Урок геометрии 11 класс
07.03.2023

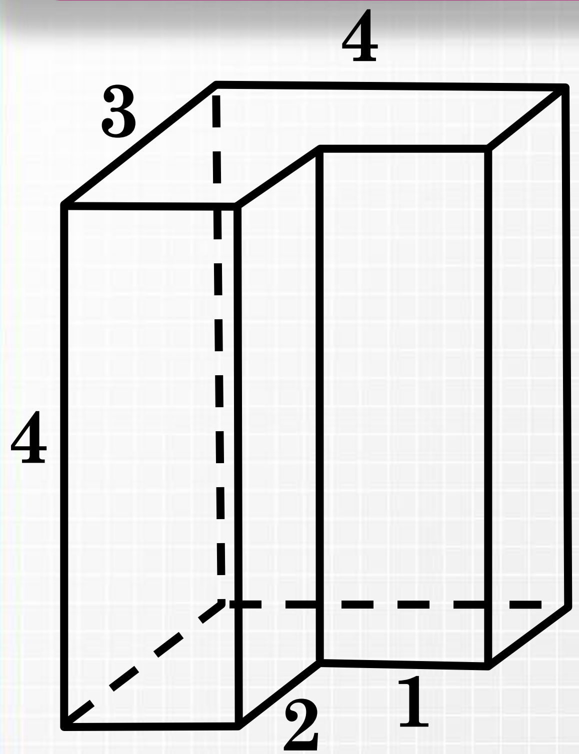
Тема урока:

Объем пирамиды

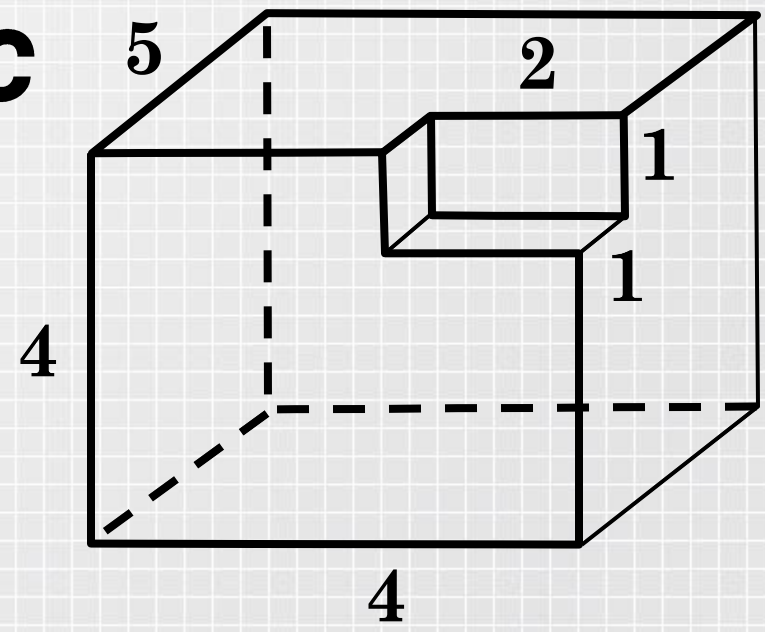
Видеоматериал: https://www.youtube.com/watch?v=1bCQKE3a3jM

Устная работа

№ 25579. Найти объёмы составных многогранников.



$$V = abc$$



$V = 4\cdot3\cdot3 + 1\cdot1\cdot4 = 36 + 4 = 40$

$V = 4\cdot4\cdot3 - 2\cdot1\cdot4 = 48 - 8 = 40$

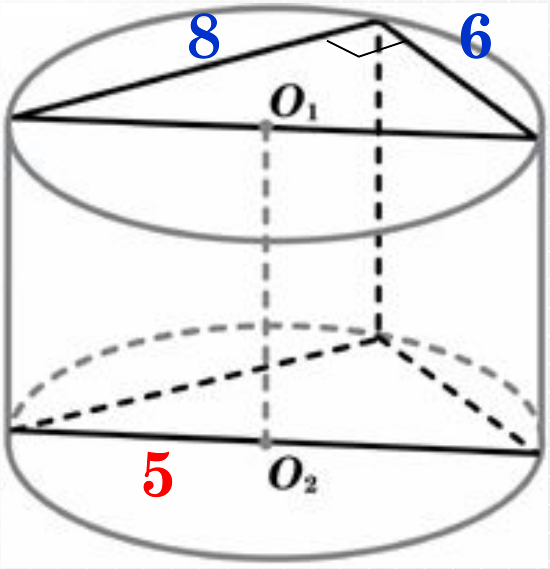
$V = 4\cdot4\cdot5 - 2\cdot1\cdot1 = 78$

В13	4	0				

В13	7	8				

№245352

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



$$V_{ц.} = S_{осн} h$$

$\frac{5}{\pi}$

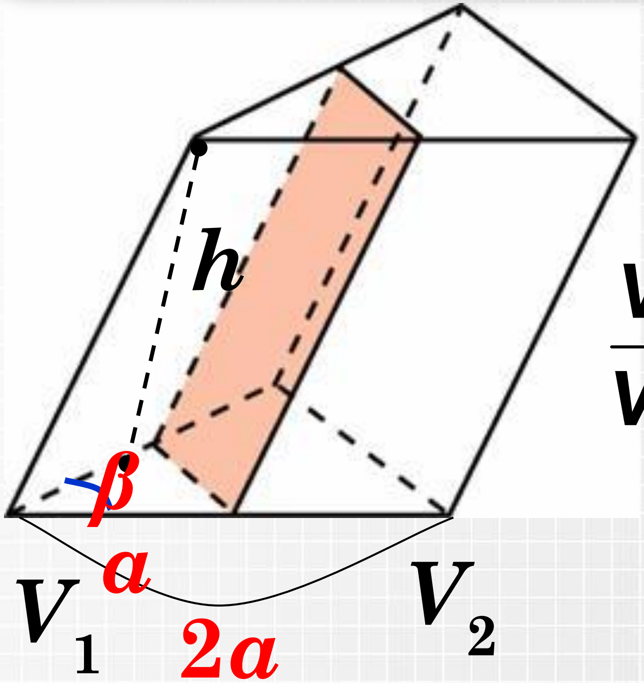
$$V_{ц.} = \pi r^2 h$$

$$V_{ц.} = \pi 5^2 \cdot \frac{5}{\pi} = \cancel{\pi} 25 \cdot \frac{5}{\cancel{\pi}}$$

В 13	1	2	5			

№ 27106

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



$$V = S_{осн} h$$

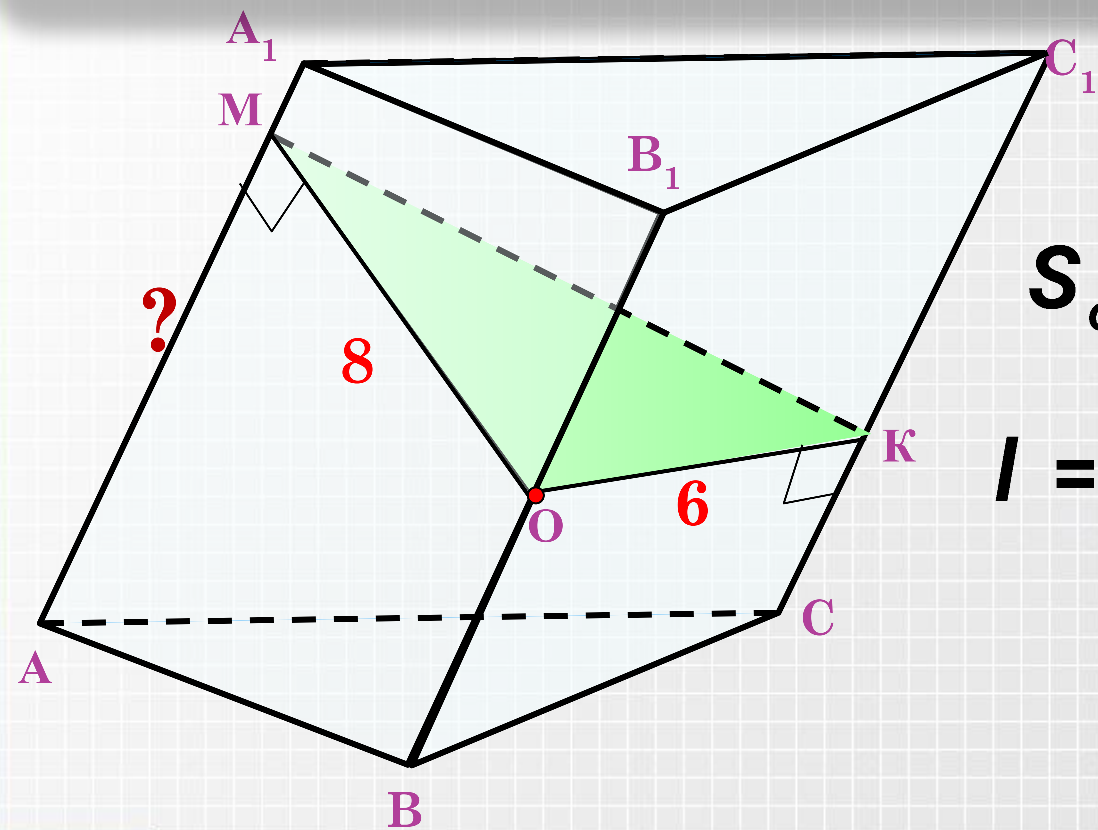
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h}{S_2 h} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{a}\cancel{a}\, \cancel{\sin\beta h}}{\cancel{\frac{1}{2}}\, 2\cancel{a}\, 2\cancel{a}\, \cancel{\sin\beta h}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4} \qquad \frac{V_1}{32} = \frac{1}{4}$$

В 13	8					

№ 74789.

Плоскость(ОМК) перпендикулярна боковым ребрам призмы $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 240 см³, ΔОМК-прямоугольный с катетами 6 и 8. Найти боковое ребро призмы.



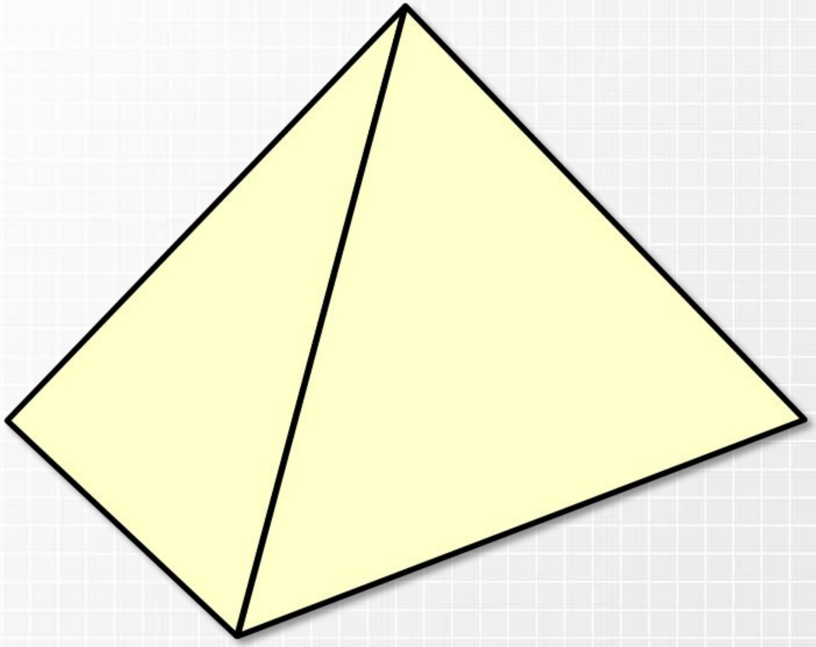
$$V = S_{сеч.}\, l$$

$$S_{осн.} = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24$$

$$l = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{240}{24}$$

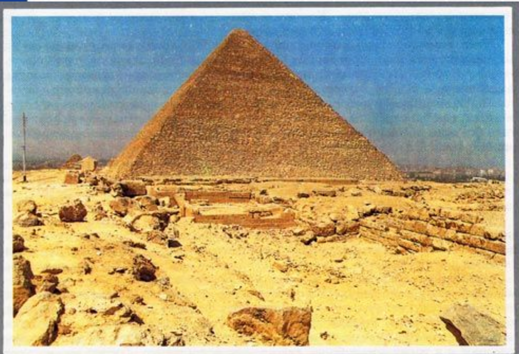
В 13 | 1 | 0

Что мы знаем о пирамиде?

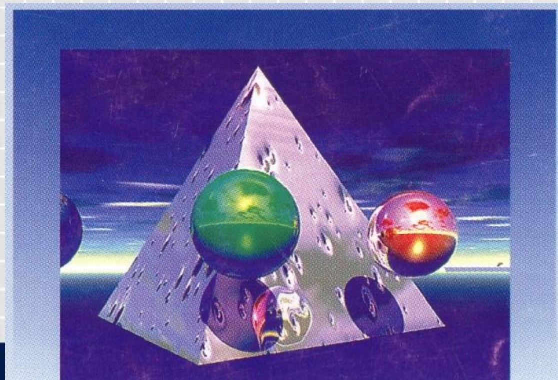


Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – **основания пирамиды**, точки, не лежащей в плоскости основания – **вершины пирамиды** и треугольников - **боковых граней**.

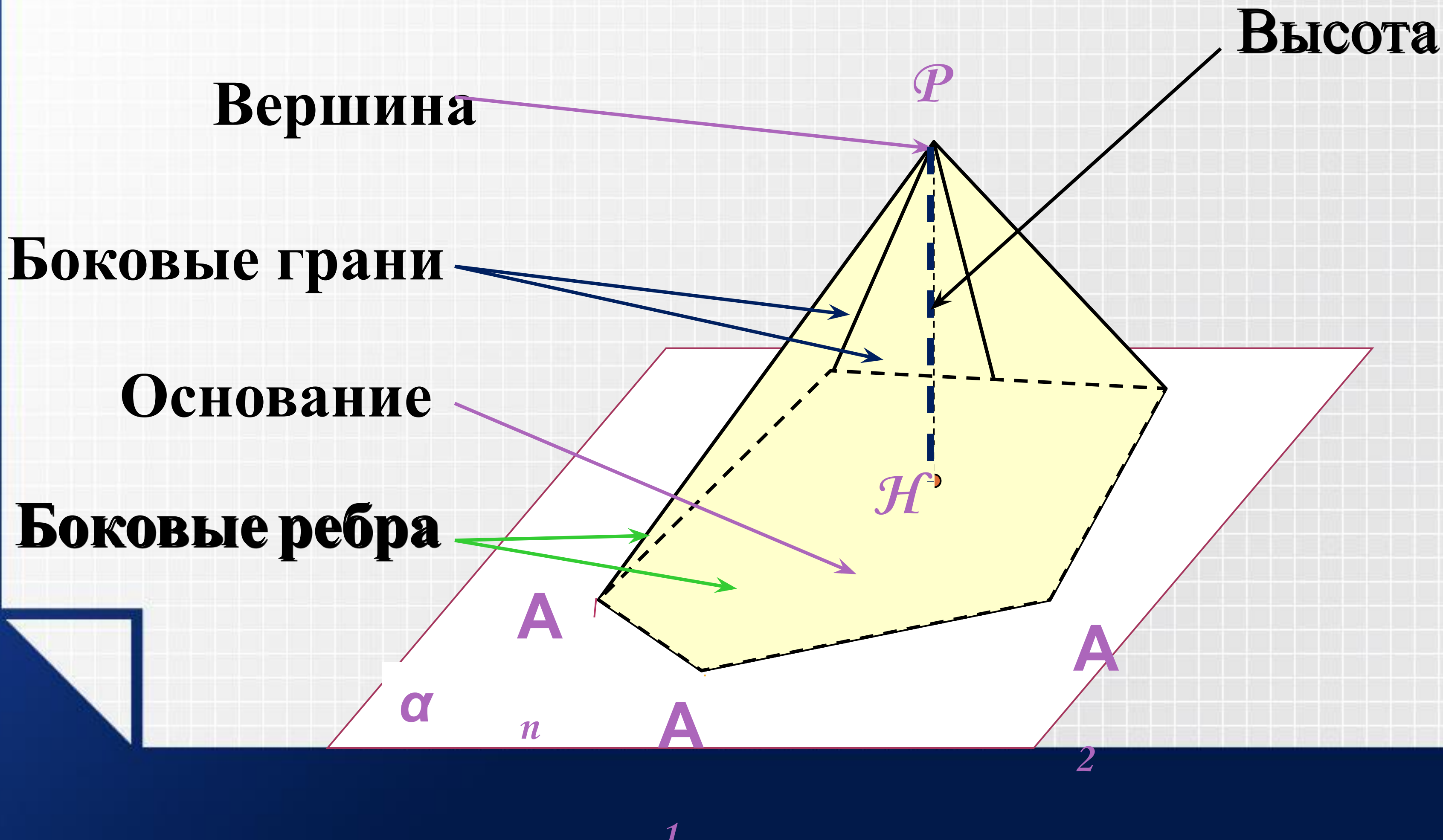
Термин “пирамида” заимствован из греческого “пирамис” или “пирамидос”. Греки в свою очередь позаимствовали это слово, как полагают, из египетского языка. В папирусе Ахмеса встречается слово “пирамус” в смысле ребра правильной пирамиды. Другие считают, что термин берет свое начало от форм хлебцев в Древней Греции “пирос” - рожь). В связи с тем, что форма пламени иногда напоминает образ пирамиды, некоторые средневековые ученые считали, что термин происходит от греческого слова “пир” - огонь. Вот почему в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамида названа “огнеформное тело”.



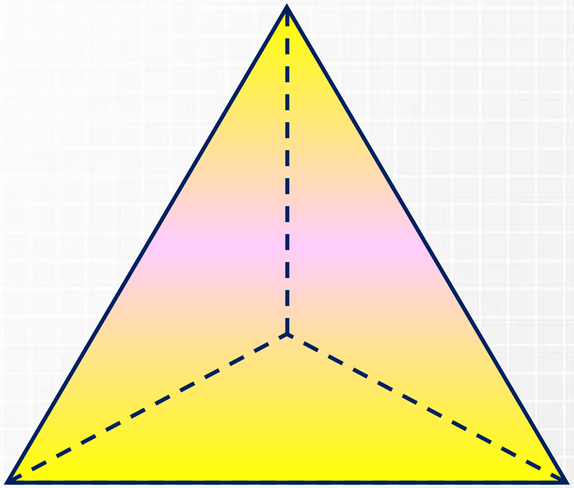
Пирамида фараона Хуфу, или Хеопса.
Первая половина III тыс. до н. э.



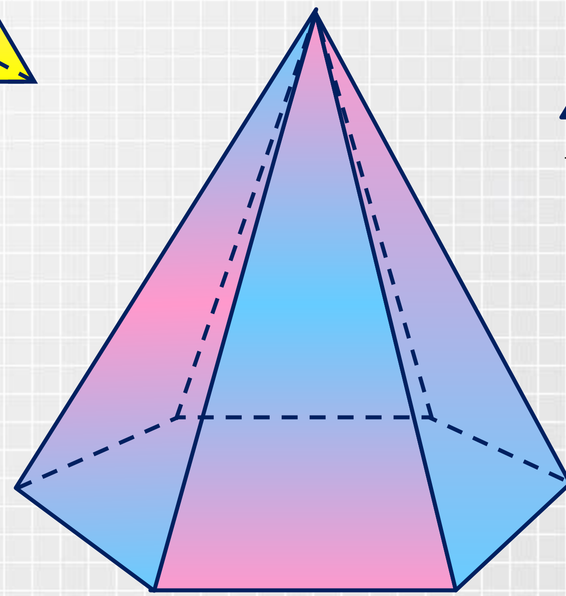
Пирамида называется п – угольной, если ее основание – п–угольник.



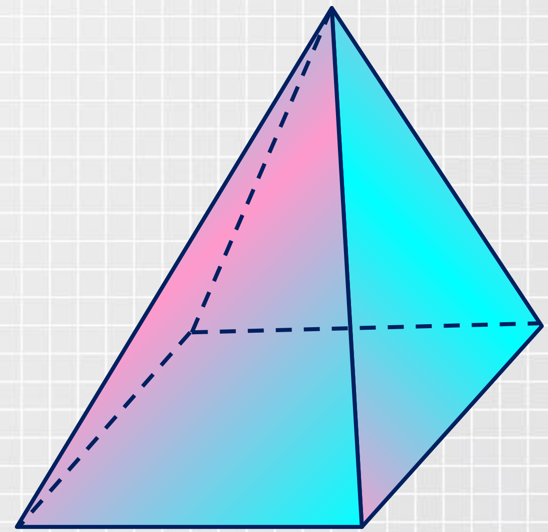
Пирамиды



Треугольная пирамида (тетраэдр)

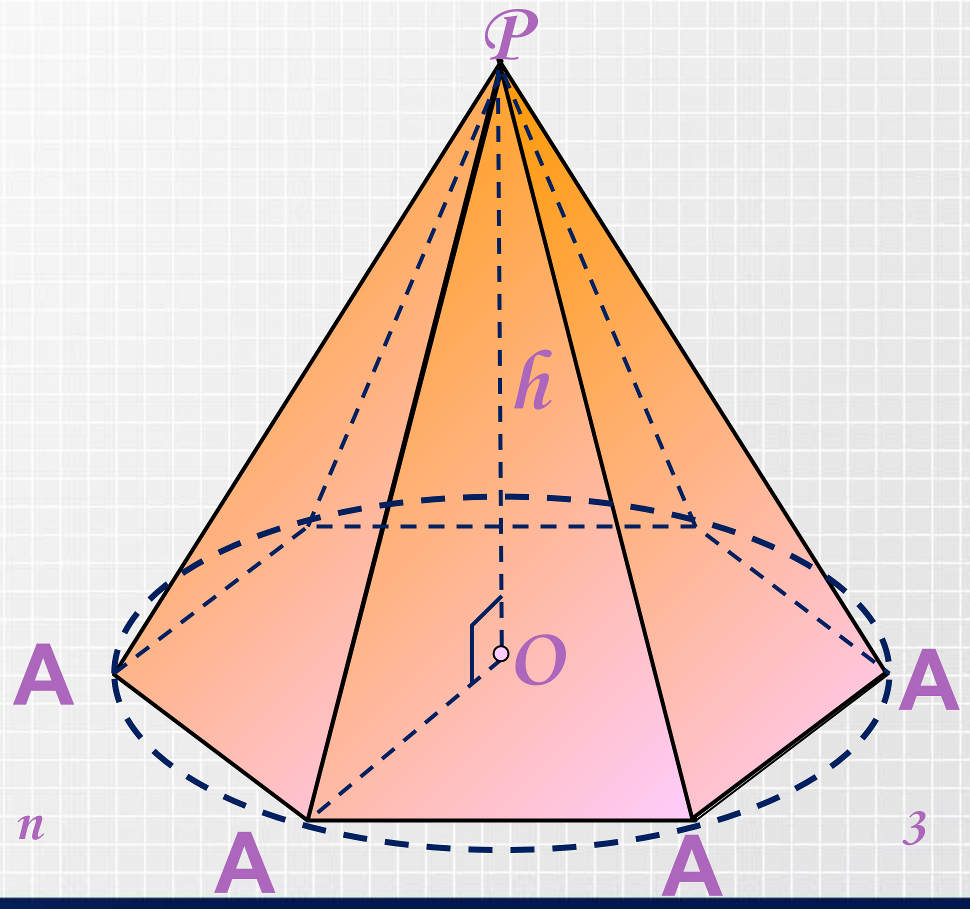


Шестиугольная пирамида



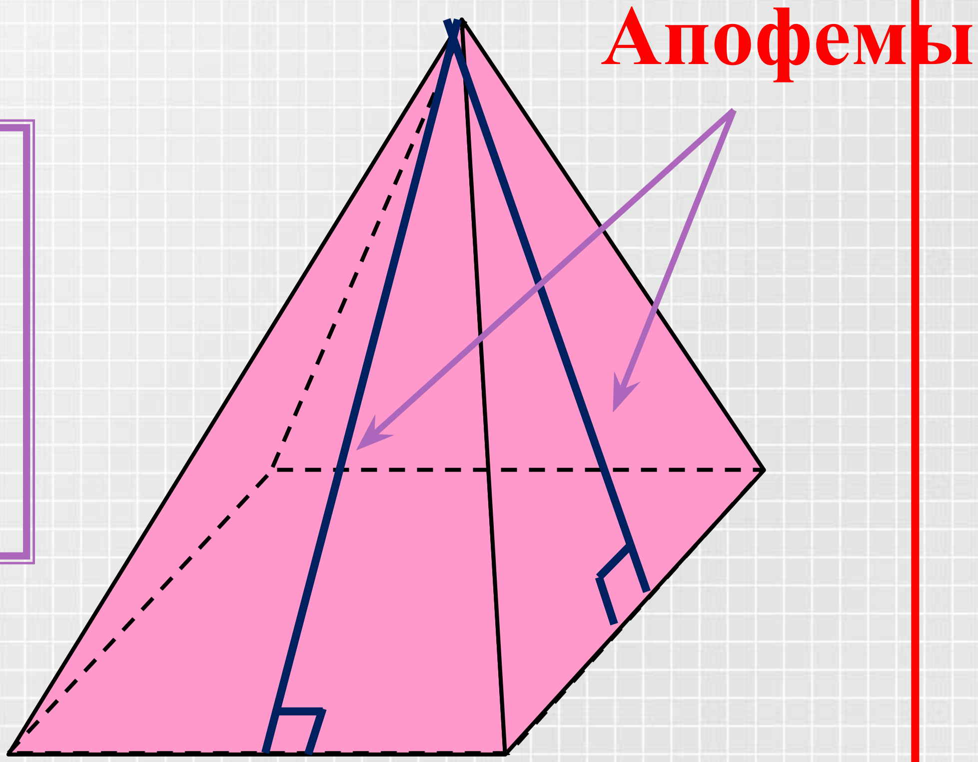
Четырехугольная пирамида

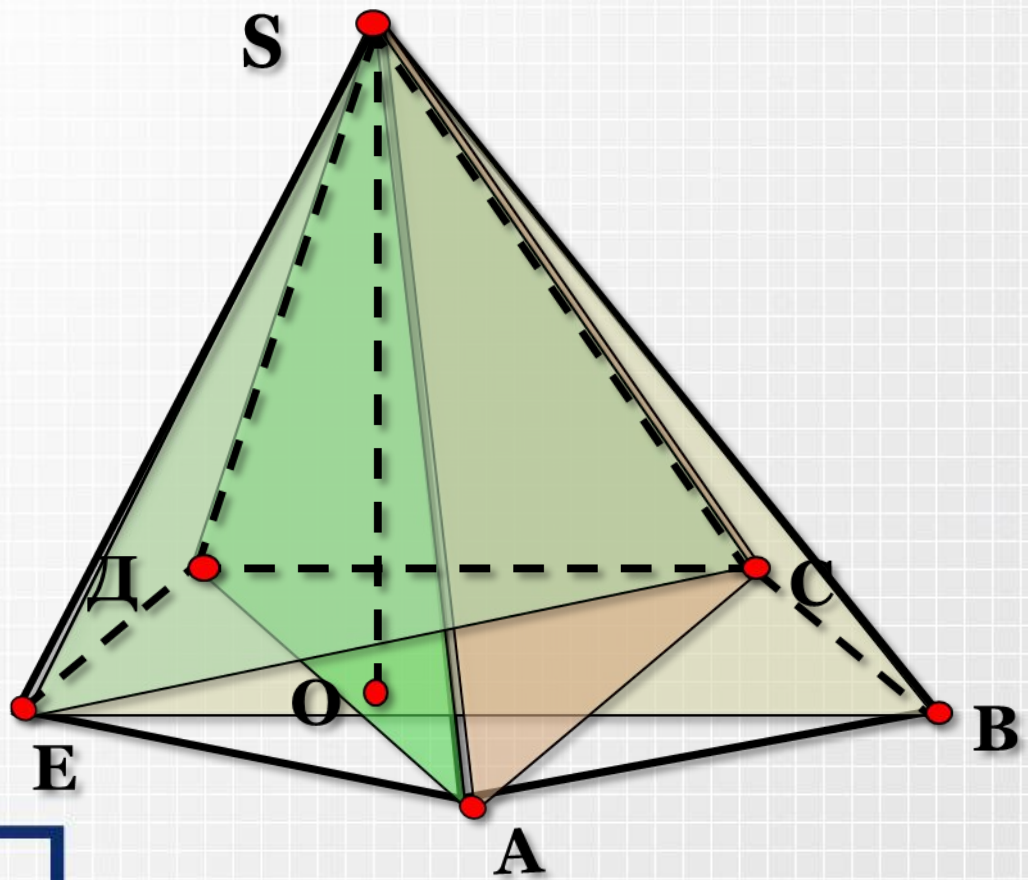
Пирамида называется **правильной**, если ее основание - правильный многоугольник , а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.



Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины

Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу

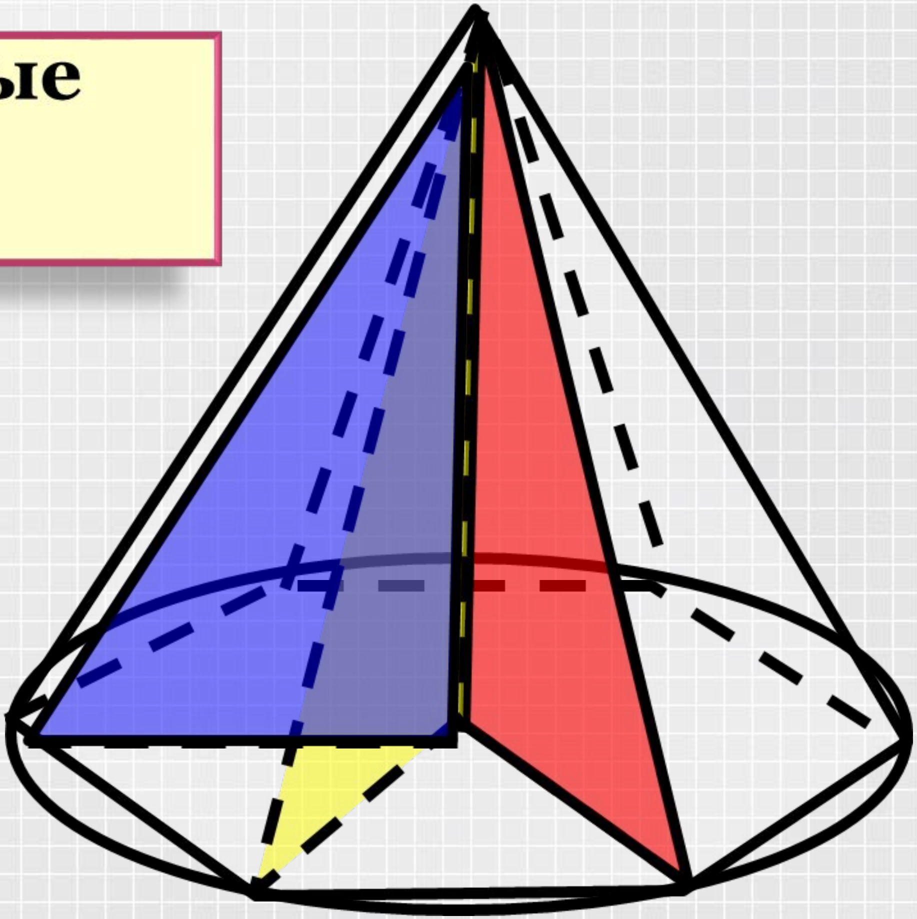




Диагональное сечение пирамиды – сечение плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра

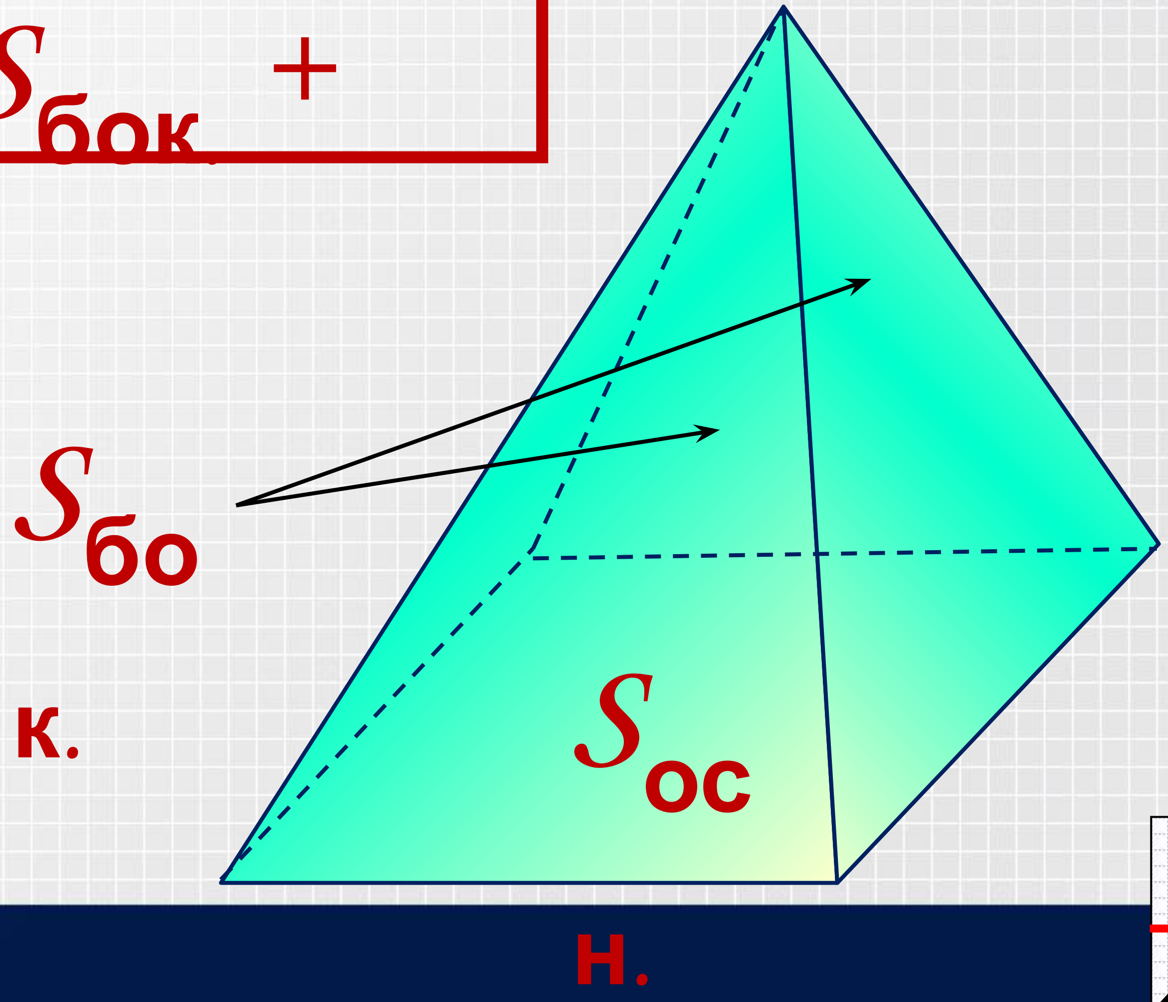
Боковые ребра равны

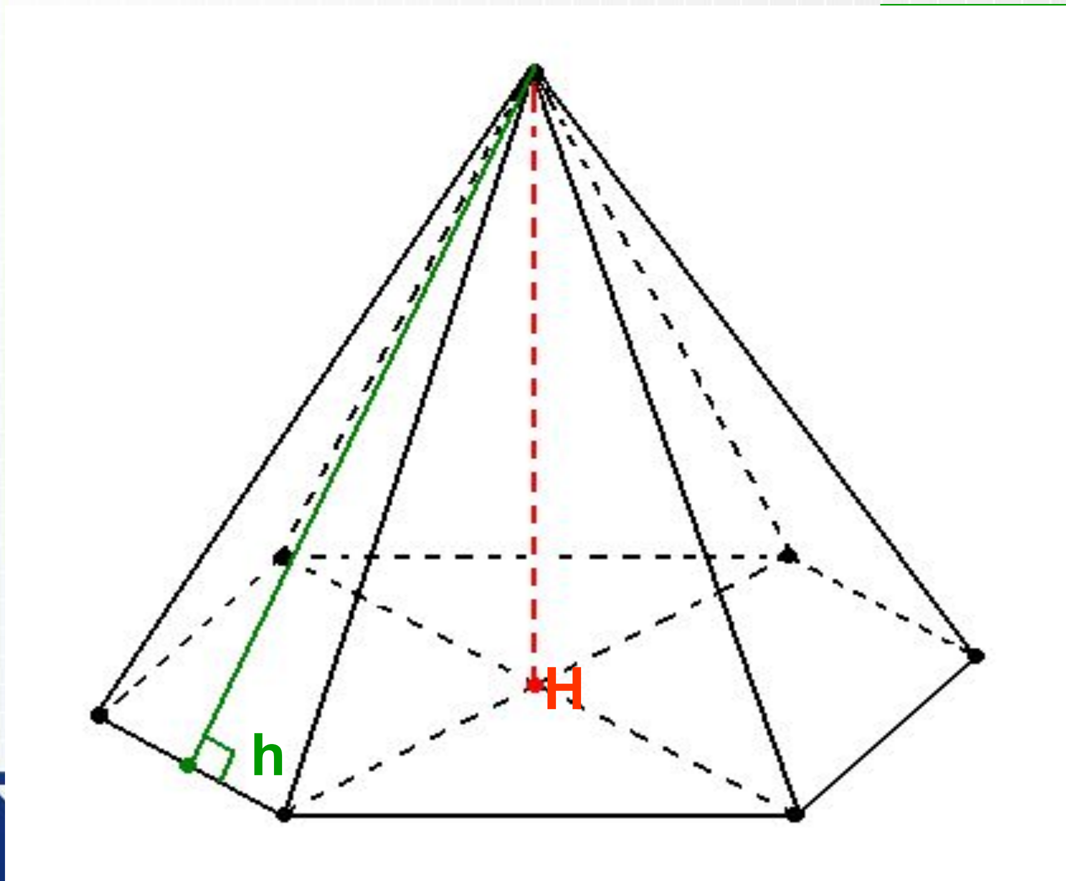
Боковые грани равные равнобедренные треугольники



Площадь пирамиды

$$\boxed{S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} +} \; S_{\text{осн.}}$$



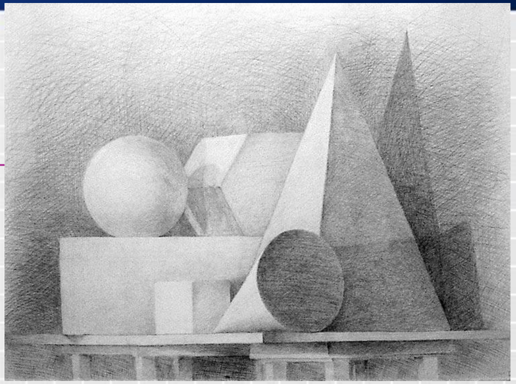


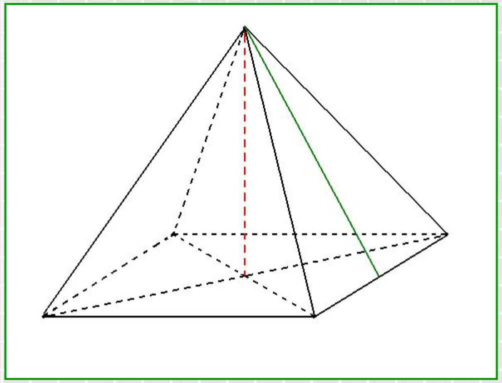
$$= \frac{1}{2} \cdot P_{осн.} \cdot h$$

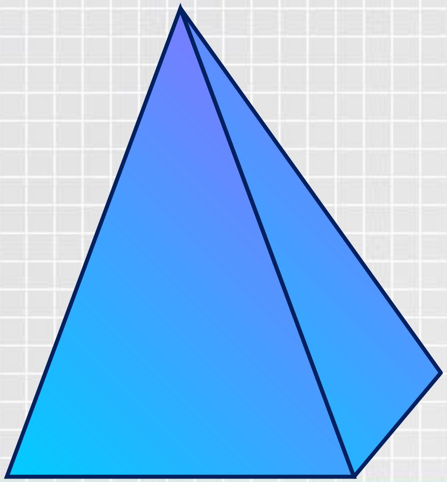
Свойства пирамиды:

У правильной пирамиды:

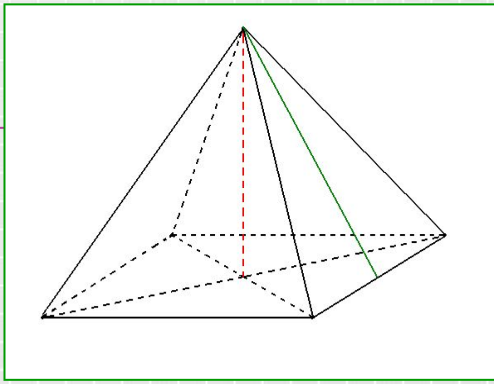
- боковые ребра равны;
- боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками;
- апофемы равны;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра на апофему.





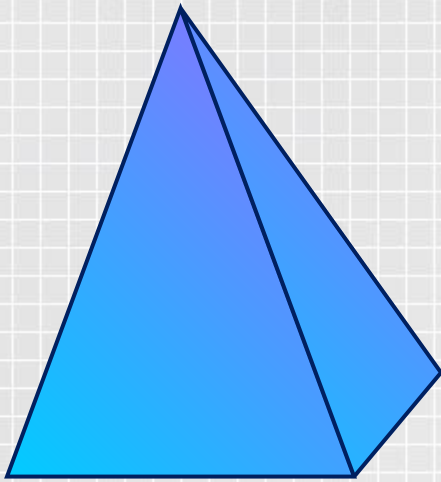


Свойства пирамиды:



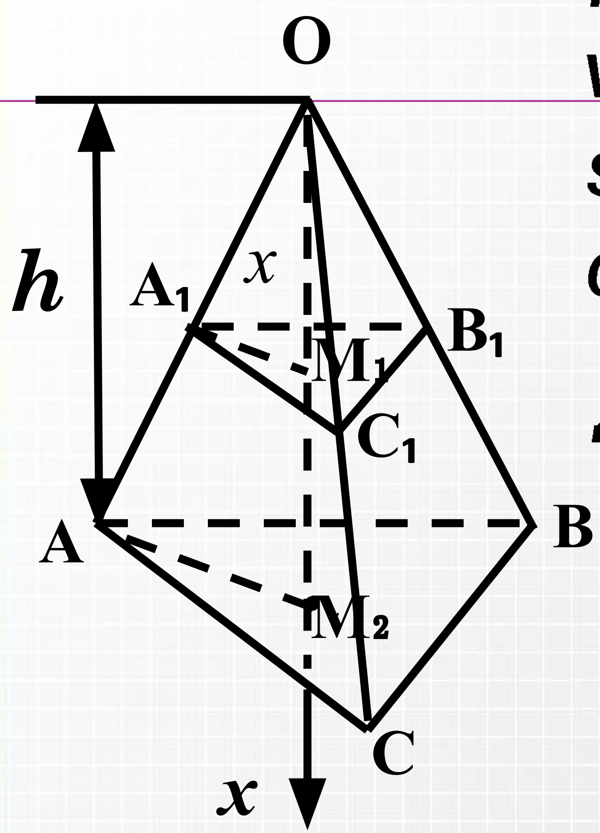
- если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания.

- если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.



Теорема: Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$



I. Дано : $OABC$ - пирамида,

V - объём,

S - площадь ΔABC,

$OM_2 = h$ (высота пирамиды).

Доказать : $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$.

Доказательство:

1) $V = \int_0^h S(x)\,dx$

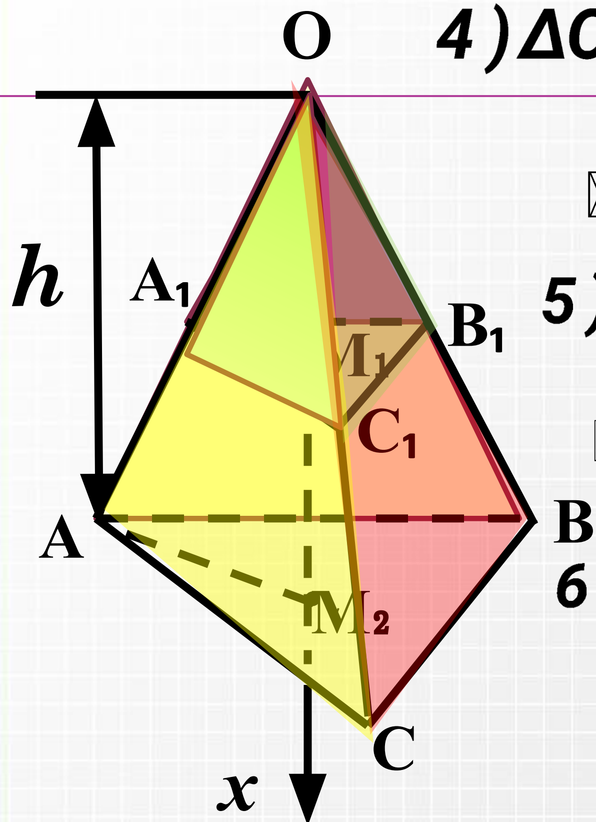
2) $OX : h \subset OX$

$A_1B_1C_1 \parallel ABC$

$OM_1 = x, M_1 \in \Delta A_1B_1C_1$

$S(x)$ - площадь сечения

$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$



$4)\ \Delta OAB:\ AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$$

$5)\ \Delta OAC:\ A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow \Delta OA_1C_1 \sim \Delta OAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OC_1}{OC}$$

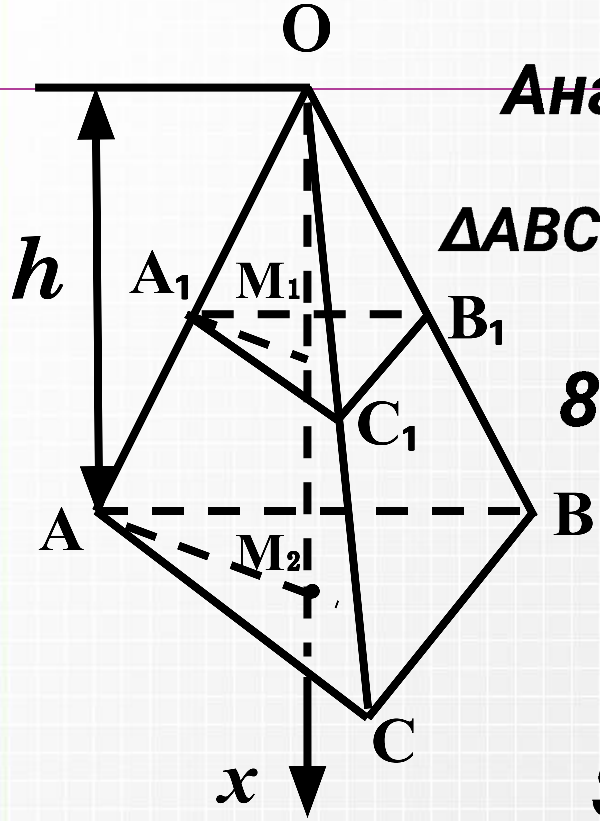
$6)\ \Delta OCB:\ B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \Delta OB_1C_1 \sim \Delta OBC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB}$$

$7)\ \Delta OA_1M_1$ и $\Delta OAM_2:\ \angle M = \angle M_1 = 90^\circ,\ \angle O$ - общий $\Rightarrow$

$$\Delta OA_1M_1 \sim \Delta OAM_2 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{x}{h}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$$



Аналогично $: \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{x}{h};\ \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1 : \frac{x}{h}$ - коэффициент подобия

$$8)\ \frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx =$$

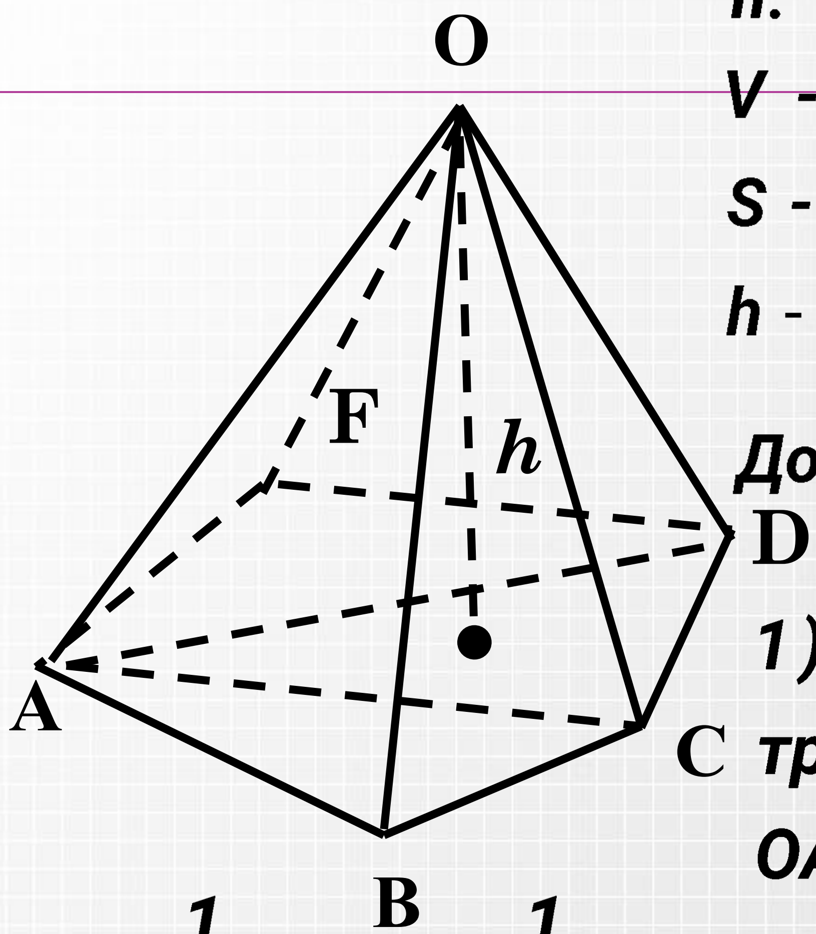
$$= \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \boxed{\frac{1}{3}Sh}$$

II. Дано : $OABCDF$ - пирамида,

V - объём,

S - площадь $ABCDF$,

h - высота пирамиды.



Доказать : $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$.

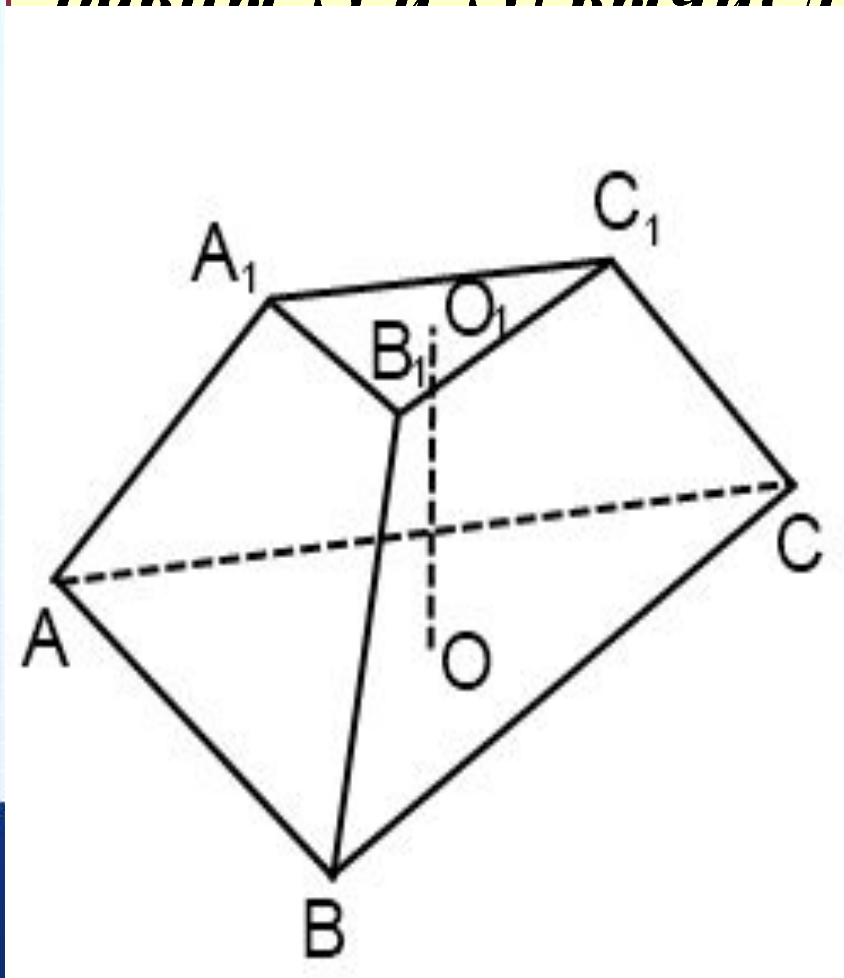
Доказательство:

1) Разобьём пирамиду на три треугольные : $OABC$, $OACD$, $OADF$;

2) $V = \frac{1}{3} S_{AFD} h + \frac{1}{3} S_{ADC} h + \frac{1}{3} S_{ABC} h =$

$= \frac{1}{3} h (S_{AFD} + S_{ADC} + S_{ABC}) = \boxed{\frac{1}{3} S_{осн.} h}$

Теорема: ***Объём усечённой пирамиды, высота которой h, а площади оснований равны S и S_1 вычисляется по формуле.***

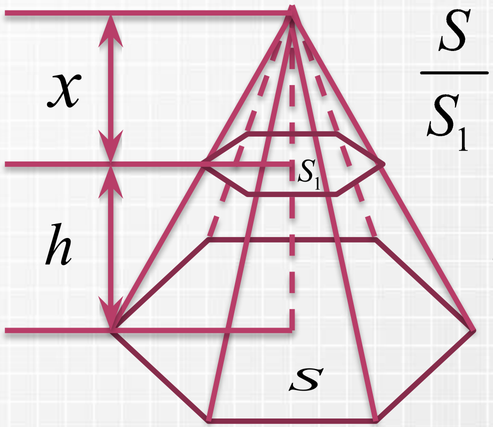


$$V = \frac{1}{3} h \cdot (S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

- **Объем усеченной пирамиды будем рассматривать как разность объемов полной пирамиды и той, что отсечена от нее плоскостью, параллельной основанию**

Объем полной пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh$

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}Sx - \frac{1}{3}S_1 x = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}x(S - S_1) \quad (1)$$



$$\frac{S}{S_1} = \frac{(h+x)^2}{x^2} \rightarrow \sqrt{S}x = \sqrt{S_1}h + \sqrt{S_1}\,x \rightarrow$$

$$\sqrt{S}x - \sqrt{S_1}\,x = \sqrt{S_1}\,h$$

$$x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$$

Подставляем в уравнение 1

$$V = \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(S - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$$

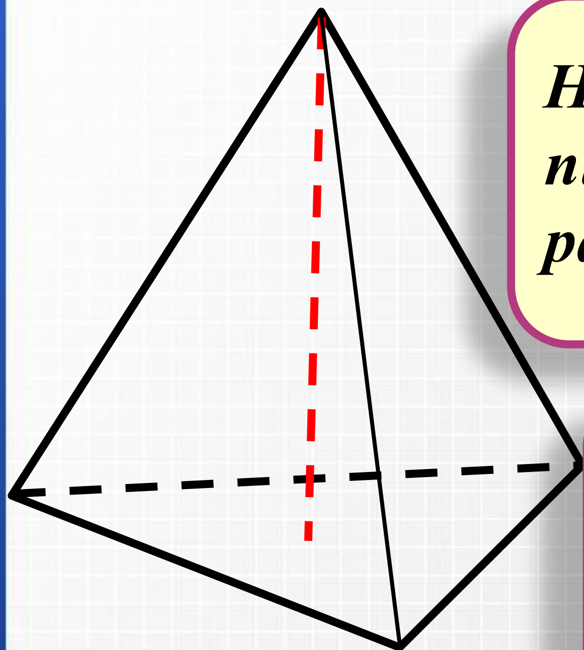
$$\frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}(\sqrt{S} - \sqrt{S_1})(\sqrt{S} + \sqrt{S_1})\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}Sh + \frac{1}{3}S_1 h + \frac{1}{3}h\sqrt{SS_1} = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$$

Задание:

Рассмотреть решение задач по готовым чертежам и записать решения в тетрадь.

Задачи по готовым чертежам



Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

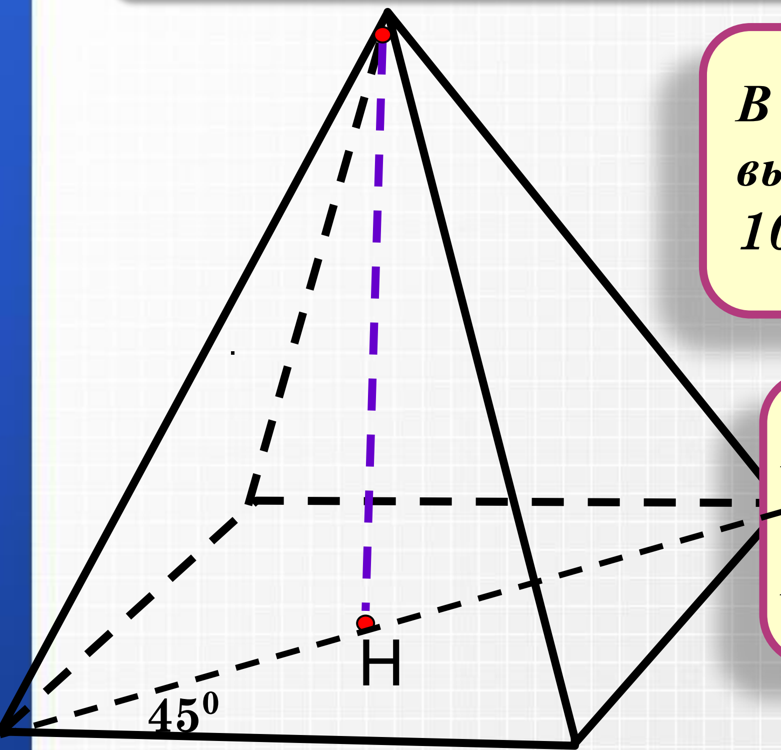
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{V}{\frac{1}{3} S_{осн}} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3$$

В 13	0	,	2	5	

В 13	3				

Задачи по готовым чертежам



В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, сторона основания равна 10. Найдите ее объем.

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 6 = 200$$

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{16} \qquad AB = 8\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6 = 256$$

В 13	2	5	6			

Задачи (решить самостоятельно)

Сторона основания правильной треугольной пирамиды р… образует с плоскостью ос… найдите объем пирамиды.

V =18

Высота правильной треугольной пирамиды равна … с плоскостью ос… найдите объем пирамиды.

V = 192

Домашнее задание

**Проработать п. 80,
решить задачи № 684(а), № 685, № 686 (а).**