

Лекция № 6

Раздел 3. Погрешности измерений и метрологические характеристики средств измерений

3.5. Выборочные оценки систематических и случайных погрешностей при нормальном и произвольном распределениях

3.6. Исключение систематических погрешностей

3.5. Выборочные оценки систематических и случайных погрешностей при нормальном и произвольном распределениях

Оценка результата измерения

К оценкам, получаемым по статистическим данным, предъявляются требования: **состоятельности, несмещенности и эффективности.**

Оценка называется **состоятельной**, если при увеличении числа наблюдений она стремится к истинному значению оцениваемой величины

Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой величины

Чем меньше дисперсия оценки, тем более **эффективной** считают эту оценку

3.5. Выборочные оценки систематических и случайных погрешностей при нормальном и произвольном распределениях

Для количественной оценки случайных погрешностей и установления границ случайной погрешности результата измерения могут использоваться:

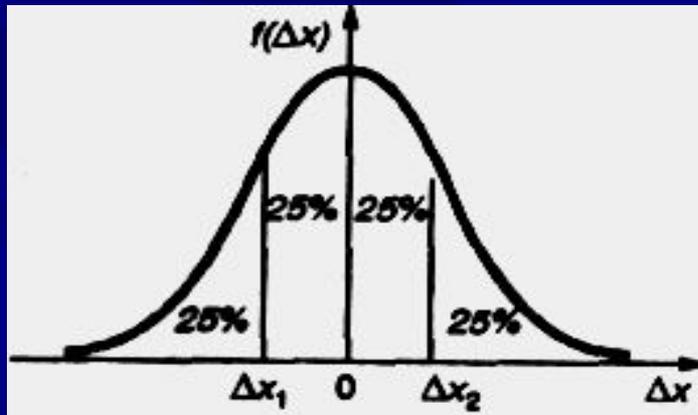
- предельная погрешность,
- квантильные (интервальные) оценки,
- числовые характеристики закона распределения.

Предельная погрешность Δ_m — погрешность, больше которой в данном измерительном эксперименте не может появиться.

Недостатки:

она не содержит информации о характере закона распределения случайных погрешностей.

Квантильные (интервальные) оценки



Абсциссы вертикальных линий, разделяющих кривую плотности распределения погрешностей на части, называются **квантилями**.

Квантильная оценка погрешности представляется интервалом от $-\Delta x(p)$ до $+\Delta x(p)$, на котором с заданной вероятностью p встречаются $P \cdot 100\%$ всех возможных значений случайной погрешности.

Интервал с границами $\pm \Delta x(p)$, включающий истинное значение измеряемой величины, называется **доверительным интервалом** случайной погрешности, а соответствующая ему вероятность — **доверительной вероятностью**.

Оценки случайных погрешностей

Для нормального закона распределения доверительные интервалы случайной погрешности $\Delta x(p)$, соответствующие доверительной вероятности p , находят по формуле

$$\Delta x(p) = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Значение z определяется по заданной доверительной вероятности p :

из условия

$$p = \Phi(z),$$

т. е. может быть найдено из таблицы значений интеграла вероятностей $\Phi(z)$

или из условия

$$2\Phi(x) = p,$$

т. е. может быть найдено из таблицы значений функции Лапласа $\Phi(x)$.

Оценки случайных погрешностей

$$p = \Phi(z)$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,000	0,70	0,516	1,40	0,819	2,25	0,976
0,10	0,080	0,80	0,576	1,50	0,866	2,50	0,988
0,20	0,159	0,90	0,632	1,60	0,890	2,75	0,9940
0,30	0,236	1,00	0,683	1,70	0,911	3,00	0,99730
0,40	0,311	1,10	0,729	1,80	0,928	3,30	0,99903
0,50	0,383	1,20	0,770	1,90	0,943	3,50	0,99953
0,60	0,452	1,30	0,806	2,00	0,955	4,00	0,99994

$$2\Phi(x) = p$$

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	1,2	0,1942	0,3643	2,4	0,0224	0,4893
0,1	0,3970	0,0398	1,30	0,1714	0,4032	2,50	0,0175 0,0136	0,4938 0,4953
0,2	0,3910	0,0793	1,40	0,1497	0,4192	2,60	0,0104 0,0079	0,4965 0,4974
0,3	0,3814	0,1179	1,50	0,1295	0,4332	2,70	0,0060	0,4981 0,49865
0,4	0,3683	0,1554	1,60	0,1109	0,4452	2,80	0,00443	0,49977
0,5	0,3521	0,1915	1,70	0,0940	0,4554	2,90	0,00087	0,49997
0,6	0,3332	0,2257	1,80	0,0790	0,4641	3,00	0,00013	0,49999
0,7	0,3123	0,2580	1,90	0,0656	0,4713	3,50	0,00002	0,499999
0,8	0,2897	0,2881	2,00	0,0540	0,4772	4,00	0,0000	
0,9	0,2661	0,3159	2,10	0,0440	0,4821	4,50		
1,0	0,2420	0,3413	2,20	0,0350	0,4861	5,00		
1,1	0,2179	0,3643	2,30	0,0283	0,4893			

Оценки случайных погрешностей



$\Delta x(p)$	P
$\pm 1 \sigma$	0,683
$\pm 2 \sigma$	0,955
$\pm 3 \sigma$	0,99730
$\pm 4 \sigma$	0.99994

Правило трех сигм - отклонение истинного значения измеряемой величины от среднего арифметического значения результатов измерений не превосходит утроенной средней квадратической погрешности этого значения.

Погрешности, выходящие за эти границы, классифицируют как грубые или промахи.

Оценки случайных погрешностей

При малом числе измерений $2 < n < 20$ используется распределение случайных погрешностей, предложенное Стьюдентом.

Для этого распределения доверительный интервал $\pm \Delta x(P)$ или доверительная вероятность p определяются не через z , а через коэффициент t в зависимости от величины n по таблице распределения Стьюдента.

Величина t , называемая дробью или *коэффициентом Стьюдента*, выражается соотношением

$$t = \frac{\Delta x}{\tilde{\sigma}_x}$$

$$\Delta x = t \cdot \tilde{\sigma}_x$$

$$\tilde{\sigma}_x = \sigma / \sqrt{n}$$

Оценки случайных погрешностей

Коэффициенты распределения Стьюдента

<i>n</i>	Значение <i>t</i> при доверительной вероятности <i>P</i>								
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,51	1,0	2,0	6,3	12,7	31,8	63,7	—
3	0,14	0,45	0,82	1,3	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,42	0,77	1,3	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,41	0,74	1,2	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,41	0,73	1,2	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
8	0,13	0,40	0,71	1,1	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
10	0,13	0,40	0,71	1,1	1,8	2,8	2,8	3,25	4,8
12	0,13	0,40	0,70	1,1	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
14	0,13	0,39	0,69	1,1	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
16	0,13	0,39	0,69	1,1	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
18	0,13	0,39	0,69	1,1	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
20	0,13	0,39	0,69	1,1	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9

При технических измерениях доверительная вероятность принимается равной 0,95, соответствующая ДИ $\pm 2 \sigma$

Оценки случайных погрешностей

Недостатком оценивания случайной погрешности доверительным интервалом при произвольно выбираемых доверительных вероятностях является невозможность суммирования нескольких погрешностей, так как доверительный интервал суммы не равен сумме доверительных интервалов. В то же время необходимость в суммировании случайных погрешностей существует, когда нужно оценить погрешность суммированием ее составляющих, подчиняющихся к тому же разным законам распределения. В теории вероятностей показано, что суммирование статистически независимых случайных величин осуществляется путем суммирования их дисперсией

$$D_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n D_i$$

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

Таким образом, для того чтобы отдельные составляющие случайной погрешности можно было суммировать расчетным путем, они должны быть представлены своими СКО, а не предельными или доверительными границами.

Необходимое количество измерений

Влияние случайных погрешностей измерений можно уменьшить двумя способами: либо увеличить точность, либо количество измерений.

Увеличением количества измерений даже при неизменной их точности можно увеличить надежность доверительных интервалов

$$|\bar{X} - X| < t_p \cdot \sigma / \sqrt{n} \quad \text{и} \quad |\bar{X} - X| < t_p \cdot \sigma^* / \sqrt{n}$$

Необходимое количество измерений для достижения требуемой точности ε и доверительной вероятности p можно определить заранее только тогда, когда известно значение средней квадратической погрешности измерений. В этом случае количество измерений для получения доверительного интервала

$\varepsilon = |\bar{X} - X|$ с заданной доверительной вероятностью определяется с учетом соотношения

$$|\bar{X} - X| < t_p \cdot \sigma / \sqrt{n}$$

$$n \geq \left[\frac{t_p}{\varepsilon} \right]^2 \cdot \sigma^2$$

$$x = t_p, \\ 2\Phi(x) = p$$

3.6. Исключение систематических погрешностей 6

Результаты измерений, содержащие систематическую погрешность, относят к *неисправленным*. Поэтому при проведении измерений стремятся полностью исключить, уменьшить или учесть влияние систематических погрешностей, которые в ряде случаев могут быть так велики, что совершенно исказят результаты измерений. Однако вначале их все же надо обнаружить.

В достаточной мере условно систематические погрешности измерений можно разделить на четыре группы.

1. Погрешности, природа которых известна еще до проведения измерений и их значение можно сравнительно точно определить. Такие погрешности устраняют методом введения соответствующих поправок. Если поправка не превышает 0,5 % (т. е. 0,005) от средней квадратической погрешности (среднего квадратического отклонения) результата измерений, то ею следует пренебречь.

2. Погрешности известного происхождения, но неизвестного значения. К ним относится инструментальная погрешность измерительных приборов, которую часто определяют классом точности прибора .

3.6. Исключение систематических погрешностей 5

3. Третья группа систематических погрешностей самая опасная. Это погрешности, о существовании которых экспериментатор не подозревает, хотя значение их может быть очень велико. Они чаще всего проявляются при сложных измерениях, и иногда бывает, что какая-нибудь величина, которая считается измеренной с точностью, например, до 2...3 %, в действительности оказывается в 2 раза больше измеренного значения (если при измерении емкости плоского конденсатора $C = \epsilon_0 \epsilon S/d$ были определены d и S , то будет иметь место грубая погрешность, если измеряемый образец содержал пластины, расположенные не плоскопараллельно).

Один из наиболее надежных способов убедиться в отсутствии таких составляющих погрешности — провести измерения исследуемой величины совсем другим методом и в других условиях.

4. Группу систематических погрешностей, которые, хотя и не связаны непосредственно с измерительными операциями, могут существенным образом исказить результат измерений. Речь идет о погрешностях, обусловленных свойствами измеряемого объекта.

3.6. Исключение систематических погрешностей 4

Если все систематические погрешности учтены, т. е. поправки, которые следовало определить, вычислены и введены, класс точности измерительного прибора известен и есть уверенность, что отсутствуют какие-либо существенные и неизвестные источники систематических погрешностей, то и в этом случае результаты измерений все-таки несвободны уже от случайных погрешностей. Если случайная погрешность окажется меньше систематической, то нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности — все равно результаты измерений не станут от этого заметно точнее, и, желая получить большую точность, нужно искать пути к уменьшению систематической погрешности. Наоборот, если случайная погрешность больше систематической, то именно случайную погрешность нужно уменьшать в первую очередь.

Для уменьшения случайной погрешности следует произвести не одно измерение, а ряд их, причем тем больший, чем меньшую величину случайной погрешности хотим получить. Нет смысла производить измерений больше, чем это необходимо, чтобы систематическая погрешность существенно превышала случайную.

3.6. Исключение систематических погрешностей 3

Правила учета погрешностей:

1. Если систематическая погрешность является определяющей, т.е. ее значение существенно больше значения случайной погрешности, присущей данному методу измерений, то достаточно выполнить измерение один раз.

2. Если случайная погрешность — определяющая, то измерение надо производить несколько раз. Число измерений следует выбирать так, чтобы случайная погрешность среднего арифметического была меньше систематической погрешности и чтобы последняя опять определяла окончательную погрешность результата.

Однако следует иметь в виду, что можно ограничиться одним измерением лишь в тех случаях, когда из каких-то других источников известно, что значение случайной погрешности меньше систематической.

Итак, необходимое число измерений определяют в конечном итоге соотношением значений систематической и случайной погрешностей

3.6. Исключение систематических погрешностей 2

Для не исключенных систематических погрешностей, которые считаем случайными, определяют доверительные границы. При этом руководствуются следующими рекомендациями.

1. Если случайные погрешности пренебрежимо малы, то границами составляющих не исключенной систематической погрешности полагают пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений.

2. Проводя суммирование не исключенных систематических погрешностей результата измерения, их рассматривают как случайные величины. При отсутствии априорной информации о законе их распределения принимают модель равномерного распределения.

3.6. Исключение систематических погрешностей

1

3. Если не исключенные систематические погрешности обусловлены несколькими причинами, то доверительные границы вычисляют на основе композиции законов распределения отдельных погрешностей. При равномерном распределении не исключенных систематических погрешностей эти границы вычисляют по формуле

$$\Theta = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2},$$

где Θ - граница i -ой не исключенной систематической погрешности;
 k - коэффициент, зависящий от принятой доверительной вероятности p
 m - число частных систематических погрешностей.

Коэффициент k для значений $p = 0,9; 0,95; 0,98$ и $0,99$ полагают равным соответственно $0,95; 1,1; 1,3$ и $1,4$.

При вычислении границ не исключенной систематической погрешности доверительную вероятность принимают такой же, как и при вычислении доверительных границ случайной погрешности результатов измерений.

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 1 (выберите один вариант ответа)

Для десяти измерений получено: среднее арифметическое $\bar{x} = 36,06$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,25$. Оцените истинное значение измеряемой величины x с доверительной вероятностью $p = 0,99$ (коэффициент Стьюдента $t = 3,25$)

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 $36,06 < x < 36,33$
- 2 $35,79 < x < 36,06$
- 3 $35,79 < x < 36,33$
- 4 $36 < x < 37$

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 2 (выберите один вариант ответа)

Если при проведении 8 измерений напряжения получены результаты: 267, 265, 269, 259, 270, 268, 263, 275 В, то среднеквадратическая погрешность результата единичных измерений в ряду измерений будет равна ____ В.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 4,6
- 2 2,5
- 3 1,5
- 4 3,8

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 3 (выберите один вариант ответа)

Доверительному интервалу соответствует вероятность...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 заданная
- 2 доверительная
- 3 образцовая
- 4 абсолютная

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 4 (выберите один вариант ответа)

Погрешности результатов измерений характеризуются ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 средним арифметическим отклонением
- 2 классами точности
- 3 пределами допускаемых значений
- 4 разрядами

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 5 (выберите один вариант ответа)

Границы суммарной погрешности измерений при значении систематической составляющей $+0,3$ и границах случайной составляющей $\pm 0,1$ равны ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 $\pm 0,4$
- 2 $+ 0,1 \dots +0,5$
- 3 $+ 0,2 \dots +0,4$
- 4 $+ 0,2 \dots +0,3$

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 6 (выберите один вариант ответа)

Определить границы доверительного интервала для выборочного среднего арифметического значения измеряемой величины при нормальном законе распределения результатов измерений и известной дисперсии можно с помощью ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 распределения Стьюдента
- 2 распределения Лапласа
- 3 неравенства Чебышева
- 4 распределения Пирсона (χ^2)

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 7 (выберите один вариант ответа)

Квантиль Лапласа обозначается буквой ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 z
- 2 σ
- 3 D
- 4 χ^2

Проверка усвоения материала лекции 6

ЗАДАНИЕ № 8 (выберите один вариант ответа)

Для определения границ не исключенной систематической погрешности используют формулу

$$\Theta = k \sqrt{\sum_{1}^m \Theta_i^2} .$$

Что обозначает число m в этой формуле:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1 число средств измерений
- 2 доверительную вероятность
- 3 число не исключенных систематических погрешностей
- 4 доверительный интервал