Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Цель обучения:

11.2.6 - знать взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

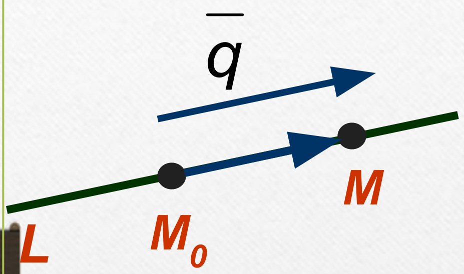
Цель урока:

- рассмотреть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве;
- применять изученные понятия при решении задач.

Повторим!

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая *L* проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\overline{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\overline{q} = \{m; n; p\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

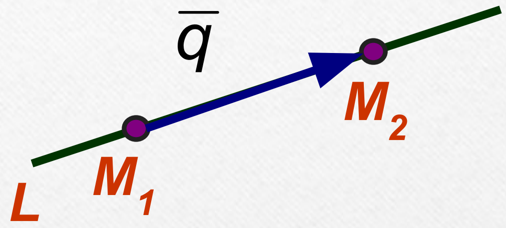
Каноническое уравнение прямой

$\overline{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Повторим!

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2; z_2)$.***



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Повторим!

Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = t \\ \dfrac{y - y_0}{n} = t \\ \dfrac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}}$$

Параметрическое уравнение прямой

Повторим!

Общее уравнение плоскости

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат *Oxyz*, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными *x y z* определяет относительно этой системы плоскость.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (1)$$

A; B; C; D – некоторые постоянные, причем из чисел *A; B; C* хотя бы одно отлично от нуля.

Общее уравнение плоскости

Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (2)$$

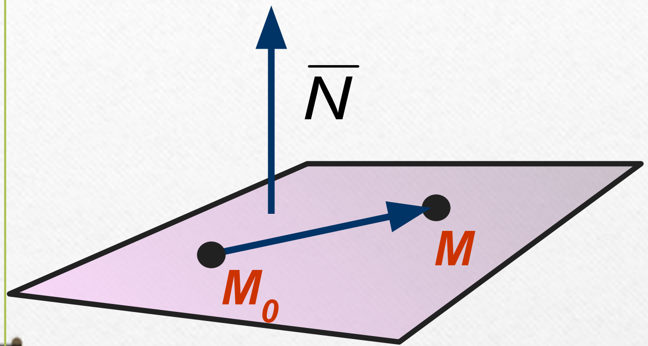
Вычтем из уравнения (1) тождество (2):

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \quad (3)$$

Общее уравнение плоскости

Повторим!

Общее уравнение плоскости



Произвольная точка *M(x; y; z)* лежит на плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению *(3):*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Уравнение (3) является условием перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{N}=\{A;B;C\}}$$

Таким образом, точка *M* лежит в плоскости, если $\overline{M_0M}\perp\overline{N}$.

Значит $\overline{N}$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости и, следовательно, самой плоскости.

Нормальный вектор плоскости

Общее уравнение плоскости называется <u>*полным*</u>, если все коэффициенты *A; B; C; D* отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется <u>*неполным*</u>.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ .

Они могут быть 1) параллельны;

2) прямая может лежать в плоскости;

3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

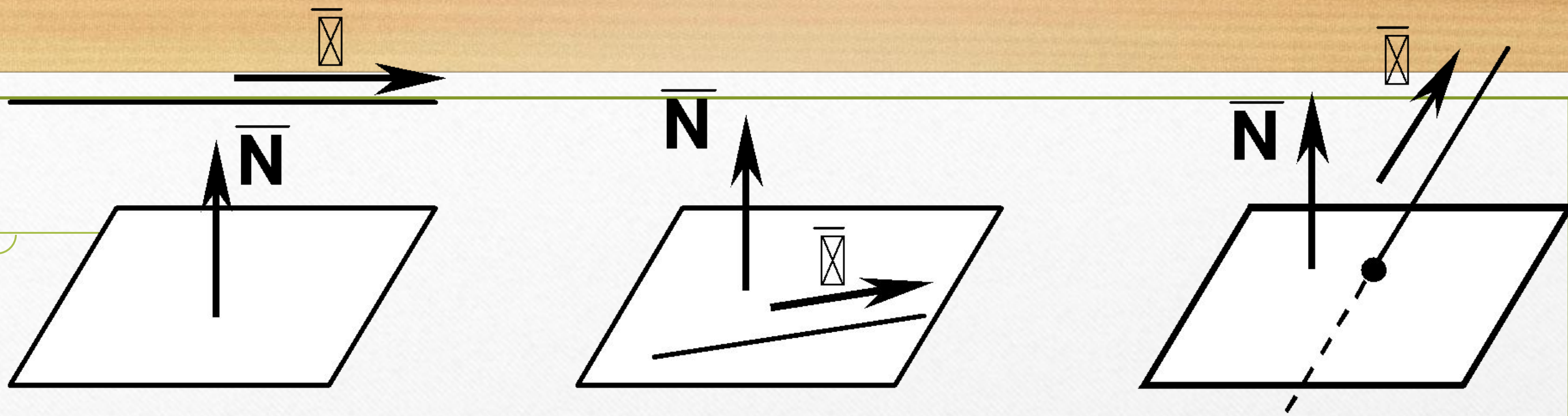
Пусть λ: $Ax + By + Cz + D = 0$ и

$$\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

Тогда $\bar{N} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости λ,

$$\bar{\ell} = \{m; n; p\}$$

– направляющий вектор прямой ℓ .



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то $\left(\overline{\mathbf{N}},\overline{\ell}\right)=0$ (1)

или в координатной форме

$Am + Bn + Cp = 0$. (2)

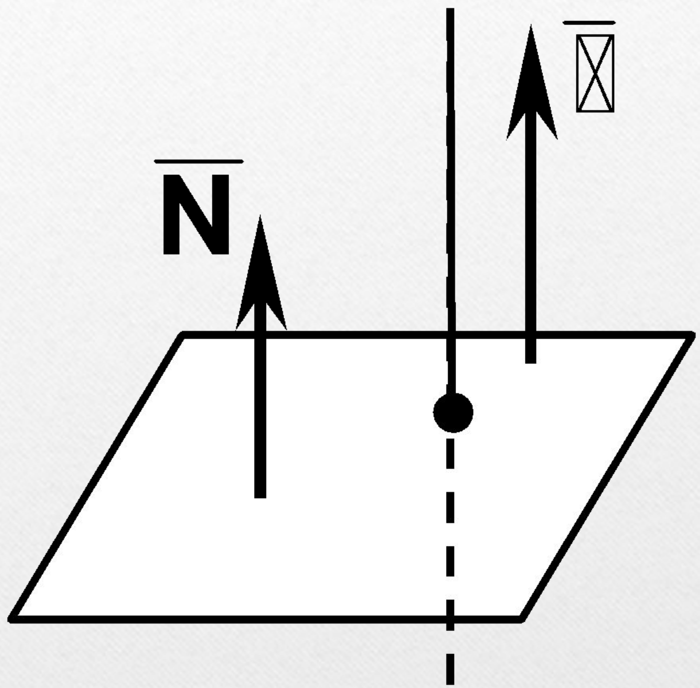
Если условие (1) (*условие* (2)) *не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.*

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (1) ((2)) выполняется условие

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$,

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – любая точка прямой.

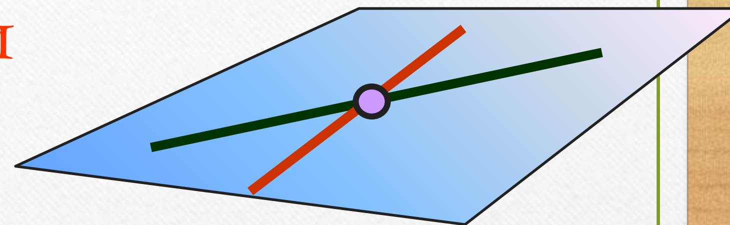
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



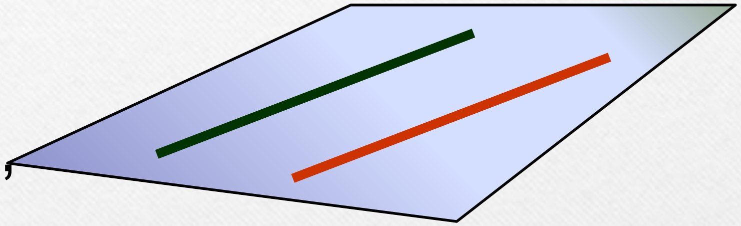
В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\square}$ т.е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

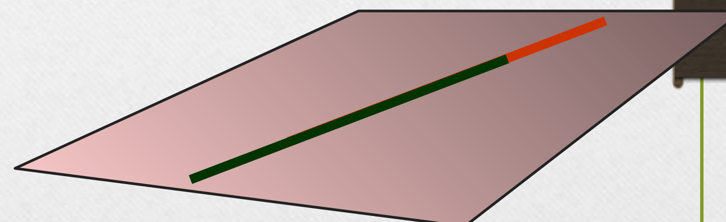
Две прямые в пространстве могут пересекаться,



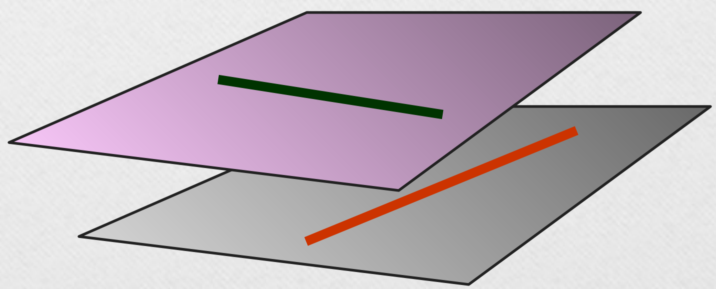
быть параллельными,



совпадать,



и скрещиваться.

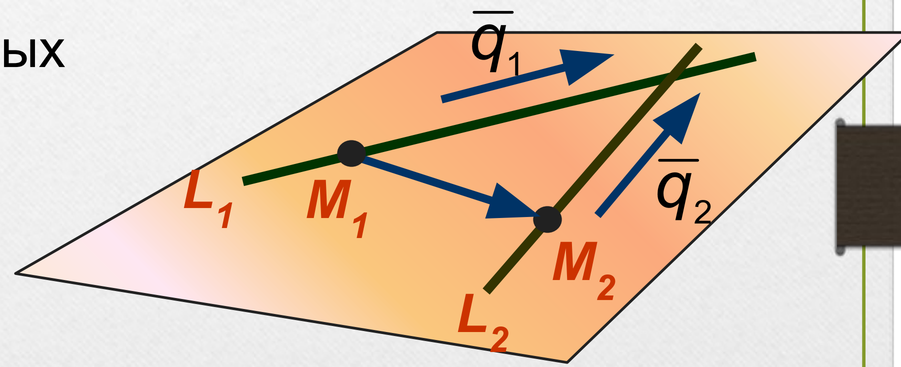


В первых трех случаях прямые лежат в одной плоскости.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \qquad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$



Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:

$$\overline{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$$

$$\overline{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

были компланарны.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

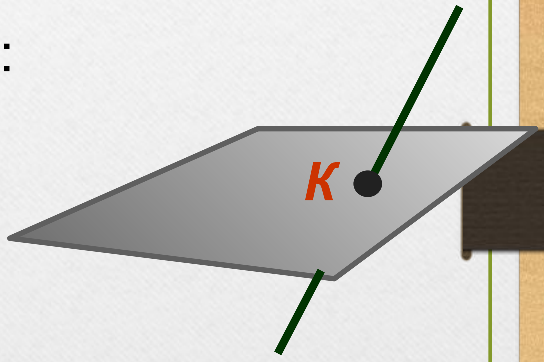
Точка пересечения прямой и плоскости

При вычислении координат точки пересечения прямой и плоскости

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad p: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

следует совместно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$



При этом необходимо:

- Записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Точка пересечения прямой и плоскости

- Подставить в уравнение плоскости вместо ***x; y; z***:

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

- Решить полученное уравнение относительно ***t***:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

- Подставить t_0 в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x_K = mt_0 + x_0 \\ y_K = nt_0 + y_0 \\ z_K = pt_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow \quad K(x_K; y_K; z_K)$$

Пример

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1} \qquad y+5z+6=0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t \\ z=t+2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t+5(t+2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad 10t+16=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=-1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3\cdot(-1.6)+1 \\ y=5\cdot(-1.6) \\ z=-1.6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3.8 \\ y=-8 \\ z=0.4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-3.8;-8;0.4)}$$

Упражнение 1

Определите взаимное расположение прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{cases} x-1=5t, \\ y-1=4t, \\ z-1=7t, \end{cases}$$

и плоскости, задаваемой уравнением $x - 3y + z + 1 = 0$.

Ответ: Перпендикулярны.

Упражнение 2

Найдите координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 1, 2)$.

Ответ: $\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, 2\right)$.

Подведи итог

- что узнал?
- чему научился?
- что осталось непонятным?
- над чем необходимо работать?