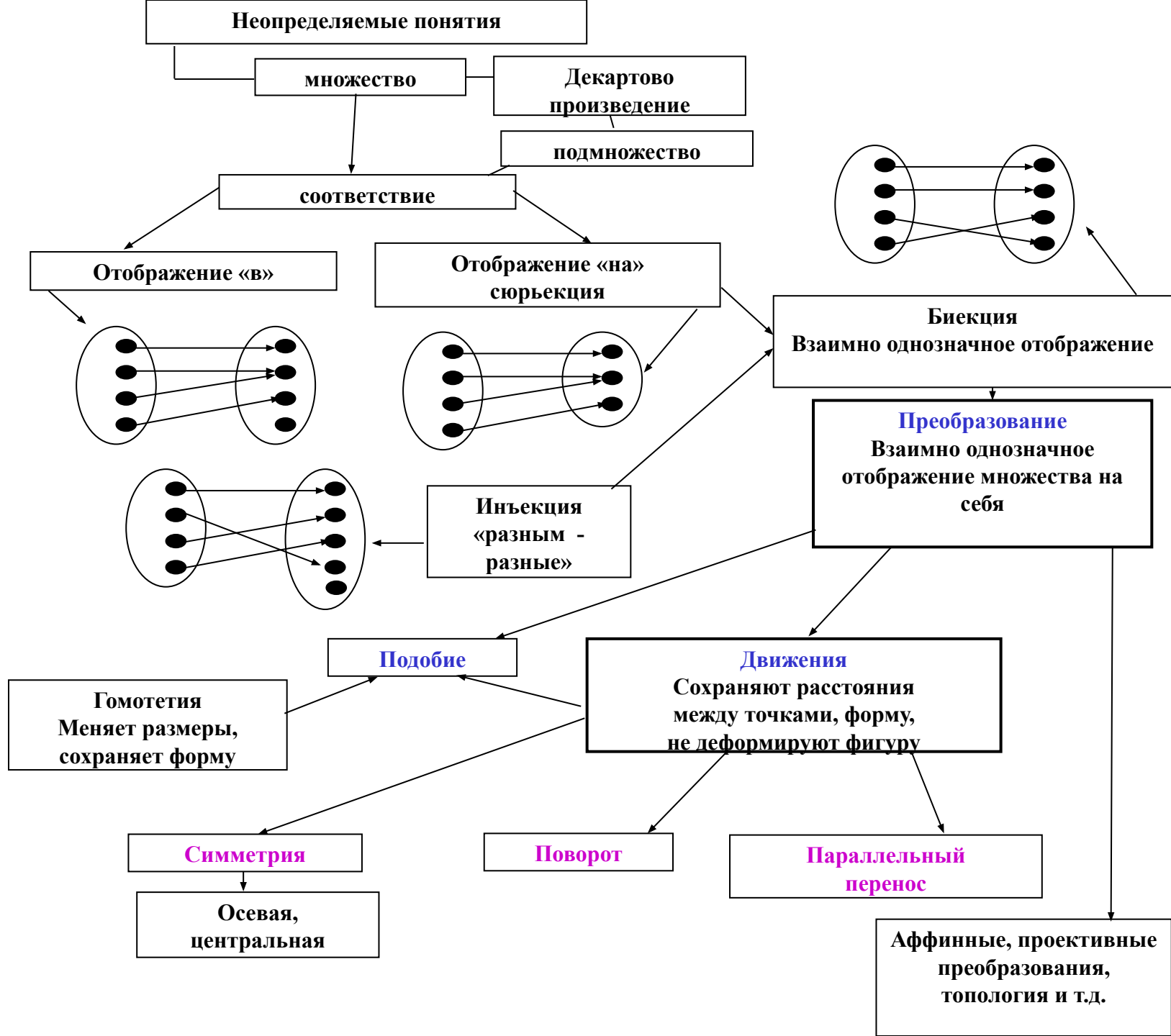


Лекция №5

Методика изучения геометрических преобразований

План

- 1. Опорный конспект к теме**
- 2. Геометрические преобразования как функции**
- 3. Современный подход к построению курса математики**
- 4. Трудности в усвоении геометрических преобразований**
- 5. Этапы изучения.**



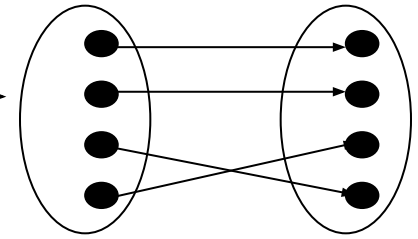
Определения

Соответствие, при котором каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B , называется ОТОБРАЖЕНИЕМ множества A в множество B .

Соответствие, при котором каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B и, кроме того, каждому элементу множества B отвечает хотя бы один элемент множества A , называется ОТОБРАЖЕНИЕМ множества A на множество B .

Отображение называется ИНЪЕКТИВНЫМ, если любые разные элементы множества A имеют различные образы.

Биекция
Взаимно однозначное отображение



Преобразование
Взаимно однозначное отображение
множества на себя

Подобие

Гомотетия
Меняет размеры,
сохраняет форму

Движения
Сохраняют расстояния
между точками, форму,
не деформируют фигуру

Симметрия

Осевая, центральная

Поворот

Параллельный
перенос

Геометрические преобразования как функции

Одна из основных идей современной математики – **идея отображения множеств**.

Общее понятие отображения множеств – общее понятие функции.

Две модели: геометрическое преобразование и числовая функция.

Отличаются **природой элементов** области определения и области значений, **способом задания** соответствия.

Геометрические преобразования и числовые функции

Каждое геометрическое преобразование представляет собой некоторую функцию, области определения и значений ее являются точечными множествами.

Числовая функция «преобразовывает» (как и геометрическое преобразование) одно множество — числовое, в другое (или в это же) по определенному закону.

Идея построения курса математики на теоретико-множественной основе

В 60-70 годах идея отображения была положена в основу школьного курса математики.

На этой идее строился курс алгебры – функции рассматривались как отображения числовых множеств.

В геометрии основное внимание уделялось изучению геометрических преобразований плоскости, на этой основе строилось и изложение традиционных тем: «Четырехугольники», «Векторы» и др.

Структура изложения:

Начальные геометрические понятия.

Геометрическая фигура – множество точек. Примеры – окружность, круг, сфера.

Структура определений. Неопределяемые понятия. Аксиомы.

Отрезок и луч. Координаты на прямой. Ломаная. Плоскость. Планиметрия.

Область. Многоугольник. Полуплоскость. Угол.

Конгруэнтность фигур и перемещения (поворот, симметрия), примеры симметрии фигур.

Параллельность и параллельный перенос. (отношения рефлексивности, транзитивности, симметричности, эквивалентности).

Многоугольники (треугольники, четырехугольники, площади)

Векторы.

Подобие и гомотетия (свойства, подобные многоугольники)

Повороты и тригонометрические функции

Метрические соотношения в треугольнике.

Вписанные и описанные многоугольники.

Начальные сведения из стереометрии.

Опыт показал, что введение в основу курса геометрии идеи отображений усложнило систему понятий, ослабило формирование навыков решения задач

Трудности в усвоении геометрических преобразований

1. При изучении геометрических преобразований ряд трудностей связан с терминологией: мы изучаем геометрические преобразования **на плоскости**.

Речь идет о преобразовании *множества точек плоскости*, что каждой точке плоскости ставится в соответствие точно одна точка этой же плоскости по определенному закону или правилу.

Кратко *множество точек плоскости* называют просто «*плоскостью*». Без указанных замечаний, учащиеся возникнут затруднения, ввиду того, что они под плоскостью понимают не множество точек, а носителя этого множества, который не подвергается никакому преобразованию.

Трудности в усвоении геометрических преобразований

2. Учащиеся затрудняются ответить на вопрос, чем определяется данное геометрическое преобразование, или когда его можно считать заданным.

Помочь может рассмотрение **преобразования как функции**.

Функцию можно считать заданной, если

- 1) задана **область определения** ;
- 2) указано **правило**, по которому для каждого значения аргумента можем определить соответствующее ему значение функции.

Пример

Например. «Даны точка O и прямая b . Постройте прямую, на которую отображается прямая b при центральной симметрии с центром O ».

Преобразованию подвергается множество точек плоскости.

С каждой точкой A плоскости сопоставляется точка A' этой же плоскости по следующему правилу: 1) $O \in AA'$, 2) $OA = OA'$.

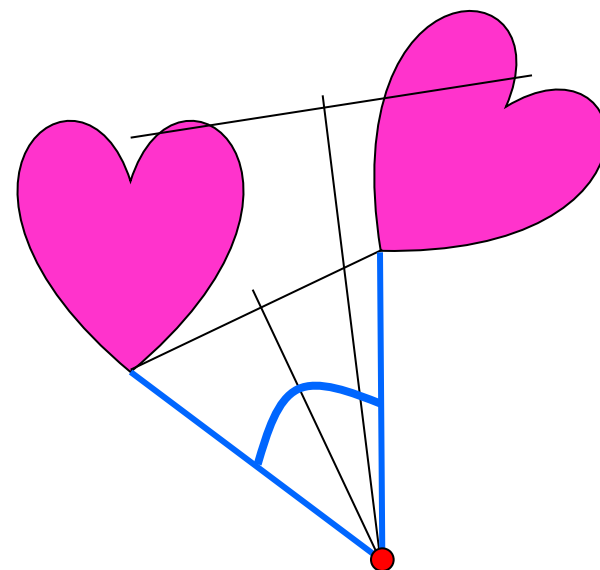
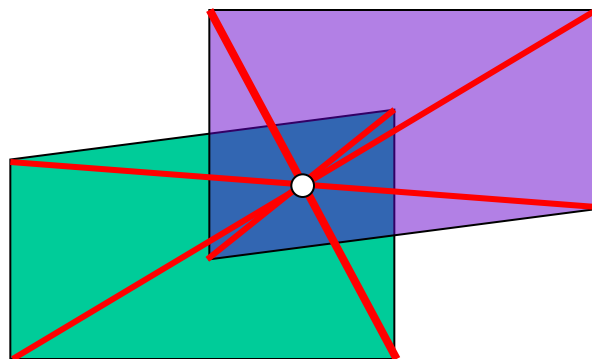
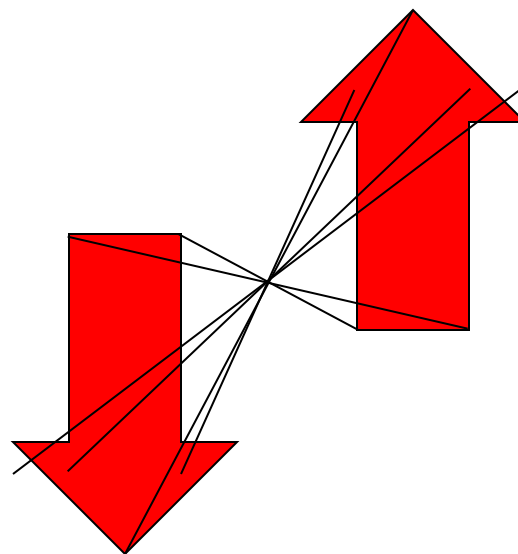
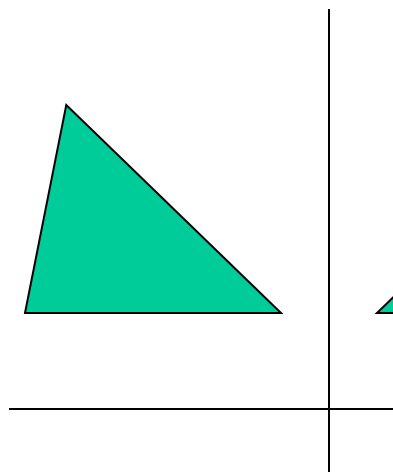
Трудности в усвоении геометрических преобразований

3. Трудности связаны с неумением учащихся определять образ отдельной точки в данном преобразовании и непониманием того, что образ фигуры в этом преобразовании есть **множество образов всех ее точек**.

При изучении геометрических преобразований строят образы не только отдельных точек плоскости, но и определенных подмножеств, определенных фигур (отрезков, треугольников).

Пример

Построить образы фигур



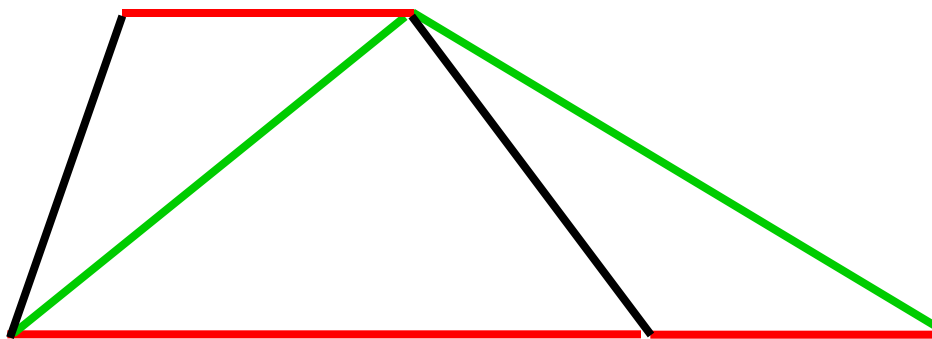
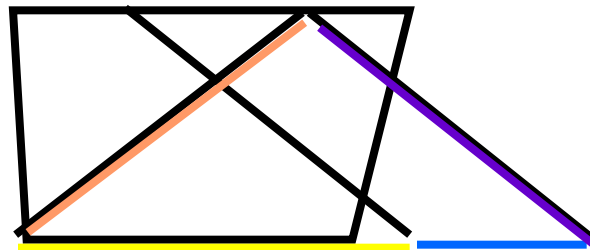
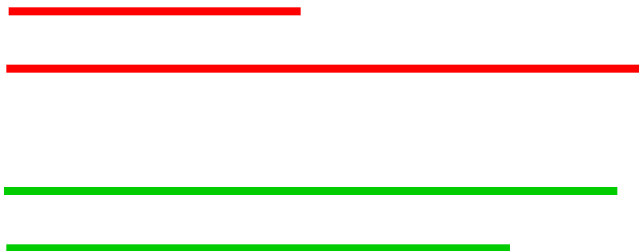
Трудности в усвоении геометрических преобразований

4. Использование геометрических преобразований в качестве метода доказательства теорем и решения задач.

Причина **психологического** характера: геометрические преобразования **нельзя наблюдать**, построить (в отличие от равных или подобных треугольников), их можно только вообразить. Пространственное воображение развито у подростков недостаточно. Динамическое моделирование на ЭВМ оказывает помощь.

Задача

Построить трапецию по основаниям и диагоналям.



Этапы изучения в современных учебниках

Пропедевтический

Начальная школа. 5-6кл.

Интуитивные представления о симметричных фигурах, построение по клеточкам симметричных фигур.

Основной

Атанасян Л.С. П. 47. **Осевая и центральная симметрия.**

Связаны с возможностью **обогащения свойств** изученных фигур: **неразвернутый угол**, **равнобедренный и равносторонний треугольник**, **прямоугольник и ромб**, **квадрат**, **окружность**.

Выясняется **отсутствие оси** симметрии у **параллелограмма** (при **наличии центра симметрии**), **разностороннего треугольника**.

Центр симметрии не имеет треугольник.

Определения **явно не выделены**, условия задания симметрии **не акцентированы**.

Завершающий

В новых программах добавлен стереометрический материал: многогранники, круглые тела, формула объема прямоугольного параллелепипеда. В связи с этим сокращен материал, посвященный движениям.

Глава 13. Движения. Термин «геометрические преобразования» не используется. Только «**отображение плоскости на себя**» и «**движение**».

Вновь с использованием новой терминологии рассматриваются осевая и центральная симметрия как движения. Параллельный перенос, поворот вводятся впервые, условия их задания сформулированы, но акценты явно не расставлены.

Выводы

Современные курсы планиметрии не строятся на основе геометрических преобразований, общее понятие о геометрических преобразованиях плоскости не вводится.

Программа ориентирует на изучение частных видов геометрических преобразований: движений (параллельный перенос, поворот, осевая и центральная симметрия) и подобия фигур.

Однако, изучение геометрических преобразований носит **изолированный характер, они очень мало взаимосвязаны с другими вопросами курса геометрии основной школы**

Выводы

У Атанасяна – носит иллюстрирующий характер,

у Погорелова рассматривается не преобразование плоскости, а преобразование фигур, при изучении преобразования фигур широко используется координатный метод.