

Дифференциальное исчисление

Студент должен знать

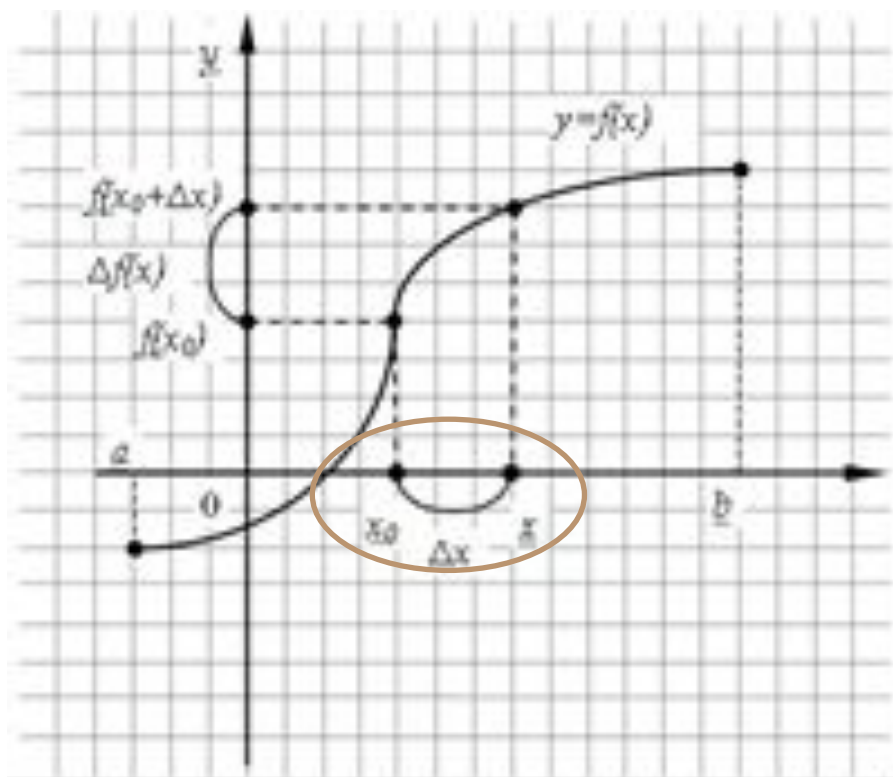
ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ*

* Федеральный государственный стандарт
среднего профессионального образования
по специальности 060501 Сестринское дело



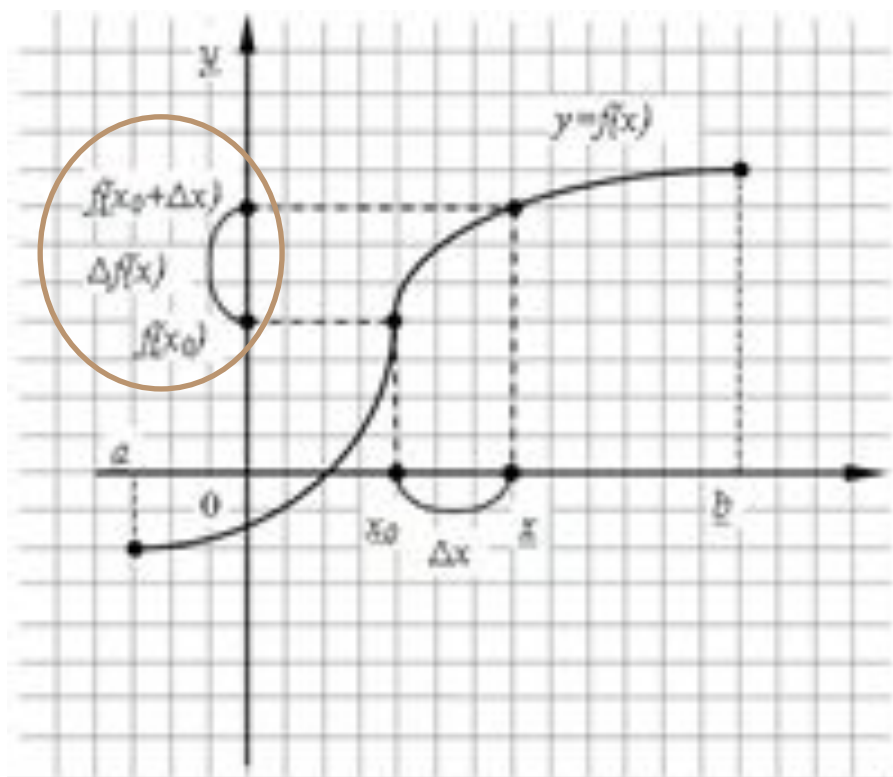
Понятие ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Приращение аргумента



- Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением независимой переменной*.
- Тогда: $x = x_0 + \Delta x$.

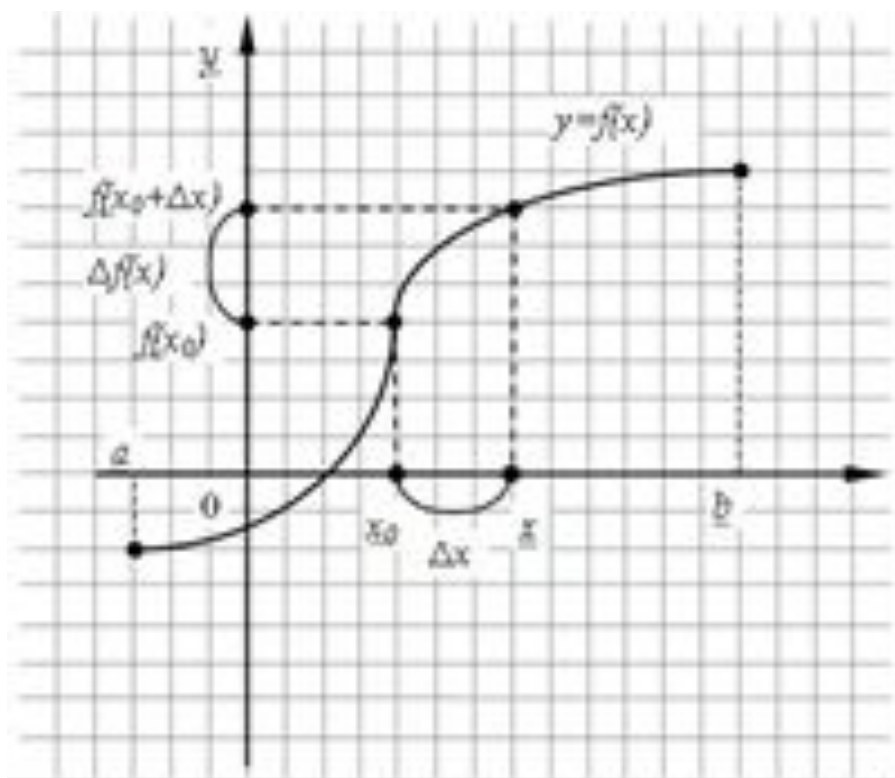
Приращение функции



$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x) - f(x_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\end{aligned}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ В

ТОЧКЕ:



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

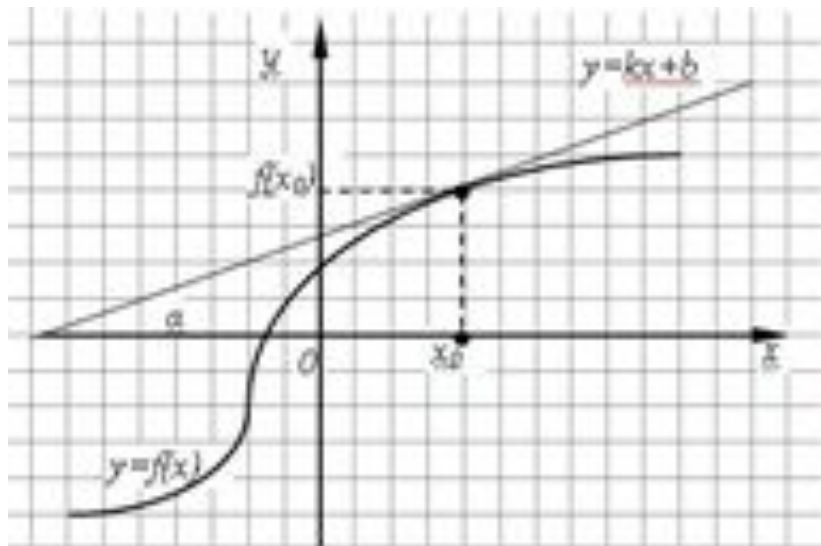
ПРОИЗВОДНАЯ функции

1. $(y = f(x), x = x_0, \exists f'(x_0)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y = f(x) - \text{дифференцируема в точке } x_0)$

2. Если $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке x из интервала X , то она называется дифференцируемой на интервале X .

Геометрический смысл производной



- Угловым коэффициентом:

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

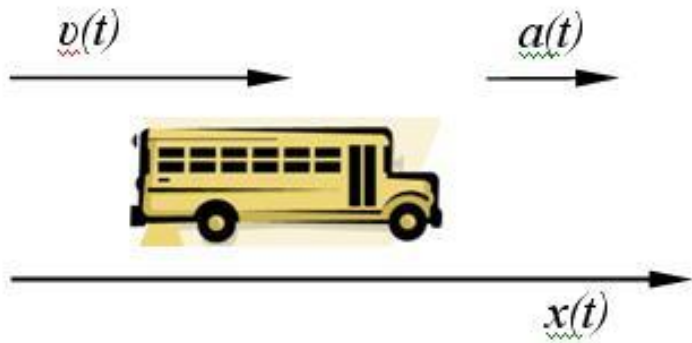
- Уравнение касательной:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

- Уравнение линейной функции:

$$y = k \cdot x + b$$

Физический смысл производной



- Координата тела: $x(t)$;

- Скорость тела:

$$v(t) = x'(t)$$

- Ускорение тела:

$$a = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$$



ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Степенная функция

$$C' = 0 \quad (x^2)' = 2x \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x' = 1 \quad (x^3)' = 3x^2 \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$



Тригонометрические функции

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



Показательная и логарифмическая функции


$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$





ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная суммы (Т1)

$$(u + v)' = u' + v'$$



Вынос множителя за знак производной (С1)

$$(k \cdot u)' = k \cdot u'$$



Производная произведения (T2)

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Производная частного (ТЗ)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$$



СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Сложная функция

$y = u(v)$ – сложная функция;

$v = v(x)$ – сложный аргумент.

Сложная функция $y = \sin x^2$

$y = u(v) = \sin v$ – сложная
тригонометрическая
функция;

$v(x) = x^2$ – сложный аргумент,
квадратичная функция.

Производная сложной функции (Т4)

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Прим. 1. Найти производную

функции: $y = 2^x + 3 \cos x - 4x^7$

$$y' = (2^x + 3 \cos x - 4x^7)' =$$

$$= (2^x)' + (3 \cos x)' - (4x^7)' =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot (\cos x)' - 4 \cdot (x^7)' =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 + 3(-\sin x) - 4 \cdot 7x^6 =$$

$$= 2^x \cdot \ln 2 - 3 \sin x - 28x^6.$$



Прим. 2. Найти производную

функции: $y = (x^2 - 3) \cdot (x^3 + 2x)$

$$y' = ((x^2 - 3) \cdot (x^3 + 2x))' =$$

$$= (x^2 - 3)' \cdot (x^3 + 2x) + (x^2 - 3) \cdot (x^3 + 2x)' =$$

$$= (2x - 0) \cdot (x^3 + 2x) + (x^2 - 3) \cdot (3x^2 + 2 \cdot 1) =$$

$$= 2x(x^3 + 2x) + (x^2 - 3) \cdot (3x^2 + 2) =$$

$$= 2x^4 + 4x^2 + 3x^4 + 2x^2 - 9x^2 - 6 =$$

$$= 5x^4 - 3x^2 - 6.$$

Прим. 3. Найти производную

функции: $y = \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2x}$

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3}{x^3 + 2x} \right)' = \frac{(x^2 - 3)'(x^3 + 2x) - (x^2 - 3)(x^3 + 2x)'}{(x^3 + 2x)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^3 + 2x) - (x^2 - 3)(3x^2 + 2)}{(x^3 + 2x)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 + 4x^2 - 3x^4 - 2x^2 + 9x^2 + 6}{(x^3 + 2x)^2} = \frac{-x^4 + 11x^2 + 6}{(x^3 + 2x)^2}.$$

Прим. 4. Найти производную

функции: $y = \sqrt{3x^3 - 5x}$

$$y' = \left(\sqrt{3x^3 - 5x} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3x^3 - 5x}} \cdot (3x^3 - 5x)' =$$

$$= \frac{9x^2 - 5}{2\sqrt{3x^3 - 5x}}.$$



ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциал функции

По определению
производной: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

При $\Delta x \rightarrow 0$ – бесконечно малая величина.

При $\Delta x \rightarrow 0$: $\Delta x = dx$ – дифференциал аргумента.

Дифференциал аргумента – очень малое его приращение.

Аналогично:

При $\Delta x \rightarrow 0$: $\Delta f(x) \rightarrow 0$ – бесконечно малая функция.

При $\Delta x \rightarrow 0$: $\Delta f(x) = df(x)$ – дифференциал функции.

или: при $\Delta x \rightarrow 0$: $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta y = dy$

Дифференциал функции – очень малое её приращение.

Производная функции

Тогда:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (\text{читаем: «дэ эф от икс по дэ икс»}).$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

(читаем: «дэ игрек по дэ икс») или:

Дифференциал функции

Итак, $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

\Rightarrow $dy = y' \cdot dx$

Найти дифференциал
функции $y = x^3$.

$$dy = y' \cdot dx$$

$$dy = y' dx = (x^3)' dx = 3x^2 dx$$

Ответ: $dy = 3x^2 dx$



ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Формула для приближённых вычислений

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x)$$

Если Δx – малая величина, то $\Delta x = dx$ и $\Delta f(x) = df(x)$

$$f(x) = f(x_0 + dx) = f(x_0) + df(x)$$

$$df(x) = f'(x)dx \Rightarrow f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Вычислить: $3,003^5$.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Рассмотрим функцию: $f(x) = x^5$

Так как $x = 3,003$, то $x_0 = 3$; $\Delta x = x - x_0 = 3,003 - 3 = 0,003$.

$$f'(x) = (x^5)' = 5x^4; \quad f'(3) = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405;$$

$$f(3) = 3^5 = 241.$$

$$f(3,003) \approx 241 + 405 \cdot (0,003) = 241 + 1,209 = 242,209.$$

ВЫЧИСЛИТЬ: $2,996^5$.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$f(x) = x^5;$$

$$x_0 = 3; \quad \Delta x = 2,996 - 3 = -0,004.$$

$$f'(x) = (x^5)' = 5x^4; \quad f'(3) = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405;$$

$$f(3) = 3^5 = 241.$$

$$\begin{aligned} f(2,996) &\approx 241 + 405 \cdot (-0,004) = 241 - 2,0251 = \\ &= 238,9749 \approx 238,975. \end{aligned}$$



ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

n-я степень числа $x \approx 1$

$$x^n = (1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$$

$$\alpha = x - 1 \quad 0 < |\alpha| \ll 1$$

Корень n -й степени числа

$x \approx 1$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{n} \alpha$$

$$\alpha = x - 1 \quad 0 < |\alpha| \ll 1$$

Вычислить: $1,003^5$.

$$x^n = (1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$$

$$\alpha = 1,003 - 1 = 0,003, \quad n = 5$$

$$1,003^5 = (1 + 0,003)^5 \approx$$

$$\approx 1 + 5 \cdot 0,003 = 1 + 0,015 = 1,015.$$

Вычислить: $\sqrt[4]{0,996}$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha$$

$$\alpha = 0,996 - 1 = -0,004, \quad n = 4$$

$$\sqrt[4]{0,996} = \sqrt[4]{1 + (-0,004)} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{1}{4} \cdot (-0,004) = 1 - 0,001 = 0,999.$$

Итоги

- Определение производной;
- Таблица производных;
- Правила дифференцирования;
- Дифференциал функции;
- Приближённые вычисления с помощью дифференциала.