


10 класс



Обратные тригонометрические функции и их свойства

Содержани

е

- Функция $y = \arcsin x$ и ее свойства
- Функция $y = \arccos x$ и ее свойства
- Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее свойства
- Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ и ее свойства

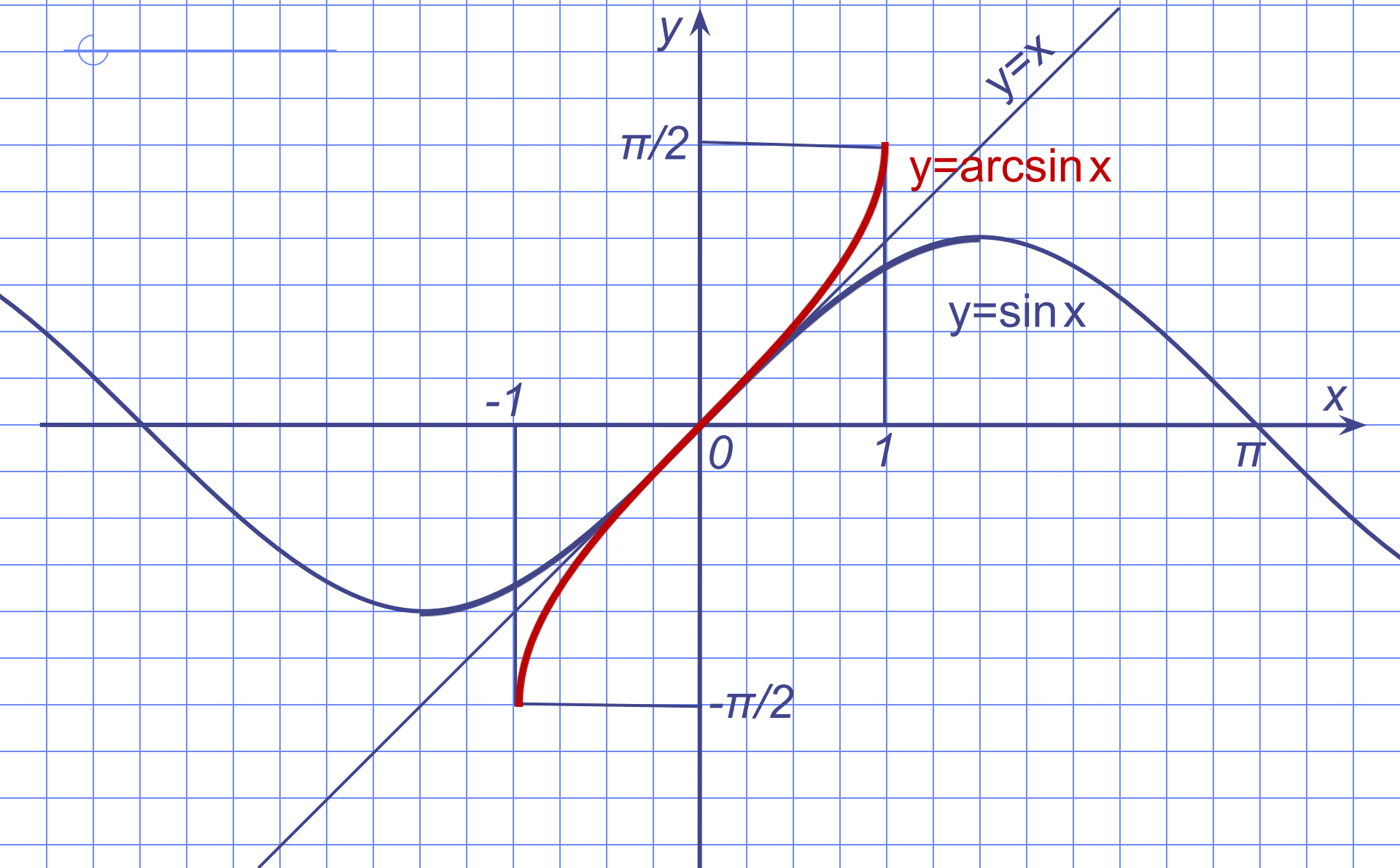
Функция $y = \arcsin x$ и ее свойства

Если $|a| \leq 1$, то $\arcsin a$ – это такое число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен a .

$$\text{Если } |a| \leq 1, \text{ то}$$
$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2; \end{cases}$$

$$\sin(\arcsin a) = a$$

Функция $y = \arcsin x$ и ее график



Функция $y = \arcsin x$ и ее свойства

1. $D(y) = [-1; 1]$.
2. $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$.
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ – функция нечетная.
4. Функция возрастает на $[-1; 1]$.
5. Функция непрерывна.

Функция $y = \arccos x$ и ее свойства

Если $|a| \leq 1$, то $\arccos a$ – это такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

$$\text{Если } |a| \leq 1, \text{ то} \\ \arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$\cos(\arccos a) = a$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \text{ где } -1 \leq a \leq 1$$

Функция $y = \arccos x$ и ее свойства

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = [0; \pi]$.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция убывает на $[-1; 1]$.

5. Функция непрерывна.

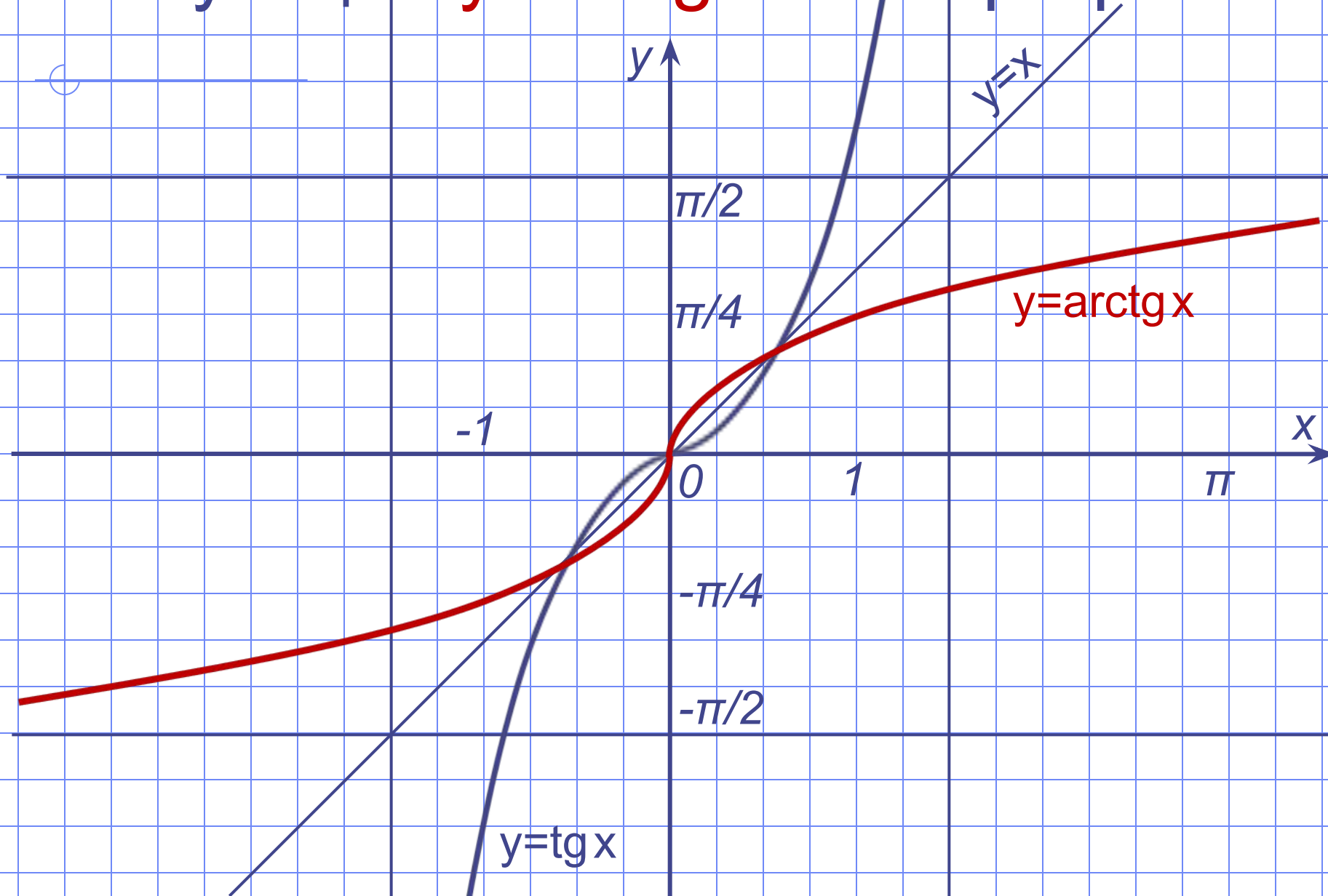
Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее свойства

$\operatorname{arctg} a$ – это такое число из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен a .

$$\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} t = a, \\ -\pi/2 < t < \pi/2; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} a) = a$$

Функция $y=\operatorname{arctg} x$ и ее график



Функция $y = \operatorname{arctg} x$ и ее свойства

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$.
3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ – функция нечетная.
4. Функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$.
5. Функция непрерывна.

Функция $y = \text{arcctg } x$ и ее СВОЙСТВА

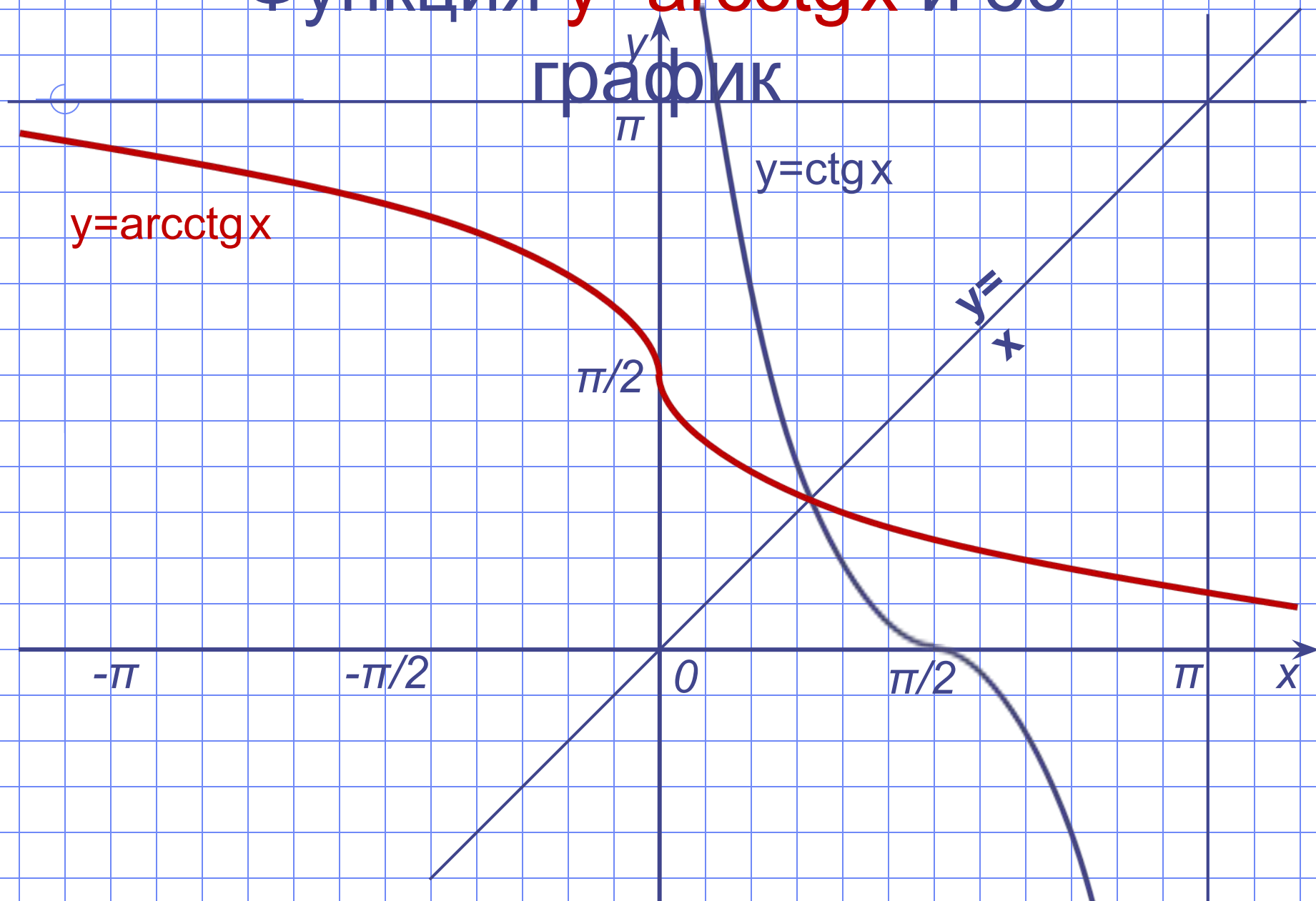
$\text{arcctg } a$ – это такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a .

$$\text{arcctg } a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ctg } t = a, \\ 0 < t < \pi; \end{cases}$$

$$\text{ctg} (\text{arcctg } a) = a$$

$$\text{arcctg} (-a) = \pi - \text{arcctg } a$$

Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ и ее график



Функция $y = \operatorname{arcsctg} x$ и ее свойства

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = (0; \pi)$.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
4. Функция убывает на $(-\infty; +\infty)$.
5. Функция непрерывна.

<i>a</i>	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>arcsin a</i>	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0	—	—	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
<i>arccos a</i>	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—	—	π	$\frac{5\pi}{6}$
<i>arctg a</i>	$\frac{\pi}{4}$	—	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	—
<i>arcctg a</i>	$\frac{\pi}{4}$	—	—	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	—

Примеры:

- область определения и область значений выражений:

Выражение	Область определения	Область значений
$2\arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; 2\pi]$
$\arcsin 3x$	$[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$\operatorname{arctg} \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
$-3\operatorname{arccctg} x$	$(-\infty; +\infty)$	$(-3\pi; 0)$

Пример 3

8 Имеет ли смысл выражение:

$$\arcsin(-1/2)$$

да

$$\arccos\sqrt{5}$$

нет

$$\arcsin(3\sqrt{20})$$

нет

$$\arcsin 1,5$$

нет

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

да

$$\arccos\frac{\pi}{5}$$

да

пример 4

- Сравните числа:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\arccos 0,3$$

$$\arcsin \frac{1}{3}$$

$$\arctg 1$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\arccos 0,7$$

$$\arcsin \frac{2}{3}$$

$$\arctg 1,5$$

<

пример

Найдите наименьшее значение a , при котором существует выражение

$$\arcsin(3 - 8a)$$

Решение.

$$-1 \leq 3 - 8a \leq$$

$$1$$
$$-4 \leq -8a \leq -2$$

$$0,25 \leq a \leq 0,5$$

Значит, наименьшее значение $a = 0,25$.

Тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями

$\sin(\arcsin x) = x$, $ x \leq 1$	$\cos(\arccos x) = x$, $ x \leq 1$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $ x \leq 1$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $ x \leq 1$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$	$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $ x \leq 1, x \neq 0$
$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $ x \leq 1, x \neq 0$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Упражнение 1

1. Вычислить $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Вычислить $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

3. Вычислить $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Вычислить $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Вычислить $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

6. Вычислить $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Варианты ответов:

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{2\pi}{3}$ в) $\frac{\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{5\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $-\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $\frac{2\pi}{3}$ б) $-\frac{\pi}{3}$ в) $\frac{\pi}{6}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

а) $\frac{5\pi}{6}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{2\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

Упражнение 2

Найти область определения функции $y = \arcsin \frac{x}{6}$

Найти область определения функции $y = \arccos 7x$

Найти область определения функции $y = \operatorname{arctg} 12x$

Найти область определения функции $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{9}$