Волгоградский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Богачкова Людмила Юрьевна,

профессор, доктор экон. наук, канд. физ.-мат. наук.

Лекция 7

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?\ \left(1^\infty\right)$$

n	1	2	3	4	5	....
a_n	2	2,25	2,37	2,44	2,488	.....

С 18 века известно, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

e **– число Эйлера: *e* ≈*2,718281……***

Леонард Эйлер (*1707-1783 гг*)

1724 г. – Петр I утвердил проект Устройства Петербургской Академии;

С 1724 г Эйлер работает в России.

Крупнейший швейцарский, немецкий и российский ученый (математик, механик, физик и т.д.)

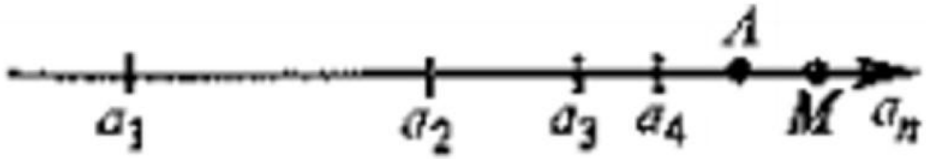
Рассмотрим обоснование того, что второй замечательный предел существует, и его значение не равно единице, а заключено между числами 2 и 3.

Теорема. Если числовая последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Возможны 2 случая.

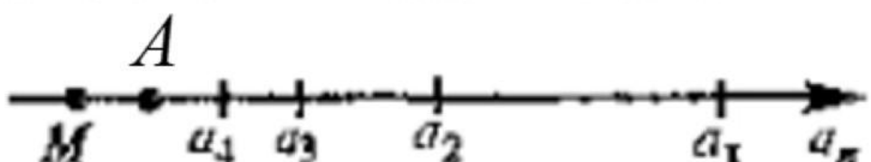
1) Последовательность не убывает и ограничена сверху:

$$(a_1 \le a_2 \le a_3 \ldots \le a_n \le M,\ \forall n \in N) \Rightarrow (\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \le M).$$



2) Последовательность не возрастает ограничена снизу:

$$(M \le a_n \le a_{n-1} \le \ldots \le a_1,\ \forall n \in N) \Rightarrow (\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \ge M).$$



Примем теорему без док-ва.

Докажем, что последовательность $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ монотонно возрастает

и является ограниченной: $2 \le a_n = (1+\frac{1}{n})^n < 3.$

Для этого понадобятся сведения о ***биноме Ньютона*** – о правиле разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

		$(a+b)^n$
n=0	1	
n=1	1 1	
n=2	1 2 1	
n=3	1 3 3 1	
n=4	1 4 6 4 1	
n=5	1 5 10 10 5 1	

Общий вид бинома Ньютона — формулы разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a+b)^n$ в многочлен:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots n$$

$$(a+b)^n = 1\cdot a^n \cdot b^0 + n\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot a^0\cdot b^n \qquad (1)$$

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

		$(a+b)^n$
n=0	1	
n=1	1 1	
n=2	1 2 1	
n=3	1 3 3 1	
n=4	1 4 6 4 1	
n=5	1 5 10 10 5 1	

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4\cdot b^0 + 4\cdot a^3\cdot b^1 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2\cdot b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}a^1\cdot b^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^0\cdot b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Рассмотрим формулу (1) и применим ее к биному $(1+\frac{1}{n})^n$.

$$(a+b)^n = 1\cdot a^n\cdot b^0 + n\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot a^0\cdot b^n \qquad (1)$$

Пусть $a=1;\ b=\frac{1}{n}$.

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot 1\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot 1\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

Рассмотрим правую часть соотношения (2).

1) При $n=1$ правая часть равна 2.

2) При $n>2$ все слагаемые положительны, и правая часть больше, чем 2.

3) При увеличении n количество слагаемых увеличивается на единицу и каждое слагаемое, кроме добавившегося, возрастает.

$$n=2:\quad (1+\frac{1}{2})^2 = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right);$$

$$n=3:\quad (1+\frac{1}{3})^3 = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right);$$

$$n=4:\quad (1+\frac{1}{4})^4 = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right);$$

Таким образом, числовая последовательн $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ монотонно возрастает: $a_1=2$; $a_n < a_{n+1}$ при $n>1$.

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

Покажем, что рассматриваемая последовательность ограничена сверху. Каждая пара скобок в правой части формулы (2) больше 0 и меньше единицы. Поэтому, если мы заменим содержимое каждой пары скобок на единицу, то правая часть (2) увеличится:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}. \qquad (3)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}. \qquad (3)$$

Теперь в правой части неравенства (3) все множители, стоящие в знаменателях и имеющие значения больше, чем 2, заменим на 2. Тогда каждая дробь, а с ними и вся правая часть неравенства (3) возрастет:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2};$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right). \qquad (4)$$

В правой части неравенства (4) в скобках стоит сумма (n-1) члена геометрической прогрессии, первый член которой $a_1 = 1/2$, знаменатель $q = 1/2$. Сумма первых (n-1) членов прогрессии:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(1-q^{n-1})}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1. \qquad (5)$$

Последнее неравенство (5) означает, что в правой части соотношения (4) к двойке прибавляется содержимое круглых скобок, которое меньше единицы. Значит, вся правая часть соотношения (4) меньше, чем 3:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

Таким образом, рассматриваемая нами последовательность монотонно возрастает и ограничена. Все ее члены удовлетворяют неравенству: $2 \le a_n < a_{n-1} < 3.$

По теореме о монотонной ограниченной последовательности (см. начало лекции) эта последовательность имеет предел:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = A, \qquad 2 < A < 3.$$

Эйлером было доказано, что этот предел равен иррациональному числу:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2,718281\ldots\ldots$$

Различные формы второго замечательного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1^{\infty}\right)=e$$

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left(1^{\infty}\right)=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1^{\infty}\right)=e$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\left(1^{\infty}\right)=e$$

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}\left(1^{\infty}\right)=e$$

Примеры решения задач

Пример 1.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-0}{2+0}=1.$$

Выделим целую часть дроби

$$\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1-4}{2x^2+1}=\frac{2x^2+1}{2x^2+1}+\frac{-4}{2x^2+1}=1+\frac{-4}{2x^2+1}.$$

$\alpha(x)=-\dfrac{4}{2x^2+1}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$.

Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x^2+1}\cdot\left(-3x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}},$$

ибо $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$. Найдем $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{2x^2+1}$. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, предел 1-го типа. Вынесем за скобки x^2, так как вторая степень наибольшая:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{12}{2}=6,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=0$. Таким образом, искомый предел равен $e^a=e^6$. ▶

Примеры решения задач

Пример 2.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Р е ш е н и е. Имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$, выделим целую часть дроби $\dfrac{x-1}{2x-1}=\dfrac{2x-1-x}{2x-1}=\dfrac{2x-1}{2x-1}-\dfrac{x}{2x-1}=1+\dfrac{-x}{2x-1}$.

$\alpha(x)=\dfrac{-x}{2x-1}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$. Сделаем преобразования,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}\cdot\frac{-x}{2x-1}\cdot\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}}\right)^{\frac{-3x}{x(2x-1)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x(2x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{0-1}}=e^{3},$$

ибо $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-x}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-x}}=e.$ ▶

Задачи о начислении процентов

$\boldsymbol{Q_0}$ – первоначальный вклад в банк под $\boldsymbol{p}$ % годовых. Требуется найти сумму вклада через $\boldsymbol{t}$ лет.

Задача 1. Простые проценты (без капитализации).

Год	Сумма
0	Q_0
1	$Q_0 + \dfrac{p \cdot Q_0}{100} = Q_0(1 + \dfrac{1 \cdot p}{100}) = Q_1$
2	$Q_1 + \dfrac{p \cdot Q_0}{100} = Q_0(1 + \dfrac{1 \cdot p}{100}) + \dfrac{p \cdot Q_0}{100} = Q_0(1 + \dfrac{2 \cdot p}{100}) = Q_2$
.....	......
t	$Q_0(1 + \dfrac{t \cdot p}{100}) = Q_t$ Линейная по t формула начисления процентов.

Задачи о начислении процентов

Q_0 – первоначальный вклад в банк под p % годовых. Требуется найти сумму вклада через t лет.

Задача 2. Сложные проценты (с капитализацией).

Год	Сумма
0	Q_0
1	$Q_0 + \frac{p \cdot Q_0}{100} = Q_0(1 + \frac{1 \cdot p}{100}) = Q_1$
2	$Q_1 + \frac{p \cdot Q_1}{100} = Q_1(1 + \frac{1 \cdot p}{100}) = Q_0(1 + \frac{p}{100})^2 = Q_2$
…..	……
t	$Q_0(1 + \frac{p}{100})^t = Q_t$ НЕлинейная (показательная) по t формула начисления процентов.

Задачи о начислении процентов

Q_0 – первоначальный вклад в банк под p % годовых. Требуется найти сумму вклада через t лет.

Задача 3. Случай непрерывного начисления сложных процентов. Пусть % начисляются n раз в год.

$$Q_t = Q_0(1 + \frac{p}{n \cdot 100})^{nt}$$

Допустим, что n→∞, то есть % начисляются непрерывно:

$$A = \lim_{n\to\infty} Q_t = \lim_{n\to\infty}\left(Q_0(1 + \frac{p}{n \cdot 100})^{nt} \right) =$$

$$= Q_0 \lim_{n\to\infty}\left((1 + \frac{p}{n \cdot 100})^{\frac{100n}{p}} \right)^{\frac{p}{n\cdot 100}\cdot nt} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Иллюстрация задачи о начислении процентов

$\boldsymbol{Q_0}$ – первоначальный вклад в банк под $\boldsymbol{p}$ % годовых. Требуется найти $\boldsymbol{Q_t}$ - сумму вклада через $\boldsymbol{t}$ лет.

В задаче о непрерывном начислении % сумма нарастает по экспоненте.