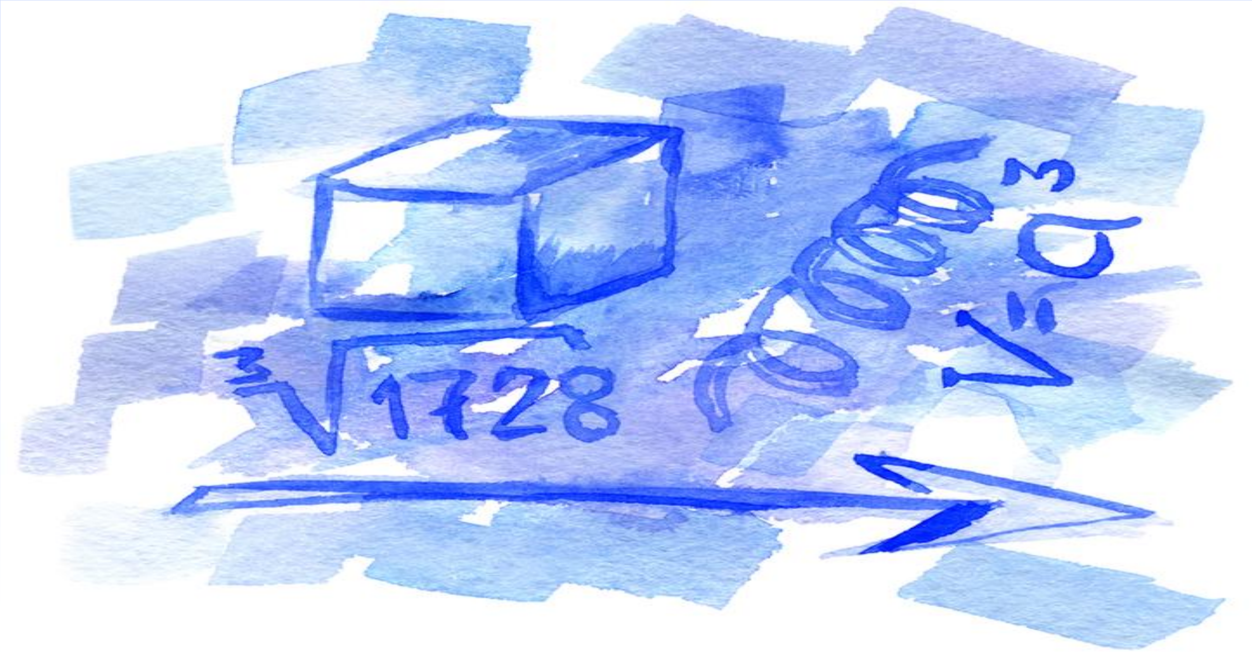
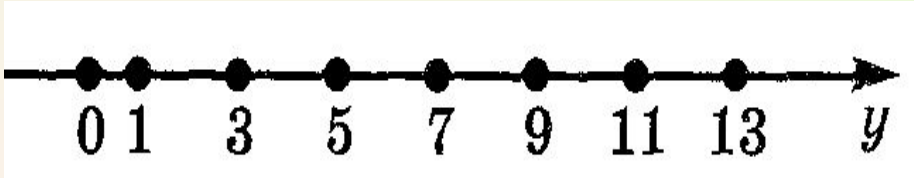


Предел числовой последовательности, предел функции

1. Предел последовательности

- $\{y_n\}$: 1,3,5,7,9,…,(2n-1),...

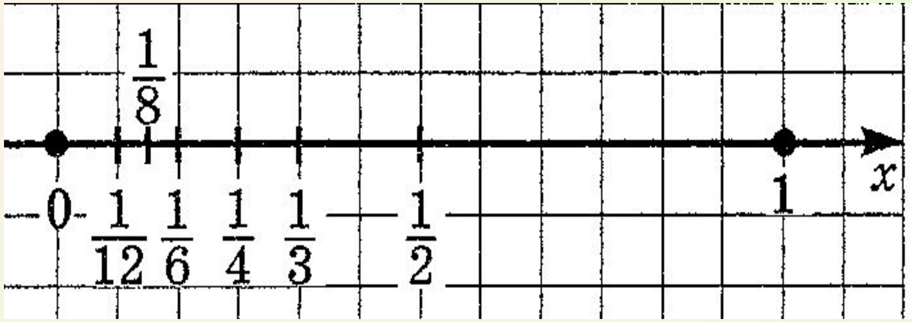


Расходится

Нет точки сгущения

Нет предела

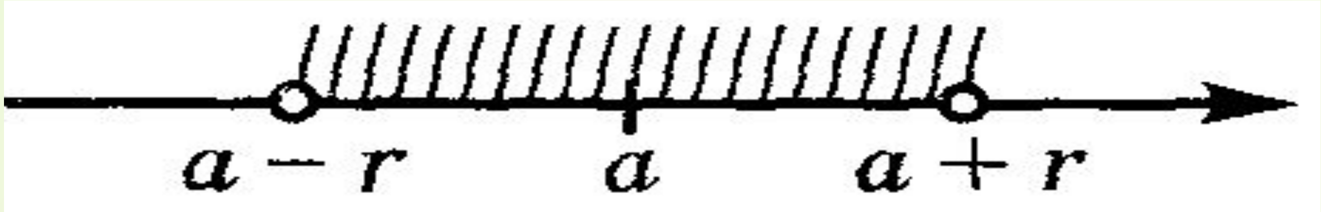
- $\{x_n\}$: 1,1/2,1/3,1/4,1/5,…1/n,..



Сходится

Точка сгущения-0

Предел последовательности-0



- интервал (a-r, a+r) называется **окрестностью точки** a радиуса r

Пример

(5,9;6,1)-окрестность точки 6 радиуса 0,1

(-0,1;0,1)- окрестность точки 0

Число $a \in \mathbb{R}$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N$$

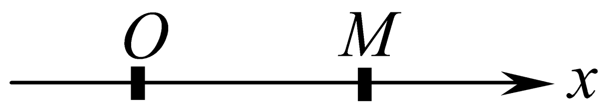
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad x_n \to a$$

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (***сходящейся к a***)

Последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся***

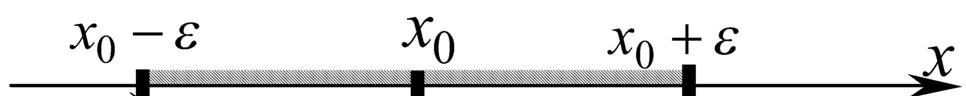
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
предела последовательности

Пусть $r \in \mathbb{R}$, $M(r) \in Ox$



$M(r)$ – геометрическая интерпретация числа $r \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, ε>0.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют ε-***окрестностью точки*** x_0.

(геометрическое определение ε-окрестности точки)

Будем обозначать: $\mathrm{U}(x_0, \varepsilon)$

$$\mathrm{U}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

(алгебраическое определение ε-окрестности точки)

Вывод: (из определения предела последовательности)

если $\{x_n\} \to a$, то с геометрической точки зрения это означает, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа

т.е. a – точка «сгущения» последовательности $\{ x_n \}$

Примеры

Свойства пределов последовательностей

- Последовательность может иметь только один предел
- Если последовательность сходится , то она ограничена

Обратное-неверно: 1,2,3,1,2,3,…- ограниченная последовательность, но она не сходится

- (теорема Вейерштрасса) Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится

Последовательность, предел которой равен нулю, называют ***бесконечно малой (б.м)***

ЛЕММА. Число $a \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ $\Leftrightarrow$ $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая

Замечание *

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ б.м последовательности, то

сумма $\{x_n + y_n\}$,

разность $\{x_n - y_n\}$,

произведение $\{x_n \cdot y_n\}$,

произведение на число $\{cx_n\}$,

частное $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0)$

соответственно последовательности б.м.

2. Пусть $\{x_n\}$ – ограничена, $\{\alpha_n\}$ – б. м., тогда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – б. м.

Правила вычисления пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

1) Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

2) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

3) Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = ca$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем использовать лемму б. м. последовательности
*и замечание **

Самостоятельно (аналогично) доказать правила 3 и 4

Теорема о «двух милиционерах»

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$x_n \le z_n \le y_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Виды неопределённостей и способы их раскрытия

$$\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0\cdot\infty\}, \{\infty-\infty\}, \{1^{\infty}\}, \{0^{0}\}, \{\infty^{0}\}$$

$f(a)=\left\{\frac{0}{0}\right\},\quad x\to a,\quad \lvert a\rvert<\infty$			$c=\text{const}$ $b=\text{const}$
№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
1	$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(a)=Q_m(a)=0$	Разделить функции $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ на разность $(x-a)$, сократить $f(x)$ на эту разность $(x-a)$ и подставить вместо x значение $x=a$	1) $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; 2) $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{b}=A$ 4) $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – повторить прием

2	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt{u_1(x)} - \sqrt{u_2(x)}$	Умножить и разделить функцию $f(x)$ на сопряженное иррациональное выражение $(\sqrt{u_1(x)} + \sqrt{u_2(x)})$, использовать формулу сокращенного умножения $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ и сократить $f(x)$ на разность $(x-a)$	------ // ------

№	Вид функции $f(x)$	Какие преобразования нужно сделать	Результат преобразований
3	Функция $f(x)$ содержит иррациональность вида $\sqrt[3]{u_1(x)} - \sqrt[3]{u_2(x)}$ или $\sqrt[3]{u_1(x)} + \sqrt[3]{u_2(x)}$	Умножить и разделить разность кубических корней на неполный квадрат суммы, а сумму кубических корней – на неполный квадрат разности, воспользоваться формулами сокращенного умножения $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$ и сократить функцию $f(x)$ на разность $(x-a)$	1) $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; 2) $\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{c}{b}=A$ 4) $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ – - повторить прием

2. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, кроме, может быть, самой точки x_0

$U^*(x_0,\ \delta) = U(x_0,\ \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0

<u>Определение предела функции по Коши (на языке окрестностей)</u>

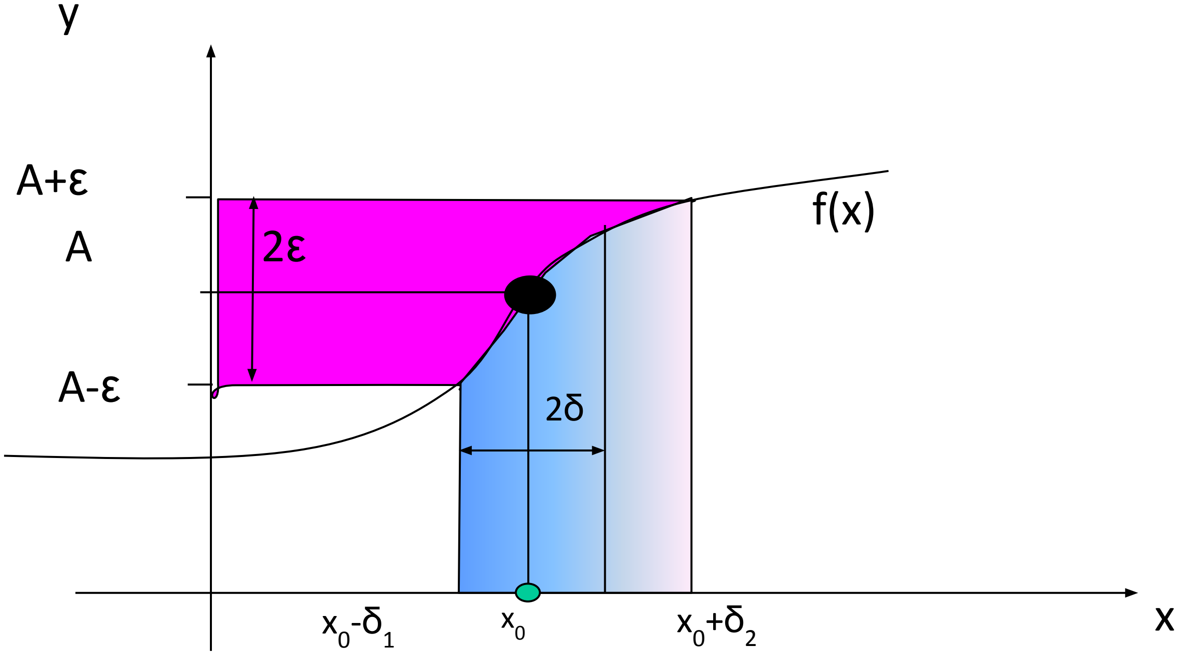
Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *когда* $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$\text{если } x \in U^*(x_0, \delta) \text{ , то } f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$



Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей)

Число $A \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A

Замечания

1. Свойства пределов функции, правила вычисления пределов функции аналогичны пределам последовательности

Самостоятельно их записать, изменяя слово «последовательность» на «функция»

2) Пусть $f\colon X \to Y$, $\phi\colon Y \to Z$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$

Тогда сложная функция $\phi(f(x))$ имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0 \qquad (1)$$

- ***формула замены переменной в пределе***

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой* (б.м) *при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

ЛЕММА. Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$ (в точке x_0), если предел этой функции равен ∞

Замечательные пределы

первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

СЛЕДСТВИЯ

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

СЛЕДСТВИЯ

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x/\ln a}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=1$

Односторонние пределы

правосторонний

$f(x_0+0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

Число $B\in\mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to x_0$ ***справа***, *если* $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ *такое, что если* x *удовлетворяет условию*

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

то $f(x)\in \mathrm{U}(B, \varepsilon)$

левосторонний

$f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

Число $A\in\mathbb{R}$ называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to x_0$ ***слева*** (в точке x_0 слева), если $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ такое, что если x удовлетворяет условию

$$0 < x_0 - x < \delta,$$

то $f(x)\in \mathrm{U}(A, \varepsilon)$

ТЕОРЕМА (необходимое и достаточное условие существования предела функции)

Функция $f(x)$ *имеет предел при* $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ *существуют конечные и равные между собой односторонние пределы функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$.

При этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

Замечание

Все свойства пределов остаются справедливыми и для односторонних пределов

3. Непрерывность функции, точки разрыва

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если предел функции в точке $\boldsymbol{x_0}$ равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Замечание

В силу теоремы о существовании предела равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

– *определение непрерывности функции в точке* ***на языке односторонних пределов***

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a; b)$ если она непрерывна в каждой точке этого интервала

Функция $f(x)$ ***называется непрерывной на отрезке*** $[a; b]$ если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и непрерывна в граничных точках (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева)

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в этой точке, то ***$f(x)$ называют разрывной в точке x_0***, а саму точку x_0 ***называют точкой разрыва*** функции $f(x)$

Замечания

1) $f(x)$ может быть определена в односторонней окрестности точки x_0

   Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции

2) Из определения $\Rightarrow$ точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ в случаях, когда нарушается хотя бы одно из равенств:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Точки разрыва

первого рода

Точка x_0 называется ***точкой разрыва* первого *рода,*** если функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные пределы слева и справа

Если при этом односторонние пределы равны, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***,
при неравных односторонних пределах – ***точкой скачка***

второго рода

Точка x_0 называется ***точкой разрыва*** **второго *рода,*** если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в этой точке равен ∞ или не существует

Алгоритм исследования функции на непрерывность

1. Найти точки, подозрительные на разрыв.
(точки, в которых функция не определена или не задана)

2. Найти односторонние пределы для каждой подозрительной точки.
Вычислить значение функции в этой точке, если оно существует

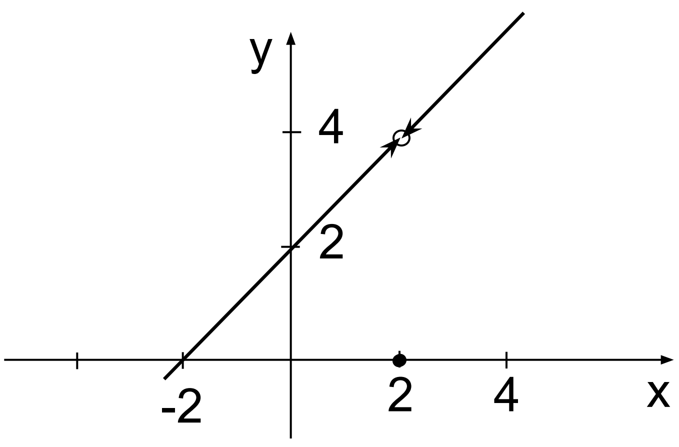
3. Классифицировать характер разрыва

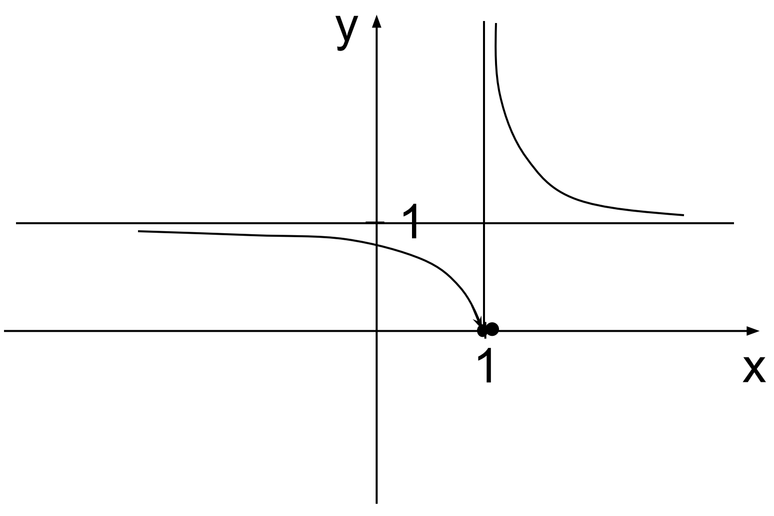
4. Построить эскиз графика. (При необходимость вычислить пределы функции на плюс - бесконечности и минус - бесконечности)

Примеры

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

2. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$





ТЕОРЕМА (Коши, о промежуточных значениях)

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и* γ *– число, заключенное между* $f(a)$ *и* $f(b)$. *Тогда существует хотя бы одна точка* $x_0 \in [a; b]$ *такая, что* $f(x_0) = \gamma$

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Коши)

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и на его концах принимает значения разных знаков, то на* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль*

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорем Коши-Вейерштрасса)

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *то множеством ее значений является отрезок* $[m; M]$, *где* m *и* M *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$