

граф.

Представление задачи с помощью графа

4 октября

Граф – это

Это математическая модель
реальной системы, объекты
которой обладают парными
связями.

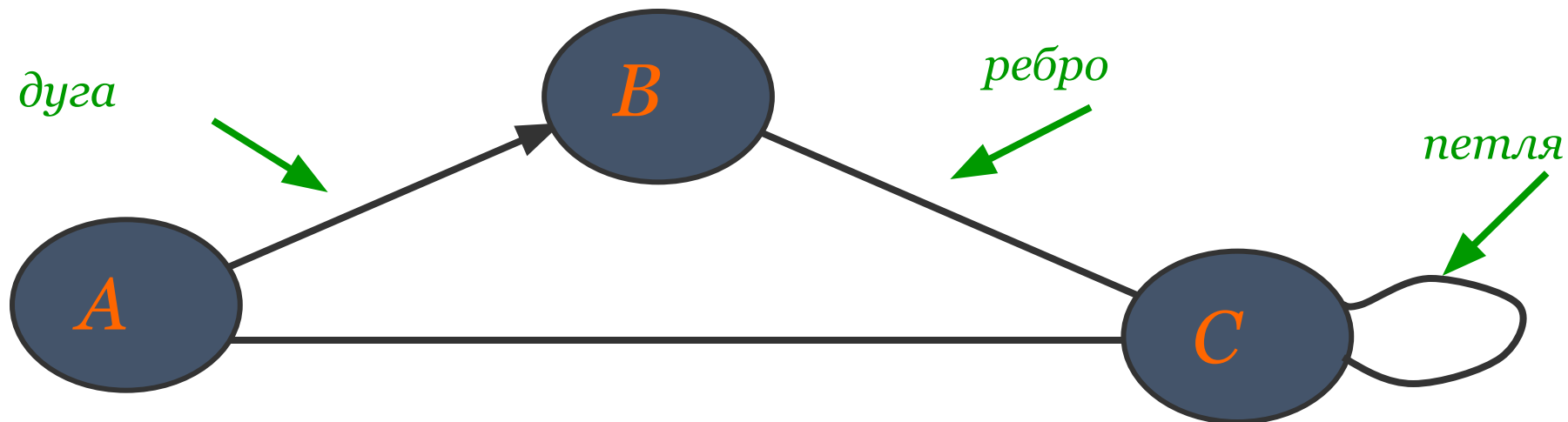
Состав графа

Граф состоит из **вершин**, связанных линиями.

Направленная линия (со стрелкой) называется **дугой**.

Линия ненаправленная (без стрелки) называется **ребром**.

Линия, выходящая из некоторой вершины и входящая в неё же, называется **петлей**.

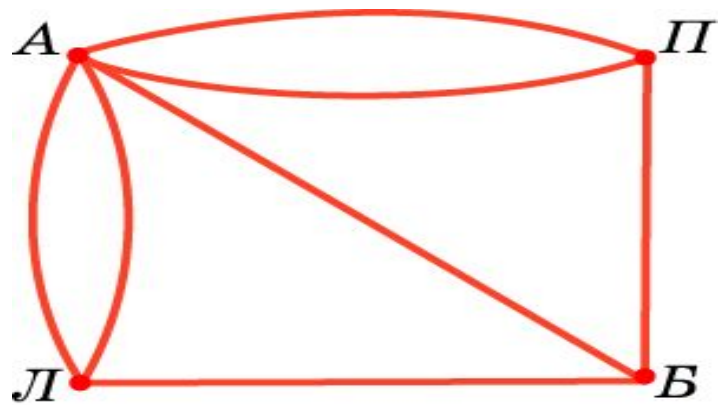


Индексом вершины графа называется число ребер, сходящихся в данной вершине графа.

Например, на рисунке 1 индекс вершины A равен 5, индекс вершин $Л$, $Б$, $П$ равен 3.

При этом, при подсчёте индекса ребро-петля учитывается дважды.

Например, на рисунке 2 индекс вершины A равен 2.



1)



2)

Леонард Эйлер и задача о Кёнигсбергских мостах

Немного поэкспериментировав, Эйлер вывел четыре основных правила для решения таких задач:

1. Число нечетных вершин графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин. (можете попробовать на досуге).
2. Если у графа все вершины четные, то его можно начертить одним росчерком пера, причем неважно, где начинать.
3. Если у графа две нечетные вершины, то его можно начертить одним росчерком пера, но начинать надо в одной из нечетных вершин, а закончить в другой.

Любой граф состоит из

конечного множества вершин, и
конечного множества рёбер
(именуемого семейством рёбер).

ЗАДАНИЕ

Запишите множество вершин и семейство ребер графа на рис. 1.21.

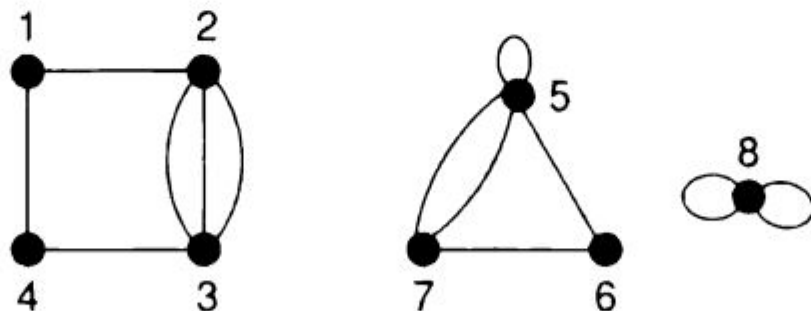


Рис. 1.21

Ответы:

- a) Множество вершин $\{1,2,3,4\}$; множества рёбер 12, 23(трижды), 34, 14
- b) Множество вершин $\{5,6,7\}$; множество рёбер 55, 57 (дважды), 56, 67
- c) Множество вершин $\{8\}$; множество рёбер 88(дважды)

Связный граф

Две вершины A и B в графе называются связными (несвязными), если в нем существует (не существует) путь, ведущий из A в B .

Граф называется связным, если каждые две его вершины связны; если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется несвязным.

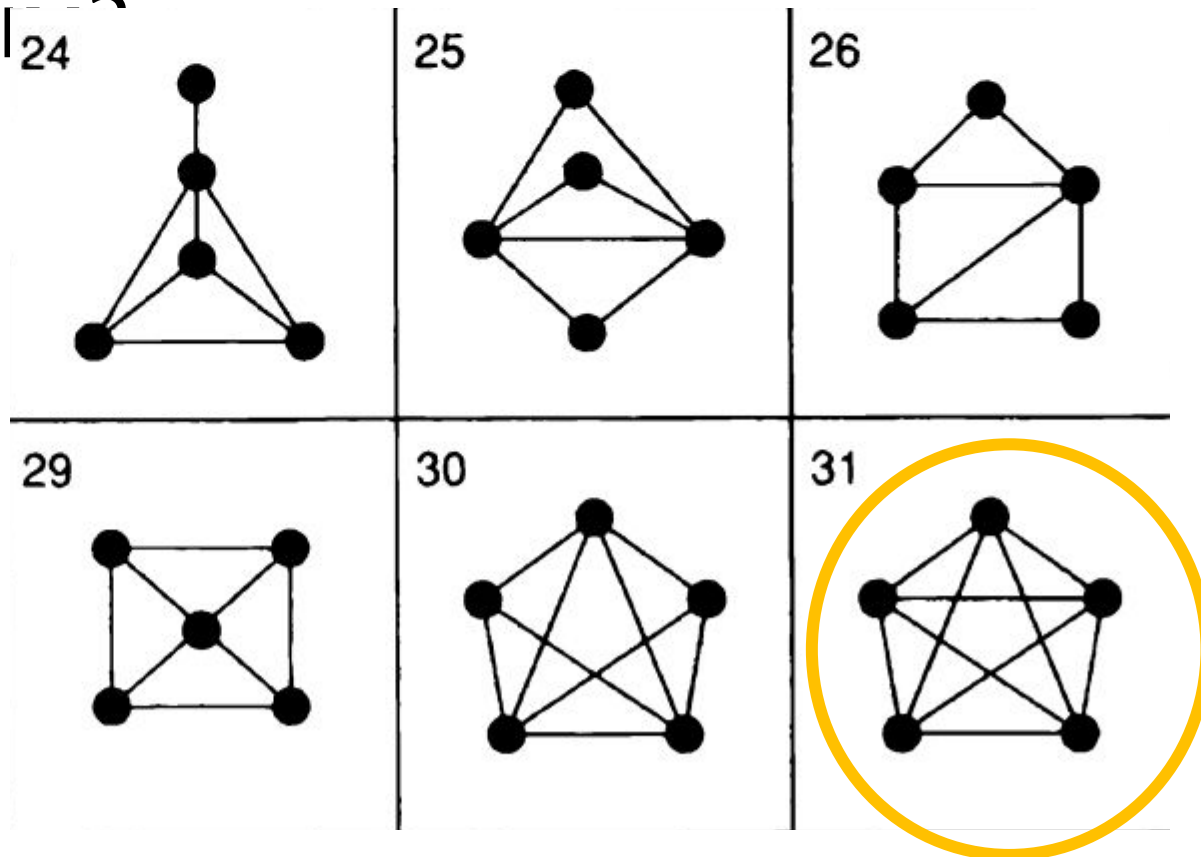
Несвязный граф

Если граф несвязный, то его можно разбить на несколько частей (подграфов), каждая из которых будет связной. Такие части называются компонентами связности. Возможно, что некоторые компоненты связности будут состоять всего лишь из одной вершины.

Понятно, что в графе из n вершин может быть от 1 до n компонент связности.

ЗАДАНИЕ

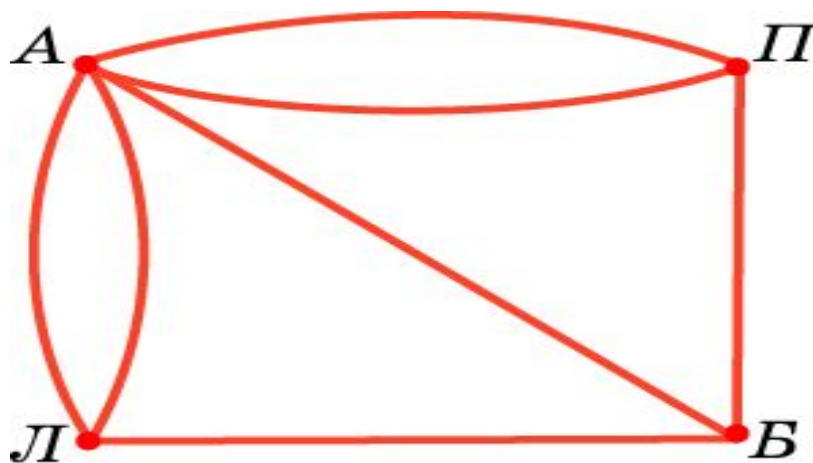
Какой из данных графов является
связным?



Уникурсальные графы

Граф называется **уникурсальным**, если можно пройти по каждому ребру этого графа ровно один раз, или, что то же самое, можно нарисовать этот граф «одним росчерком», т. е. не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждому ребру ровно один раз.

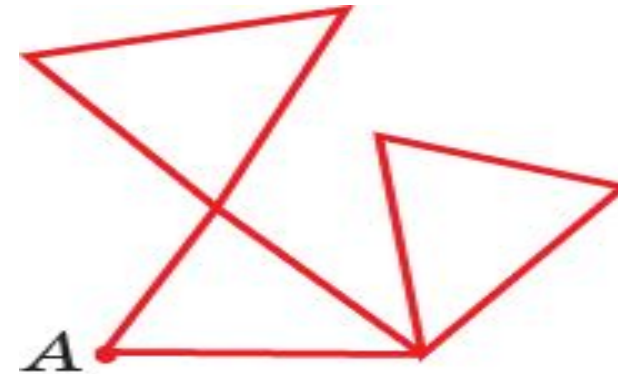
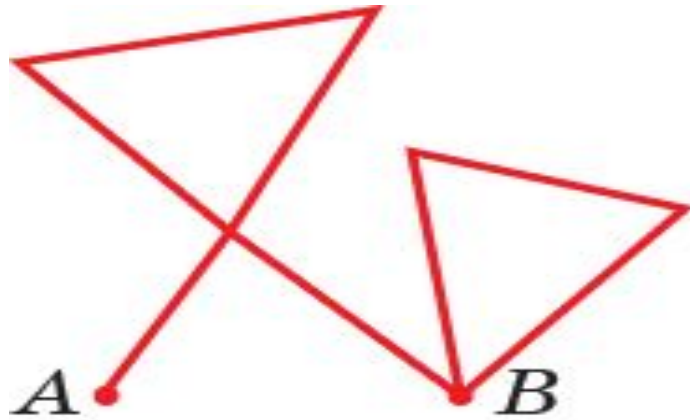
На рисунке представлен граф, соответствующий задаче Эйлера, в котором ребра соответствуют мостам, а вершины – берегам и островам.



Для решения задачи Эйлера требуется выяснить, является ли этот граф уникурсальным.

Теорема Эйлера

Теорема. Для уникурсального графа число вершин нечетного индекса равно двум или нулю.



Доказательство. Если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют четный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало A и конец B не совпадают, то они являются единственными вершинами нечетного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало A совпадает с концом B , то вершин с нечетным индексом нет.

5. Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникальными?



а)



б)



в)



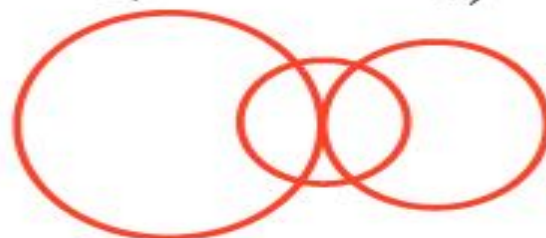
г)



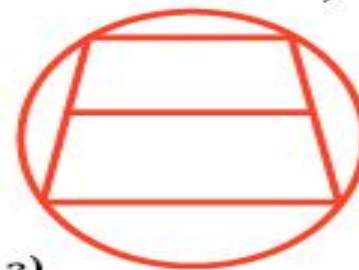
д)



е)



ж)



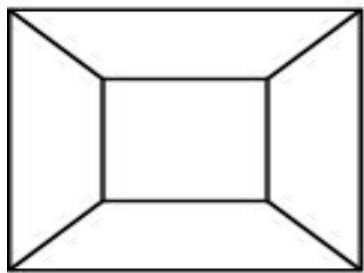
з)



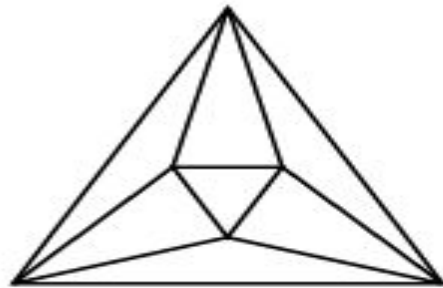
и)

Ответ: а), б), г), д), ж), з).

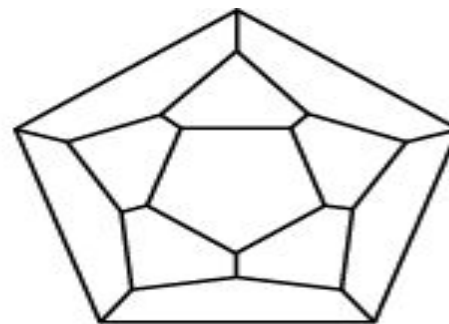
6. Выясните, какие графы, изображенные на рисунке, являются уникальными?



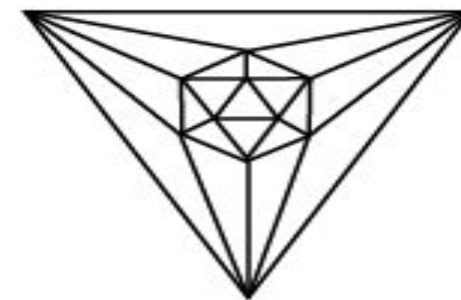
а)



б)



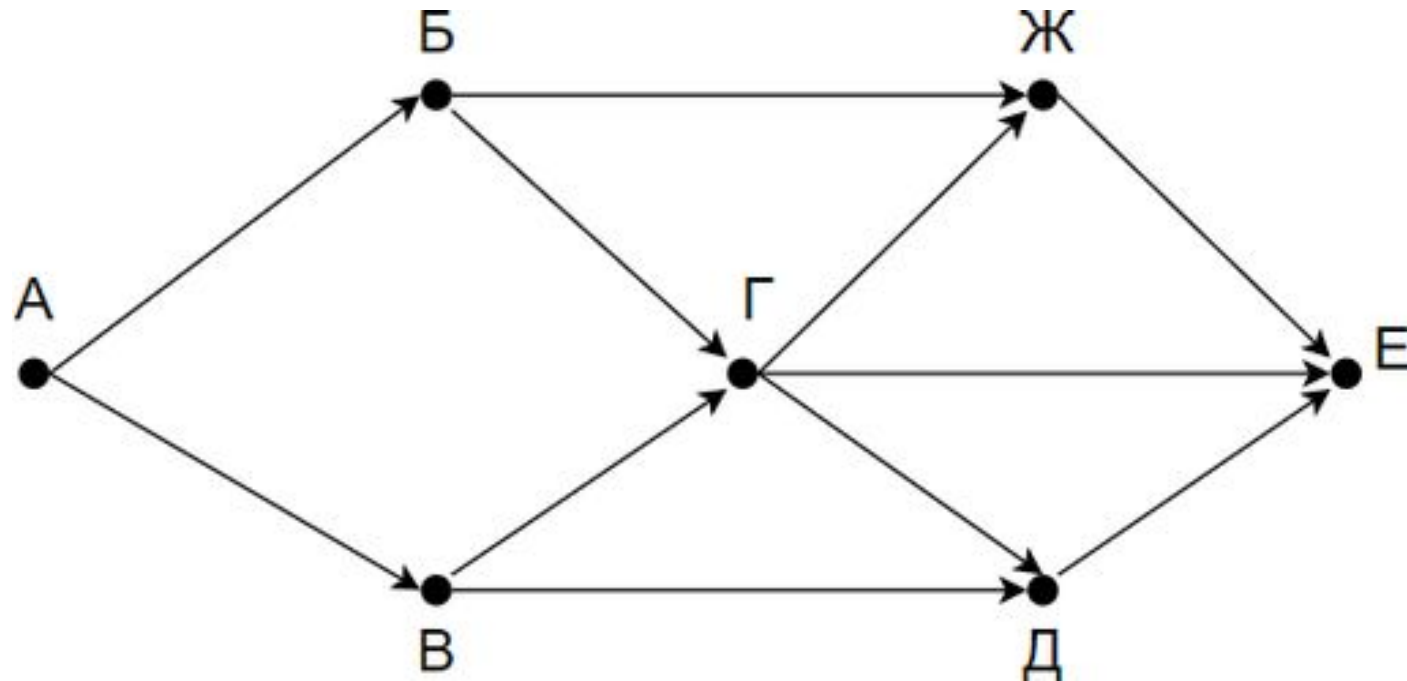
в)



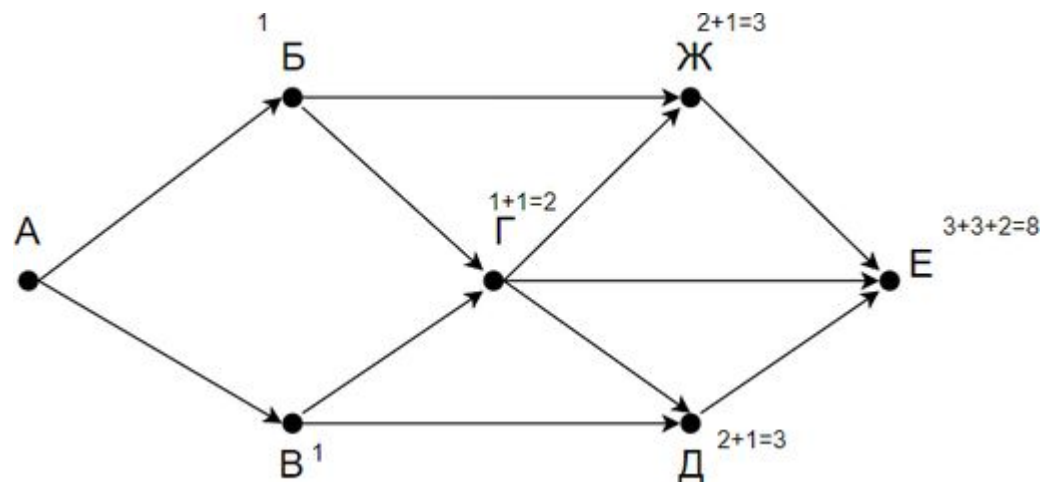
г)

Ответ: б).

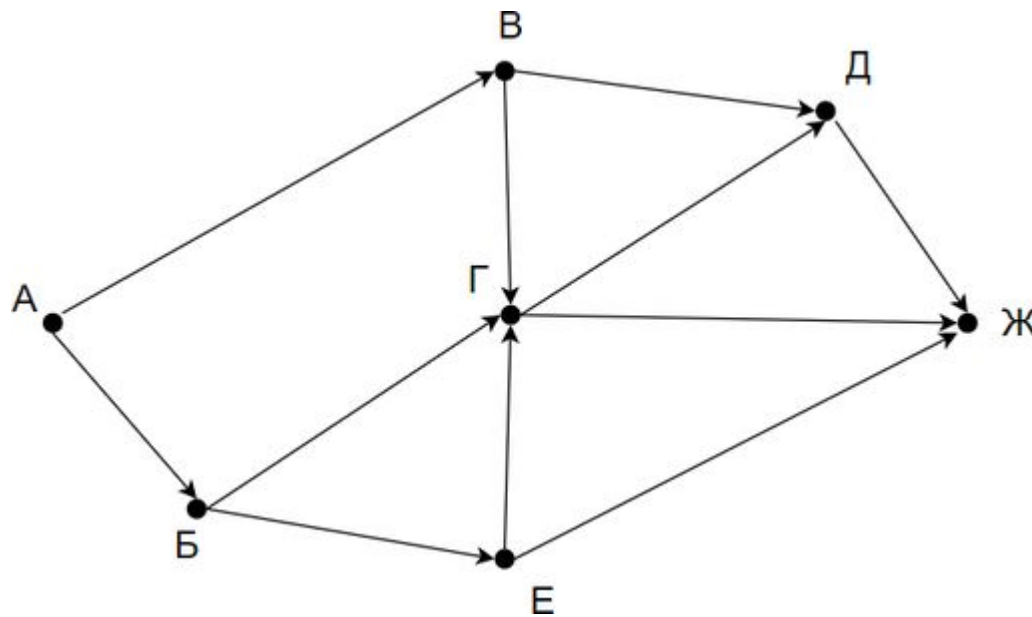
На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Е?



РЕШЕНИЕ: Заметим, что количество путей в город Е является суммой путей в города Ж, Г и Д. Количество путей в город Ж — сумма путей в города Г и Б. Таким образом получаем: $\Gamma = Б + В \quad Д = \Gamma + В \quad Ж = Б + \Gamma \quad Е = Ж + \Gamma + Д$ Заметим, что в пункты Б и В можно попасть единственным способом — из города А. Отметим на рисунке индексами сверху каждого пункта количество путей, с помощью которых в него можно попасть и посчитаем итоговое.



На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



Между населёнными пунктами А, В, С, D, Е построены дороги, протяжённость которых (в километрах) приведена в таблице:

	А	В	С	D	Е
А		2		1	
В	2		3	3	
С		3		3	2
D	1	3	3		
Е			2		

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и Е. Передвигаться можно только по дорогам, протяжённость которых указана в таблице.

Найдём все варианты маршрутов из А в Е и выберем самый короткий.

Из пункта А можно попасть в пункты В, D.

Из пункта В можно попасть в пункты С, D.

Из пункта С можно попасть в пункты D, Е.

А—В—С—Е: длина маршрута 7 км.

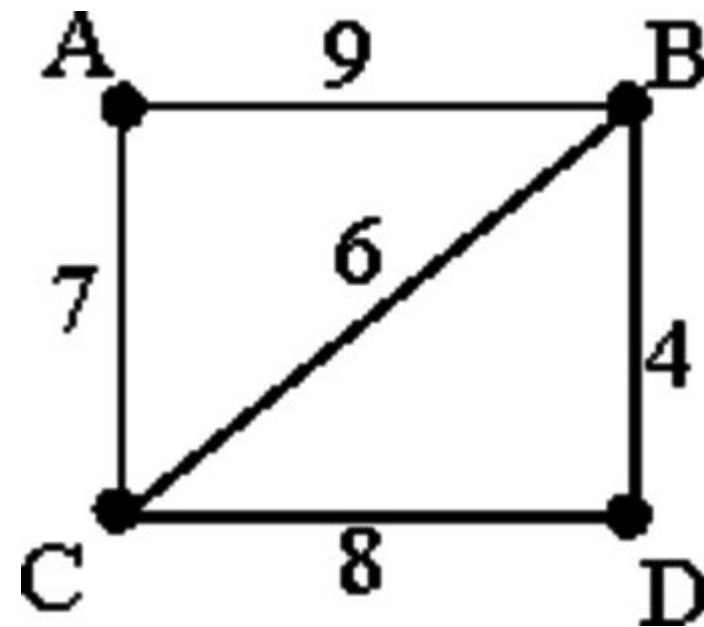
А—D—В—С—Е: длина маршрута 9 км.

А—D—С—Е: длина маршрута 6 км.

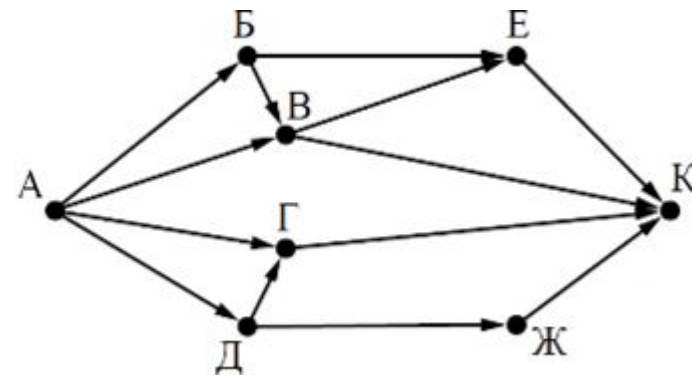
Самый короткий путь: А—D—С—Е. Длина маршрута 6 км.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. На схеме нарисованы дороги между четырьмя населёнными пунктами А, В, С, D и указаны протяжённости данных дорог. Определите, какие два пункта наиболее удалены друг от друга (при условии, что передвигаться можно только по указанным на схеме дорогам). В ответе укажите кратчайшее расстояние между этими пунктами.



- На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж и К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



- Между населёнными пунктами А, В, С, D, Е построены дороги, протяжённость которых (в километрах). Определите длину кратчайшего пути между пунктами В и Е. Передвигаться можно только по дорогам, протяжённость которых указана в таблице.

	А	В	С	D	Е
А		6		1	4
В	6		2	5	
С		2		2	
D	1	5	2		6
Е	4			6	