ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Понятие функции нескольких переменных

Если каждой упорядоченной паре чисел (***x;y***) из некоторого числового множества $D=\{(x;y)\}$ поставлено в соответствие согласно некоторому правилу ***f*** число ***z*** из множества ***Z***, то говорят, что на множестве ***D*** задана **функция двух переменных**

$$z=f(x;y).$$

При этом переменные ***x*** и ***y*** называются **независимыми переменными** (или аргументами).

Множество $D=\{(x;y)\}$ называется **областью определения**, а множество $Z=\{f(x;y)\,|\,(x;y)\in D\}$ – **множеством значений функции**.

Областью определения может быть вся плоскость OXY, или ее часть, ограниченная некоторыми линиями.

Линию, ограничивающую область, называют **границей области.**

Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними.** Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой.**

Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой,** обозначается D .

Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Значение функции $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0;y_0)$ и называют **частным значением функции.**

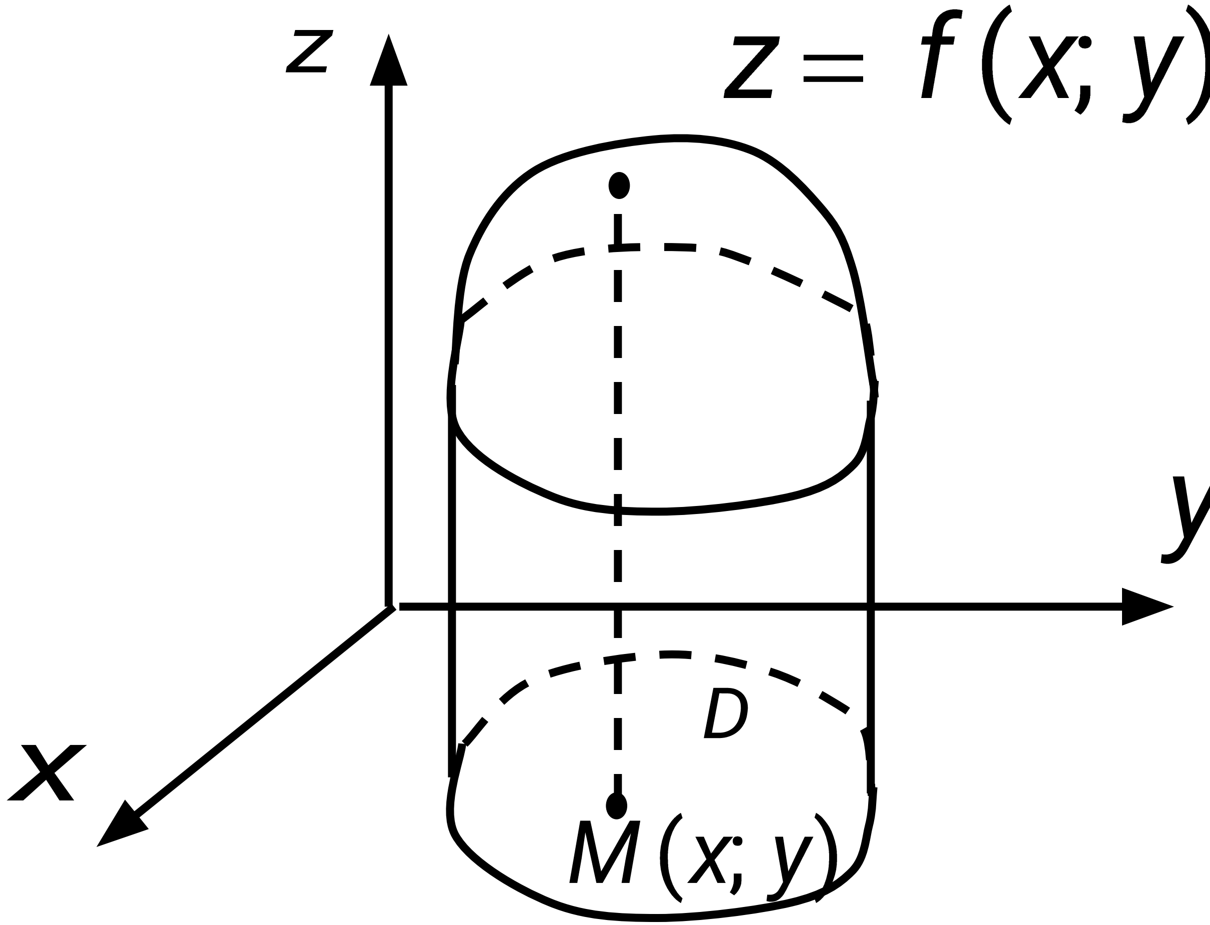
Пример.

Найти значение функции $z = x^2y + 2x - 3y + 1$ в точке $M_0(1;-2)$.

Решение. $z(1;-2) = 1^2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 1 =$

$$= -2 + 2 + 6 + 1 = 7.$$

Графиком функции $z = f(x; y)$ называется поверхность, образованная множеством точек пространства с координатами $(x; y; f(x; y))$ для всех $(x; y) \in D$.


z
z = f(x; y)
y
x
D
M(x; y)

Пример

Найти область определения функции:

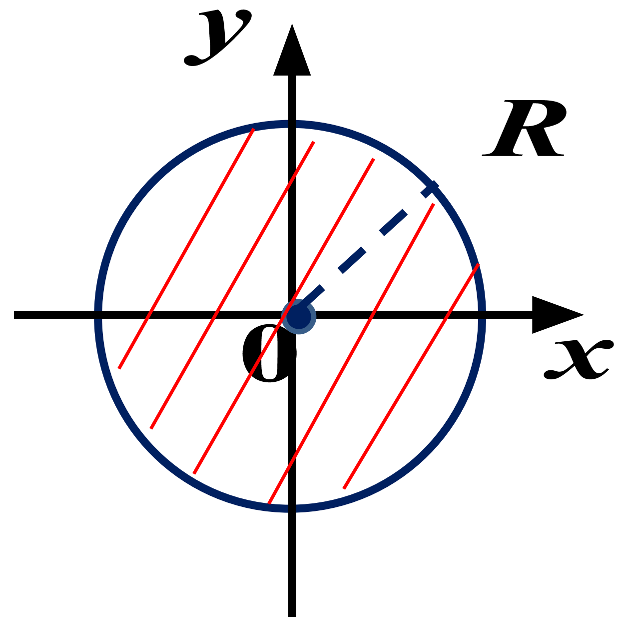
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Решение. $1 - x^2 - y^2 \geq 0,$

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Построим линию $x^2 + y^2 = 1.$

Это окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R = 1.$


y
R
O
x

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами:

- таблицей,
- аналитически,
- графиком.

Будем пользоваться, как правило, аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

Величина ***u*** называется функцией ***n*** переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1; x_2; \ldots, x_n)$, переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области ***n***-мерного пространства соответствует определенное значение ***u***, что символически записывается

$$u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

Линии уровня

Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется множество всех точек плоскости ***OXY*** , в которых функция ***z*** принимает постоянное значение, т.е. $f(x; y) = C$, где ***C*** – постоянная.

Число ***C*** в этом случае называется уровнем.

Многие примеры линий уровня хорошо известны и привычны.

Например, параллели и меридианы на глобусе — это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм — линий уровня температуры.

Построение линий уровня оказывается существенно более легкой задачей, чем построение графиков самих функций.

§2. Предел и непрерывность функции 2-х переменных

ОПР. δ **-окрестностью точки** $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

Т.е. δ -окрестность точки M_0 – это круг радиуса δ с центром в точке M_0

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ (кроме быть может самой точки.

Опр. Число ***А*** называется **пределом функции** $z = f(x;y)$ **при** $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется положительное число δ, такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство

$$\left| f(x;y) - A \right| < \varepsilon$$

Записывают $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Опр. Функция $z = f(x;y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она:

- 1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;
- 2) имеет конечный предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$
- 3) этот предел равен значению функции ***z*** в точке M_0:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график в точке $M_0(x_0;y_0)$ представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность.

ОПР. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется **непрерывной в этой области**.

§3. Частные производные ФНП

Частным приращением функции

$$z = f(x; y)$$

по независимой переменной *x*, соответствующим приращению Δx переменной ***x***, называется разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Частным приращением функции

$$z = f(x; y)$$

по независимой переменной ***y***,
соответствующим приращению Δy
переменной ***y***, называется разность

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полным приращением функции $z = f(x; y)$
соответствующим приращениям
аргументов Δx и Δy, называется
разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Частной производной первого порядка функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$

по определению частная производная по ***x*** равна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

частная производная по ***y*** равна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Пример

Найти частные производные первого порядка

$$z = 5x^3 + 3x^2y^5 - 4y^6.$$

Решение. Считая ***y*** постоянной и дифференцируя данную функцию как функцию переменной ***x***, находим частную производную по ***x***:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (5x^3)'_x + (3x^2y^5)'_x - (4y^6)'_x =$$

$$= 5(x^3)'_x + 3y^5(x^2)'_x - 0 =$$

$$= 5 \cdot 3x^2 + 3y^5 \cdot 2x = 15x^2 + 6xy^5.$$

Считая ***x*** постоянной и дифференцируя ***z*** как функцию переменной ***y***, находим частную производную по ***y***:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (5x^3)'_y + (3x^2y^5)'_y - (4y^6)'_y =$$

$$= 0 + 3x^2(y^5)'_y - 4(y^6)'_y =$$

$$= 3x^2 \cdot 5y^4 - 4 \cdot 6y^5 = 15x^2y^4 - 24y^5.$$

Частные производные второго порядка

Частными производными второго порядка функции $z = f(x;y)$ называются частные производные, если они существуют, от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x;y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y),$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Частные производные $f''_{xy}, \quad f''_{yx}, \quad f'''_{xxy}$ называются **смешанными производными**.

Если функция дважды дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке смешанные производные равны.

§4. Полный дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$, составим полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ можно найти по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение.

$$z'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для функций произвольного числа переменных формула (1) принимает вид

$$dz(x;y;...,t)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+...+\frac{\partial z}{\partial t}dt.$$

Для приближенных вычислений используют формулу

$$f(x+\Delta x;y+\Delta y)\approx$$

$$\approx f(x;y)+\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\Delta y.$$