n} \end{aligned}$$

Задача №7

Определить максимальную энтропию телевизионного изображения, содержащего 500 строк по 650 элементов в строке, при условии, что яркость каждого элемента передается восьмью квантованными уровнями, если: а) уровни не коррелированы; б) статистическая связь между различными градациями яркости задана графом



Решение:

а) Максимальная энтропия одного элемента изображения, при условии, что уровни не коррелированы, составляет (энтропия максимальна в случае, если уровни являются равновероятными):

$$500 \cdot 650 = 3250000 \quad p(i) = \frac{1}{8}, i = 1 \dots 8 \quad H^1 = \log(8) = 3 \text{ бита}$$

Так как, у нас элементов 500×650 , то возможное количество состояний $8^{500 \cdot 650}$ изображения, а максимальная энтропия телевизионного изображения равна: $H^i = \log(8^{500 \cdot 650}) = 500 \cdot 650 \cdot \log(8) = 325000 \cdot H^1 = 975000 \text{ бит}$

б) Найдем максимальную среднюю условную энтропию одного элемента. Для этого, исходя из приведенного графа, составим матрицу условных переходных вероятностей:

$$P_{A_i}(A_j) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Уровни считаем равновероятными, так как ищем максимальную энтропию, значит:

$$P(A_i) = \parallel 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \quad 0,125 \parallel$$

Теперь находим максимальную среднюю условную энтропию одного элемента изображения:

$$H_{A_i}^1(A_j) = - \sum_{i=1}^8 P(A_i) \sum_{j=1}^8 P_{A_i}(A_j) \cdot \log(P_{A_i}(A_j)) = 1,439 \text{ бит}$$

Отсюда максимальная энтропия телевизионного изображения равна:

$$H^I = 500 \cdot 650 \cdot H_{A_i}^1(A_j) = 467600 \text{ бит}$$

Задача №8

Дана матрица вероятностей
совместных событий:
Определить энтропии:

$H(X), H(Y), H_{y_1}(X), H_{x_2}(Y), H_{x_3}(Y), H_Y(X), H(X, Y).$

Решение:

$$P(X, Y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$P(X, Y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} \\ \begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} p(x_1 y_1) & p(x_1 y_2) & p(x_1 y_3) \\ p(x_2 y_1) & p(x_2 y_2) & p(x_2 y_3) \\ p(x_3 y_1) & p(x_3 y_2) & p(x_3 y_3) \end{matrix} \end{matrix}$$

1) По формуле полной вероятности имеем:

$$p(x_i) = p(y_1 x_i) + p(y_2 x_i) + p(y_3 x_i), i = 1 \dots 3; \quad p(y_j) = p(y_j x_1) + p(y_j x_2) + p(y_j x_3), j = 1 \dots 3$$

$$p(x_i) = \frac{3}{8}, i = 1 \dots 3; \quad p(x_2) = \frac{2}{8}; \quad p(y_1) = \frac{3}{8}, \quad p(y_2) = \frac{2}{8}, \quad p(y_3) = \frac{3}{8};$$

$$H(x) = -\sum_{i=1}^3 p(x_i) \log p(x_i) = -\left(2 \cdot \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \log \frac{2}{8}\right) = \frac{6}{8} \cdot 1,4 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1,05 + 0,5 = 1,55 \text{ бит}$$

$$H(y) = -\sum_{i=1}^3 p(y_i) \log p(y_i) = -\left(2 \cdot \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \log \frac{2}{8}\right) = \frac{6}{8} \cdot 1,4 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1,05 + 0,5 = 1,55 \text{ бит}$$

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^3 p(y_j, x_i), \quad p(y_i) = \sum_{j=1}^3 p(x_j, y_i), \quad H(x) = H(y) = 1,55 \text{ бита.}$$

$$2) \quad H_y(x) = -\sum_{i=1}^3 p(y_i) \cdot \sum_{j=1}^3 p_{yi}(x_j) \cdot \log(p_{yi}(x_j)), \quad H_x(y) = -\sum_{i=1}^3 p(x_i) \cdot \sum_{j=1}^3 p_{xi}(y_j) \cdot \log(p_{xi}(y_j)),$$

$$p_{yi}(x_j) = p(y_i, x_j) / p(y_i), \quad p_{xi}(y_j) = p(x_i, y_j) / p(x_i), \quad H_y(x) = H_x(y) = 1,43 \text{ бита.}$$

$$3) \quad H_{y_1}(x) = -\sum_{j=1}^3 p_{y_1}(x_j) \cdot \log(p_{y_1}(x_j)), \quad H_{x_2}(y) = -\sum_{j=1}^3 p_{x_2}(y_j) \cdot \log(p_{x_2}(y_j)),$$

$$H_{y_1}(x) = -\log \frac{1}{3} = 1,58 \quad \text{бита.}$$

$$p_{y_1}(x_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{y_1}(x_2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{y_1}(x_3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{y_2}(x_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{2} = \frac{1}{2},$$

$$H_{x_2}(y) = -2 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = 1 \quad \text{бит.}$$

$$p_{x_2}(y_1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{2} = \frac{1}{2}, \quad p_{x_2}(y_2) = 0, \quad p_{x_2}(y_3) = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$4) \quad H(x, y) = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \cdot \log p(x_i, y_j) \quad \text{или} \quad H(x, y) = H(x) + H_x(y);$$

$$p_{y_i}(x_i) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \quad p_{x_i}(y_j) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$H_{y_2}(x) = 1, \quad H_{y_3}(x) = 1,59$$

$$H_y(x) = \sum_{i=1}^3 p(y_i) \cdot H_{y_i}(x) = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot 1,59 + \frac{2}{8} = 1,44 \quad H_y(x) = H_x(y) = 1,44$$

$$H(x, y) = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p(x_i, y_j) \cdot \log p(x_i, y_j) = -8 \cdot \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} = 3 \quad \text{бита.}$$

Задача №9

Информация передается при помощи частотно-модулированных сигналов, рабочая частота F которых изменяется с равной вероятностью в пределах от $F_1=10\text{МГц}$ до $F_2=50\text{МГц}$. Определить энтропию значения частоты, если точность измерения частоты $\Delta F=2\text{кГц}$.

Решение:

Так как точность измерений составляет $\Delta F=2\text{кГц}$, то мы имеем дело с

$$n = \frac{F_2 - F_1}{\Delta F} = 20 \cdot 10^3 \text{ числом равновероятных исходов.}$$

$$p(F_i) = \frac{1}{20 \cdot 10^3}$$

Поэтому энтропия частоты будет определяться:

$$H(F) = \log n = 14,28 \text{ бит.}$$

Напомним некоторые свойства энтропии источников информации.

1) Условная энтропия источника всегда меньше безусловной:

$$0 \leq H(X | Y) \leq H(X)$$

2) Если составной источник состоит из источников информации X и Y , то для случая независимых источников:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y),$$

а для случая зависимых друг от друга источников:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X) \quad \text{или} \quad H(X, Y) = H(Y) + H(X | Y).$$

Задача №11

Элементы алфавитов X и Y статистически связаны. Известно, что $H(X) = 8$ бит, $H(Y) = 12$ бит. В каких пределах меняется условная энтропия $H(Y | X)$ при изменении $H(X | Y)$ в максимально возможных пределах?

Решение:

Т.к.: $H(X, Y) = H(X) + H(Y | X)$ и $H(X, Y) = H(Y) + H(X | Y)$, то можем записать:

$$H(X) + H(Y | X) = H(Y) + H(X | Y).$$

Условная энтропия может изменяться: $0 \leq H(X | Y) \leq H(X)$, поэтому значения какие будет принимать $H(Y | X)$ при изменении $H(X | Y)$ можно определить:

$$H(Y | X) = H(Y) + H(X | Y) - H(X).$$

При минимальном значении: $H(X | Y) = 0$: $H(Y | X) = 0 + 4 = 4$ бит.

При максимальном значении: $H(X | Y) = H(X) = 8$: $H(Y | X) = 8 + 4 = 12$ бит.

$$4 \leq H(Y | X) \leq 12.$$

Дополнительные задачи

Задача №13

Имеются два дискретных источника информации, заданных следующими таблицами вероятностей:

X	x_1	x_2
вероятность	p_1	p_2

Y	y_1	y_2	y_3
вероятность	q_1	q_2	q_3

Определить, какой источник обладает большей неопределенностью в случае, если: а) $p_1 = p_2, q_1 = q_2 = q_3$; б) $p_1 = q_1, p_2 = q_2 + q_3$.

Решение:

1) В случае равновероятных элементов большей неопределенностью обладает троичный источник. При этом неопределенность может быть подсчитана, как $\log M$, где M – число равновероятных состояний.

2) Запишем:

$$\begin{aligned} H(X) &= -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 = -q_1 \log q_1 - (q_2 + q_3) \log(q_2 + q_3) = \\ &= -q_1 \log q_1 - q_2 \log(q_2 + q_3) - q_3 \log(q_2 + q_3) = \\ &= q_1 \log \frac{1}{q_1} + q_2 \log \frac{1}{(q_2 + q_3)} + q_3 \log \frac{1}{(q_2 + q_3)} \end{aligned}$$

$$H(Y) = -q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2 - q_3 \log q_3 = q_1 \log \frac{1}{q_1} + q_2 \log \frac{1}{q_2} + q_3 \log \frac{1}{q_3}$$

Отсюда следует, что $H(X) < H(Y)$.

Задача №14

Определить среднюю неопределенность появления одного символа сообщения 01001000101001, при условии, что вероятность появления элементов на выходе источника информации с течением времени не изменяется, а приведенная последовательность символов – типичная.

Решение:

$$H(x) = -\frac{5}{14} \log \frac{5}{14} - \frac{9}{14} \log \frac{9}{14} = 0,94.$$

Задача №15

Измерительное устройство регистрирует временные интервалы, распределенные случайным образом в пределах от 100 до 500мс. Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения с 1мс до 1мкс?

Решение:

При точности измерения 1мс случайная величина принимает $(500-100)/1=400$ равновероятных значений, а значит ее энтропия:

$$H^1(x) = \log(400) = 8,64 \text{ бита}$$

А при точности измерения 1мкс случайная величина принимает $(500-100)/0.001=400000$ равновероятных значений, а значит ее энтропия:

$$H^1(x) = \log(400000) = 18,61 \text{ бит.}$$

Значит, энтропия случайной величины увеличится примерно на 10 бит.

Задача №16

Опыт X – случайный выбор целого числа от 1 до 1050. Опыт Y – определение величин остатков от деления этого числа на 35. Определить энтропии $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$.

Решение:

Чтобы найти энтропии $H(X)$, $H(Y)$, строим вероятностные схемы для X и Y .

Т.к. X может принимать равновероятные значения от 1 до 1050, то

получаем:

$$X = \left\| \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_{1050} \\ 1/1050 & 1/1050 & \dots & 1/1050 & \dots & 1/1050 \end{array} \right\|,$$

т.к. при делении на 35, остаток от деления может принимать 35 равновероятных значений от 0 до 34, а значит:

$$Y = \left\| \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_{35} \\ 1/35 & 1/35 & \dots & 1/35 & \dots & 1/35 \end{array} \right\|.$$

Находим: $H(X) = \log 1050 = 10,02$ бит, $H(Y) = \log 35 = 5,12$ бит.

Для определения $H(X|Y)$ построим матрицу $P(X|Y)$. При построении данной матрицы будем исходить из следующих соображений, если мы имеем остаток от деления на 35 $y_1 = 0$, то этому должны отвечать числа $x_{35} = 35, x_{70} = 70, \dots, x_{1050} = 1050$, которые отстоят друг от друга на 35 и количество этих чисел равно $1050/35=30$. Так как числа равновероятные, то вероятности их появления при условии, что остаток от деления равен 0, составляет $1/30$. То же самое относится к значениям X при условии других остатков от деления. Т.о. получаем:

		x_1	x_2	x_3	...	x_{35}	x_{36}	x_{37}	...	x_{1050}
$P(X Y) =$	y_1	1/30	0	0	...	0	1/30	0	...	0
	y_2	0	1/30	0	...	0	0	1/30	...	0
	y_3	0	0	1/30	...	0	0	0	...	0
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{35}	0	0	0	0	1/30	0	0	0	1/30

Находим:

$$H(X|Y) = - \sum_{i=1}^{35} p(y_i) \sum_{j=1}^{1050} p(x_j | y_i) \cdot \log(p(x_j | y_i)) = \log 30 = 4,9 \text{ бита.}$$