

Производная функции

- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Производная неявно заданной функции
- Логарифмическое дифференцирование

Определение производной

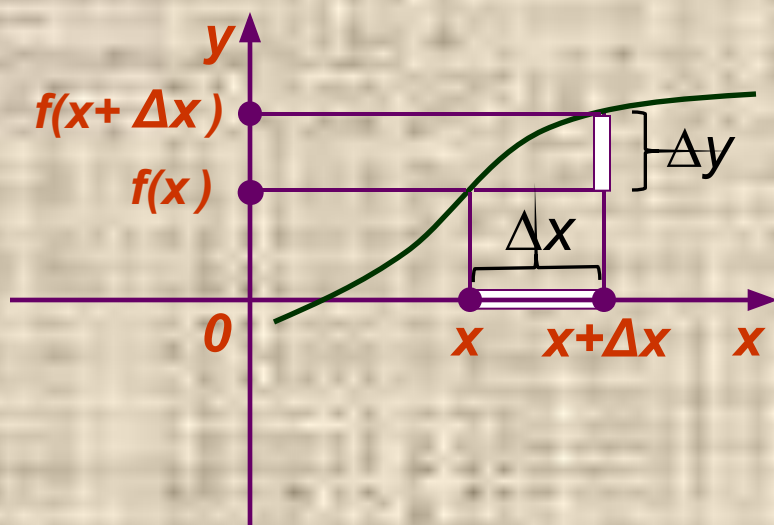
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется **дифференцируемой** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

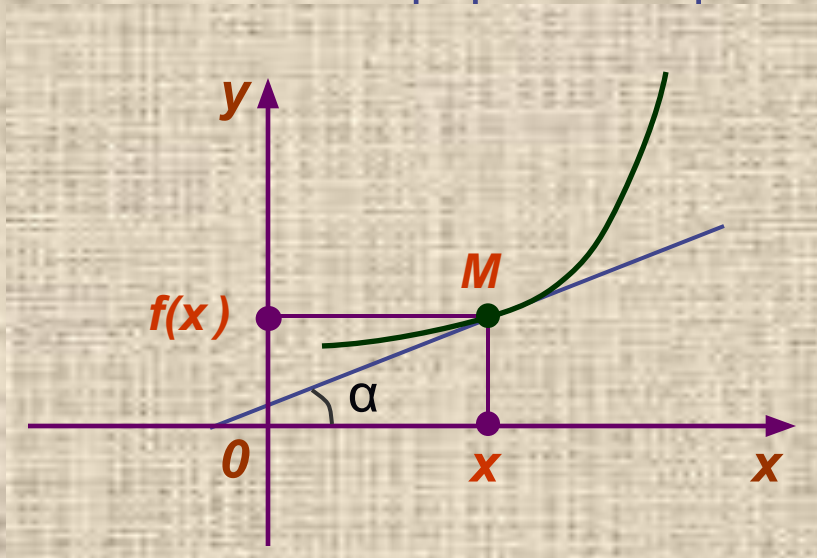
Значение производно функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'|_{x_0}$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной
Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

[где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$]

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = f(\varphi(g(x)))$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то говорят, что функция задана в **явном виде**.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно y :

$$F(x; y) = 0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию от x , и полученное выражение разрешить относительно производной.

$$[x^3 + y^3 - 3xy]' = [0]' \Rightarrow (x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{3}x^2 + \cancel{3}y^2 \cdot y' - \cancel{3}(x'y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала **прологарифмировать**, а затем результат **продифференцировать**.

Такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**.

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow$$

$$[\ln y]' = \left[2\ln x + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 5\ln(2x+5) \right]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-1)'}{x-1} + 1 - 5 \frac{(2x+5)'}{2x+5} \Rightarrow$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{4x-4} + 1 - \frac{10}{2x+5} \right) \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5}$$

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется **степенно – показательной**.

Производная такой функции находится только с помощью логарифмического дифференцирования.

$$y = (\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = [(x^2 + 1) \cdot \ln(\sin x)]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = (x^2 + 1)' \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot (\ln(\sin x))' \Rightarrow$$

$$y' = \left(2x \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{x^2+1}$$